Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

75-летию со дня рождения
Юрия Ивановича Сапронова
посвящается

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы
Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXIII

(3–9 мая 2022 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2022

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

С56 **Современные методы теории краевых задач** : материалы международной конференции «Понтрягинские чтения — XXXIII» (3—9 мая 2022 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова ; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — 351 с.

ISBN 978-5-9273-3548–0

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Международной конференции «Понтрягинские чтения — XXXIII», посвященной 75-летию Юрия Ивановича Сапронова. Основные направления конференции: качественная и спектральная теория краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения с частными производными, аналитические методы в теории интегральных, дифференциальных уравнений и уравнений с дробными производными, аналитические методы в теории интегральных, дифференциальных уравнений и уравнений с дробными производными, теория операторов, геометрия и анализ, оптимальное управление, экстремальные задачи, теория игр, смежные проблемы прикладной и инженерной математики, качественные методы математического моделирования, информатика, информационные системы.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-3548–0

Посвящается 75-летию Юрия Ивановича Сапронова

Содержание

Contents

О Юрии Ивановиче Сапронове

Выдающийся воронежский математик, научные результаты которого имеют мировой уровень, Юрий Иванович Сапронов родился 6 мая 1947 года в городе Уссурийске Приморского края в семье военнослужащего. Начальное образование получил в сельской школе села Новонежино Шкотовского района, расположенной рядом с гарнизоном, где служил его отец. Учителями были жены офицеров, не имеющие в своем большинстве специальной и педагогической подготовки. Это сказалось, когда после демобилизации отца семья вернулась в Воронеж: учеба здесь давалась Юре в первое время очень непросто. Но способности, характер и помощь школьных друзей сделали своё дело, и, сменив из-за частых переездов семьи несколько воронежских школ, Юрий Сапронов оказался в математическом классе школы № 58, где провёл три лучших года своей школьной жизни. Отдавая должное педагогам (среди которых выделялся учитель математики Давид Борисович Сморгонский), Юрий Иванович всё же считал, что главную роль в его становлении как математика сыграли одноклассники.

После окончания школы в 1965 году Юрий Сапронов поступил на первый курс математико-механического факультета Воронежского государственного университета. В то время факультет был признанным международным центром функционального анализа и вычислительной математики. В частности, в шестидесятые годы зарождалась воронежская школа нелинейного анализа. Наряду с корифеями воронежской математики — М. А. Красносельским, С. Г. Крейном, В. И. Соболевым — заметной фигурой на факультете был молодой доктор наук Юрий Григорьевич Борисович. В 1963 году он возглавил вновь созданную кафедру алгебры и топологических методов анализа (КАТМА), а спустя два года основал семинар по топологическим методам анализа. Этот семинар сразу стал значимым явлением воронежской математической жизни, а Юрий Сапронов был одним из ключевых его участников, наряду с В. Обуховским, Б. Гельманом, Я. Израилевичем, В. Мельником, П. Шерманом. Эти студенты образовали группу специализации на кафедре КАТМА, а позже — и ядро научной школы Ю. Г. Борисовича, вместе с на год младшими Ю. Гликлихом, В. Звягиным, В. Соболевым, Т. Щелоковой (впоследствии Фоменко), Н. Близняковым.

Научную деятельность на «взрослом» уровне Юрий Иванович начал уже в студенческом возрасте. В 1967 году, будучи студентом 3-го курса, он был удостоен медали Всесоюзной выставки научно-технического творчества молодежи, а в следующем году в столь солидном издании, как «Доклады Академии наук», вышла заметка Ю. Г. Борисовича и Ю. И. Сапронова [1]. В 1970 году он с отличием окончил университет и сразу поступил в аспирантуру к Ю. Г. Борисовичу. Кандидатскую диссертацию на тему «К теории компактных, уплотняющих и фредгольмовых отображений» [2] Ю. И. Сапронов защитил в 1972 году, после чего на протяжении 26 лет работал на кафедре алгебры и топологических методов анализа. Стоит отметить, что в 1981 году за цикл работ по теории фредгольмовых отображений Ю. И. Сапронов получил премию Воронежского комсомола.

К 1987 году Ю. И. Сапронов подготовил докторскую диссертацию на тему «Конечномерные редукции и локальный анализ фредгольмовых уравнений» [6]. Однако болезни родителей Юрия Ивановича, а затем и их уход из жизни сильно задержали организацию защиты. В итоге защита состоялась в 1992 году в Харькове. Оппонентами работы выступили признанные специалисты по нелинейному анализу П. П. Забрейко и И. В. Скрыпник, а также известный киевский тополог В. В. Шарко. Поскольку в работе использовались методы теории особенностей гладких отображений, харьковский диссертационный совет поставил условие, чтобы диссертант получил и предоставил положительный отзыв от В. И. Арнольда. Это было сделано, причем академик Арнольд очень быстро прислал требуемый отзыв, хотя находился в тот момент в Германии (на всякий случай напомним, что Интернета в начале девяностых ещё не было!).

Кроме упомянутых математиков, работы Ю. И. Сапронова удостоились высокой оценки таких корифеев, как С. П. Новиков и А. Т. Фоменко. К самым интересным и значимым результатам Ю. И. Сапронова в XX веке мы можем отнести следующие:

1. Доказательство нелокальной приводимости фредгольмова отображения к форме Лере–Шаудера и принцип конечномерной редукции в теории степени фредгольмовых отображений, позволяющий существенно ослабить гладкость отображения.

2. Получение гомотопической классификации уплотняющих векторных полей.

3. Исследование многомодовых бифуркаций решений в нелинейных краевых задачах.

Отметим, что современная теория существования и бифуркаций решений нелинейных уравнений математической физики находится на стыке функционального анализа, дифференциальных уравнений, топологии и теории особенности дифференцируемых отображений.

С 1993 года Юрий Иванович работал на КАТМА в должности профессора (ученое звание профессора он получил в 1994 году), а спустя ещё несколько лет начался новый этап его профессиональной деятельности. Рассказ об этом требует отступить в повествовании почти на два десятилетия назад, когда на математическом факультете ВГУ была собрана учебная группа из молодых специалистов, уже имеющих высшее (техническое или естественно-научное) образование, но желавших углубить свои знания именно в математике. Одним из лекторов в этой группе, называемой на факультете «инженерным потоком», стал Ю. И. Сапронов. Среди студентов же выделялся инженер-конструктор воронежского КБ Химавтоматики, выпускник МВТУ имени Баумана Сергей Георгиевич Валюхов. Завязавшиеся контакты молодых энтузиастов математики с лектором переросли в тесное научное сотрудничество, которое привело к созданию в 1998 году кафедры математического моделирования (КММ) на математическом факультете. С момента своего основания кафедра КММ активно сотрудничала с руководимым С. Г. Валюховым ОАО «Турбонасос», а Юрий Иванович Сапронов, являясь основателем и организатором кафедры, до конца своей жизни работал на ней профессором и заместителем заведующего по научной работе.

В новом тысячелетии научные интересы Ю. И. Сапронова всё более смещались в сторону задач, прикладных «в сильном смысле», то есть возникших непосредственно из производственных потребностей. В рамках сотрудничества с воронежскими предприятиями он совместно с коллегами по кафедре математического моделирования получил уникальные научно-прикладные результаты. Во-первых, была решена задача оптимизации геометрии винтовых насосов с точки зрения их герметичности [10], важная для нефтегазового производства. Этот результат впечатлил немецких коллег, работающих над аналогичными изделиями. Во-вторых, под руководством Ю. И. Сапронова проведено успешное исследование оптимизации вибропогружателей [12]. Решение этой задачи, актуальной в строительстве (вибропогружатель — это устройство для забивания свай в грунт), позволило понять и оценить эффективность родственных конструкций, применяемых в мире. Последнее исследование легло в основу докторской диссертации Д В. Костина, написанной при научной консультации Ю. И. Сапронова.

Всего Юрий Иванович Сапронов лично и в соавторстве опубликовал более 150 научных работ, два обзора в журнале «Успехи Математических Наук» и 7 научных монографий. Список некоторых наиболее значимых публикаций Ю. И. Сапронова приведён ниже. Юрий Иванович являлся членом нескольких диссертационных советов и работал в редакционных коллегиях российских научных журналов «Вестник ВГУ. Серия: Физика, математика», «Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование», «Насосы. Турбины. Системы».

Нельзя не написать и о педагогической деятельности Юрия Ивановича Сапронова. Кроме преподавания на факультете, с девяностых годов он активно работал в области довузовской подготовки, читая курс алгебры в трехгодичном математическом классе воронежского колледжа № 1 (ныне — гимназия имени Басова). Юрию

Ивановичу принадлежит оригинальная идея создания математического класса в лицее районного центра Воронежской области Верхний Мамон. В этом классе он проводил занятия и был куратором. За опытом создания такого класса в лицей приезжали представители Якутии. Многие выпускники этих классов впоследствии окончили математический факультет и некоторые из них работают в образовательных учреждениях района.

При активном участии кафедры математического моделирования в 1999 году открывается новый факультет компьютерных наук и Юрий Иванович с энтузиазмом принял участие в его становлении, разработке программ по всем математическим курсам, проведении научных семинаров и конференций.

Ю. И. Сапронов в полноте раскрыл свой талант педагога на кафедре математического моделирования. Особенно это проявилось в работе с аспирантами и дипломниками. Уникальная способность наставника позволила Юрию Ивановичу в трудный для воронежской математической школы период продолжать заниматься и прививать любовь к математике своим многочисленным ученикам. На кафедре постоянно работал научный семинар под его руководством. В организации и деятельности этого семинара самое активное участие принимал воронежский физик профессор Борис Михайлович Даринский, в сотрудничестве с которым Ю. И. Сапронов получил интересные результаты, связанные с приложениями теории особенностей к исследованию фазовых переходов в сегнетоэлектриках [8, 9]. Через семинар прошли все ученики Юрия Ивановича, выступали на нём и многие математики (не только университетские). О плодотворности семинара говорит тот факт, что под руководством Ю. И. Сапронова было защищено 24 кандидатских и одна докторская диссертации, причём 20 из них в период с 1999 по 2012 годы. Для своих учеников Юрий Иванович был надежной опорой, щедрым источником научных идей и непререкаемым авторитетом не только в науке, но и в жизни. Эта авторитетность ни в малейшей степени не означала авторитарности — Юрий Иванович всегда оставался скромным человеком, относившимся ко всему с неизменным мягким юмором.

Об исключительной порядочности Юрия Ивановича знали все его коллеги и ученики — поэтому к нему часто обращались не только за научной, но и за человеческой поддержкой. Его неожиданный уход из жизни в 2018 году стал для воронежской науки невосполнимой утратой. Светлая память о нем навсегда сохранится в наших сердцах.

Литература

[1] Борисович Ю. Г., Сапронов Ю. И. К теории уплотняющих операторов // ДАН СССР. — 1968, Т. 183, № 1. — С. 18–20.

[2] Сапронов Ю. И. К теории компактных, уплотняющих и фредгольмовых отображений : дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.00.00. — Воронеж, 1972. — 119 с.

[3] Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера // Успехи математических наук. – 1977. — Т. 32, № 4. — С. 3–54.

[4] Сапронов Ю. И. Двумодовая бифуркация решений уравнения Кармана // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 6. — С. 1078–1081.

[5] Сапронов Ю. И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах // Математические заметки. — 1991. — Т. 49, № 1. — С. 94–103.

[6] Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции и локальный анализ фредгольмовых уравнений : дисс. ... доктора физ.-мат. наук : 01.01.01. — Воронеж, 1991. — 231 с.

[7] Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // Успехи математических наук. — 1996. — Т. 51, № 1. — С. 101–132.

[8] Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки // Изв. вузов. Математика. — 1997, № 2. — С. 35–46.

[9] Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. – Т. 12. — М., 2004. — С. 3—140.

[10] Валюхов С. Г., Костин В. А., Сапронов Ю. И, Семенов С. М. Оптимизация шестеренчатых зацеплений винтовых поверхностей. — Воронеж, 2005. — 177 с.

[11] Сапронов Ю. И., Костин Д. В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем. — Воронеж, 2012. — 207 с.

[12] Ермоленко В. Н., Костин В. А., Костин Д. В, Сапронов Ю. И. Оптимизация полигармонического импульса // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». — 2012, № 13. — С. 35–44.

[13] Сапронов Ю. И., Ковалева М. И., Костина Т. И. Огибающие кривые, точки возврата и бифуркационный анализ нелинейных задач. — Воронеж, 2015. — 242 с.

[14] Сапронов Ю. И. Математическое моделирование посткритических процессов. Локальные и нелокальные многомодовые бифуркации. — Saarbrücken, LAP Lambert Academic Publishing, 2016. — 178 с.

В.А. Костин, Д.В. Костин, С.Л. Царев

АБСОЛЮТНАЯ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ИЗ КЛАССА $W^1_{(2,m)}(G)$ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ю.Г. Аббасова (Баку, АГПУ)
abbasovayuliya@gmail.com

Рассмотрим на интервале $G = (0,1)$ дифференциальный оператор

$$L\Psi = \Psi^{(3)} + U_1(x)\,\Psi^{(2)} + U_2(x)\,\Psi^{(1)} + U_3(x)\,\Psi$$

с матричными коэффициентами $U_l(x) = (u_{lij}(x))^m_{i,j=1}$, $l = \overline{1,3}$, где $u_{lij}(x)\ \epsilon\ L_1(G)$.

Обозначим через $D(G)$ класс m – компонентных вектор-функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до второго порядка включительно на отрезке $\overline{G} = [0,1]$ $\big(D(G) = W^3_{1,m}(G)\big)$.

Под собственной вектор-функцией оператора L, отвечающей собственному значению λ, будем понимать любую тождественно не равную нулю вектор-функцию $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_m(x))^T \in D(G)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению (см. [1])

$$L\Psi + \lambda\Psi = 0.$$

Пусть $L^m_p(G), p \geqslant 1$, пространство m – компонентных вектор-функций

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots,\ f_m(x))^{\ T}$ с нормой

$$\|f\|_{p,m} = \left\{\int_G |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} = \left\{\int_G \left(\sum_{l=1}^m |f_l(x)|^2\right)^{p/2} dx\right\}^{1/p}.$$

Будем говорить, что вектор-функция $f(x)$ принадлежит в $W^1_{p,m}(G), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $\overline{G}$ и $f^{'}(x)\,\epsilon\ L^m_p(G)$. Норма вектор-функции $f(x)\,\epsilon\ W^1_{p,m}(G)$ определяется равенством

$$\|f\|_{W^1_{p,m}(G)} = \|f\|_{p,m} + \left\|f^{'}\right\|_{p,m}.$$

Предположим, что $\{\Psi_k(x)\}^\infty_{k=1}$ полная ортонормированная в $L^m_2(G)$ система, состоящая из собственных вектор-функций оператора L. Обозначим через $\{\lambda_k\}^\infty_{k=1}$ соответствующую систему собственных значений, причем предполагается, что $Re\ \lambda_k = 0$.

Наряду со спектральным параметром λ_k введем параметр μ_k:

$$\mu_k = \begin{cases} (-i\lambda_k)^{1/3}\ , \text{ если } \ Im\ \lambda_k \geqslant 0, \\ (i\lambda_k)^{1/3}, \text{ если } \ Im\ \lambda_k < 0\ . \end{cases}$$

Введем частичную сумму ортогонального разложения вектор-функции
$f\,(x)\,\epsilon W^1_{p,m}(G)$ по системе $\{\,\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\nu\,(x,f) = \sum_{\mu_k \leqslant \nu} f_k\,\Psi_k\,(x)\,, \quad \nu > 0,$$

где

$$f_k = (f,\,\Psi_k) = \int_0^1 < f\,(x)\,,\,\Psi_k\,(x) > dx = \int_0^1 \sum_{l=1}^{m} f_l\,(x)\,\overline{\psi_{kl}}\,(x)\,dx,$$

$$\Psi_k\,(x) = (\,\Psi_{k1}\,(x)\,,\,\Psi_{k2}\,(x)\,,\ldots,\,\Psi_{km}\,(x))^T.$$

Введем разность $R_\nu\,(x,f) = f\,(x) - \sigma_\nu\,(x,f)\,.$

В работе доказывается следующий результат.

Теорема. *Пусть* $U_1\,(x) \in L_2\,(G)\,,\ U_r\,(x)\ \in\ L_1\,(G)\,,\ r = \overline{2,3}$; $f\,(x) \in W^1_{2,m}(G)$ *и выполняется условие*

$$\left| < f\,(x)\,,\,\Psi_k^{(2)}\,(x) > |_0^1 \right| \leqslant C_1\,(f)\ \ \mu_k^\alpha \|\,\Psi_k\|_{\infty,m}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2, \quad \mu_k \geqslant 1,$$

где $C_1\,(f)$ *постоянная зависящая от* $f\,(x)$.

Тогда спектральное разложение вектор-функции $f\,(x)$ *по системе* $\{\Psi_k\,(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G} = [0,\ 1]$ *и справедлива оценка*

$$\|R_\nu(\cdot,f)\|_{C[0,1]} \leqslant const \left\{ C_1\,(f)\,\nu^{\alpha-2} + \nu^{-\frac{1}{2}} \left(\|U_1^* f\|_{2,m} + \|f'\|_{2\ ,m} \right) + \right.$$

$$\left. +\nu^{-1} \|f\|_{\infty,m} \sum_{r=2}^{3} \nu^{2-r} \|U_r\|_1 \right\}\ , \qquad \nu \geqslant 2\ ,$$

где U_1^**- сопряженная к* U_1 *матрица; const не зависит от* $f\,(x)$.

Следствие. *Если в теореме* $C_1\,(f) = 0$ *или* $0 \leqslant \alpha < 3/2$ *,то справедлива оценка*

$$\|R_\nu\,(\cdot,f)\|_{C[0,1]} = o\left(\nu{-}\frac{1}{2}\right), \nu \to +\infty,$$

где символ «о» зависит от $f\,(x)\,.$

Подобные результаты для оператора второго порядка ранее установлены в работе [2].

Литература

1.Ильин, В.А. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным не эрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // Дифференциальные уравнения. 1991.т.27, №11, с.1862-1878.

2. Курбанов, В.М., Гараева, А.Т. Абсолютная и равномерная сходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным потенциалом // Доклады РАН. 2013.т. 450, №3 ,с. 268-270.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСА В СЕТЯХ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОХОЖДЕНИЯ ПО ДУГАМ

Х.Н. Абдулрахман,
Н.С. Задорожная (Ростов-на-Дону, РГУПС)
Abdulrahm.haidar@gmail.com

Ресурсная сеть является ориентированной сетью $G(X, U, f)$, состоящей из компоненты сильной связности, на которой для каждой дуги u указана пропускная способность $r(u) > 0$, и задана вектор-функция состояния $Q(t) = \{q_1(t); ...; q_n(t)\}$, где $q_i(t) \geqslant 0 \quad \forall i \in [1; n]_Z$; $q_i(t)$ – это количество ресурса в вершине x_i в момент времени t. Правила функционирования сети:

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{u \in [x_i]^+} F(u,t) + \sum_{u \in [x_i]^-} F(u,t) \quad \forall i \in [1; n]_Z,$$

где $F(u, t)$ – величина ресурсного потока, выходящего по дуге u в момент времени t, определяются следующим образом (для определенности будем считать, что x_j начальная вершина дуги u):

$$F(u,t) = r(u), \quad q_j(t) > \sum_{v \in [x_j]^+} r(v);$$

$$F(u,t) = \frac{r(u)}{\sum_{v \in [x_j]^+} r(v)} q_j(t), \quad q_j(t) \leqslant \sum_{v \in [x_j]^+} r(v).$$

Здесь $[x]^+$ – множество дуг, выходящих из вершины x, а $[x]^-$ – множество дуг, входящих в вершину x. Ресурсную сеть $G(X, U, f, D)$

с меняющейся длительностью прохождения по дугам будем называть орграфом G, на котором каждая дуга u имеет длительность $d(u)$. Длительность дуги u может меняться со времени и описываться функцией $d(u) = d(u,t) \leqslant D$, где $t \in [0; D-1]_Z$, D – период сети. Для решения задачи о достижимости на сетях с меняющейся длительностью прохождения предложим построение вспомогательного графа $G(X', U', f')$ [1], [2].

Теорема .*Для того, чтобы вершина $x_i \in X$ исходной сети G была достижимой из вершины $x_j \in X$, необходимо и достаточно, чтобы на вспомогательной сети G' выполнялось следующее условие: существует хотя бы одна вершина из множества вершин $\{x_i^0, x_i^1, \cdots, x_i^{D-1}\}$, достижимая одной вершиной из множества $\{x_j^0, x_j^1, \cdots, x_j^{D-1}\}$.*

Состоянием в сети $G(X, U, f, D)$ с меняющейся длительностью прохождения по дугам будем считать следующий вектор

$$Q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t)\};$$

$$Q'(t) = \begin{pmatrix} q_1^{D-1}(t) & q_2^{D-1}(t) & \ldots & q_n^{D-1}(t) \\ q_1^{D-2}(t) & q_2^{D-2}(t) & \ldots & q_n^{D-2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^0(t) & q_2^0(t) & \ldots & q_n^0(t) \end{pmatrix},$$

где $q_i^j(t)$ – величина ресурса вершины $x_i^j = (p_1 \circ f')(u')$,
$i = 1, \cdots, n, t = 0, 1, \cdots, D-1$.

Рассмотрим дугу u (где $(p_1 \circ f)(u) = x_i^j, j = 0, \cdots, D-1$), которая имеет пропускную способность $r(u^\alpha)$. Тогда ресурс $q_i^j(t)$ в момент времени t находится в следующем виде:

$$q_i(t) = q_i(t-1) - \sum_{v \in [x_i^{t-1}]^+} F(u, t-1) + \sum_{v \in [x_i^t]^+} F(u, t-1),$$

где поток, проходящий через дугу u в момент времени $t-1$, имеет вид:

$$F(u, t-1) = \frac{q_i^j(t)}{\sum\limits_{k=0}^{D-1} q_i^k(t-1)} \cdot \frac{r(u)}{\sum\limits_{v \in [x_i^j]^+} r(v)} \cdot \min\{\sum_{k=0}^{D-1} q_i^k(t-1), \sum_{v \in [x_i^j]^+} r(v)\}.$$

Литература

1. Скороходов В.А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения /В.А. Скороходов// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2011 . № 1. — С. 26-31.

2. Абдулрахман Х. Полные двух ресурсные сети с петлями /Х. Абдулрахман, В.А.Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2016. № 2. — С. 10–16.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов (Махачкала, ДГУ)
gusen_e@mail.ru

Работ, посвященных вопросам существования и единственности положительных решений для нелинейных функционально - дифференциальных уравнений дробного порядка мало. В настоящей работе предпринята попытка устранить данный пробел. С помощью методов функционального анализа, основанных на использовании полуупорядоченных пространств, установлено существование и единственность положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. Одна из последних работ автора, посвященная рассматриваемой тематике, опубликована в [1].

Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{\alpha} x(t) + f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) + x'(0) = 0, \qquad x(1) + x'(1) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha \in (1, 2]$ — действительное число, D_{0+}^{α} — дробная производная Римана-Лиувилля, $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна на $[0, 1] \times [0, \infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Обозначим через $\hat{K}$ — конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$\min_{1/4 \leqslant t \leqslant 3/4} x(t) \geqslant \frac{1}{8} \|x\|_C.$$

Теорема 1. *Предположим, что $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ — положительный на конусе $\hat{K}$ оператор и выполнены условия*

1) $f(t, u) \leqslant a_2(t) + b_2 u^{p/q}$, *где* $a_2(t) \in \mathbb{L}_q$ $(q > 1)$, $\quad b_2 > 0,\ p > q$*;*

2) $f(t, u) \geqslant a_1(t) u^{p/q}$, *где* $a_1 \in \mathbb{L}_q$ *– неотрицательная функция;*

3) $\displaystyle \frac{p-q}{q} \left(\frac{q}{p b_2 \|M\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}}} \right)^{\frac{q}{p-q}} \geqslant \|a_2\|_{\mathbb{L}_q} \|M\|_{\mathbb{L}_{q'}}$*;*

4) $\int\limits_{1/4}^{3/4} M(s)a_1(s)(T1)(s)ds \leqslant 64b_2\frac{p}{q}\|M\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}$, *где* $M(s) = \dfrac{2(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \dfrac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}$, τ *— норма оператора* $T\colon C \to \mathbb{L}_p$, $\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}=1$.

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение, если функция* $f(t,u)$ *дифференцируема по* u, *производная* $f'_u(t,u)$ *монотонно возрастает по второму аргументу и*

$$\tau\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} < 1,$$

где $\theta(t) \equiv M(t)\left|f'_u\left(t, r\left(T1\right)(t)\right)\right|$, $r = \left(\dfrac{q}{pb_2\|M\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}}$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$.

Литература

1. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения дробного порядка / Г.Э. Абдурагимов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2021. — №194. — С. 3–7.

О ЗАДАЧЕ КРАСОВСКОГО ОБ УСПОКОЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА[1]

А.Ш. Адхамова (Москва, РУДН)

ami_adhamova@mail.ru

В работе [1] Н. Н. Красовский сформулировал и изучил задачу об успокоении системы с последействием, описываемой дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа. А. Л. Скубачевский в работе [2] обобщил задачу Н. Н. Красовского на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием. В статье [3] рассматривается модель с постоянными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями, в [4] - с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90119).

Рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$A_0(t)y'(t)+\sum_{m=0}^{M}B_m(t)y(t-m\tau)=u(t),\quad 0<t<T, \tag{1}$$

где $y(t) = (y_1(t),...,y_n(t))^T$ - вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t),...,u_n(t))^T$ - вектор-функция управления, $A_0(t)$ - невырожденная матрица порядка $n\times n$, $B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1...n}$ — матрица порядка $n\times n$ с элементами $a_{ij}^0(t)$, $b_{ij}^m(t)$, соответственно, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы определяется начальным условием:

$$y(t)=\varphi(t)\ \textit{для почти всех}\ t\in[-M\tau,0], \tag{2}$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))^T$ – заданная вектор-функция, $\varphi\in L_2^n(-M\tau,0)$.

Поскольку функция $\varphi\in L_2^n(-M\tau,0)$ определена п.в. на отрезке $[-M\tau,0]$, мы зададим дополнительно начальное условие

$$y(0+0)=\varphi_0, \tag{3}$$

где $\varphi_0\in\mathbb{R}^n$ - некоторый вектор.

Мы рассмотрим задачу о приведении системы (1) - (3) в положение равновесия. Найдем такое управление $u(t),\ \ 0<t<T$, что:

$$y(t)=0,\ t\in[T-M\tau,T], \tag{4}$$

где $T>2M\tau$.

Из всевозможных управлений будем искать управление, доставляющее минимум функционалу:

$$\int_0^T|u(t)|^2dt\to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y):=\int_0^T\left|A_0(t)y'(t)+\sum_{m=0}^{M}B_m(t)y(t-m\tau)\right|^2dt\to min \tag{5}$$

с краевыми условиями (2) - (4).

В работе была установлена связь между вариационной задачей для нелокальных функционалов, описывающих многомерную систему управления с последействиями, и соответствующей краевой задачей для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка, доказана однозначная разрешимость вариационной и краевой задач и гладкость обобщенного решения соответствующей краевой задачи.

Литература

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. / Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.

2. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. / A.L. Skubachevskii. — Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997. — 298 p.

3. Adkhamova A.S, Skubachevskii A.L. Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays / A.S. Adkhamova, A.L. Skubachevskii // Distributed Computer and Communication Networks. — 2016. — P. 612–623 .

4. Адхамова А.Ш., Скубачевский А.Л. Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа / A.Sh. Adkhamova, A.L. Skubachevskii // Доклады академии наук. — 2020. — Т. 490. № 1. — С. 81–84.

ОБ ОРБИТАХ В $\mathbb{R}^4$ РАЗЛОЖИМОЙ 3-МЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ[1]

Р.С. Акопян, А.В Лобода (Москва, МИРЭА; Воронеж, ВГТУ)
akrim111@yandex.ru, lobvgasu@yandex.ru

В связи с задачей описания однородных гиперповерхностей многомерных пространств (см. [1]) изучаются орбиты линейных представлений в $\mathbb{R}^4$ трехмерной разложимой алгебры Ли $g_3 = g_2 \oplus g_1$. Здесь g_2 — двумерная вещественная алгебра Ли с соотношением

$$[e_1, e_2] = e_1 \tag{1}$$

на ее базисные элементы e_1, e_2; $g_1 =< e_3 >$ – одномерная алгебра.

В сообщении разрабатывается подход ([2], [3]) к описанию таких орбит на основе приведения к каноническому виду базисов матричных алгебр Ли, отвечающих однородным гиперповерхностям. Несложно показать, что в случаях «нетривиальных» орбит (не являющихся поверхностями 2-го порядка и не сводимых к цилиндрическим многообразиям) жорданова нормальная форма матрицы e_1 из (1) может иметь лишь один из трех следующих видов:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

Однако за счет изменения двух других базисных матриц возникает большое количество не сводимых друг к другу представлений и орбит обсуждаемой разложимой алгебры Ли. Мы рассматриваем лишь семейство $\mathcal{A}_E$ ее представлений в $\mathbb{R}^4$, каждое из которых содержит единичную матрицу 4-го порядка.

Предложение 1. *В семействе $\mathcal{A}_E$ имеется 11 различных (не сводимых матричными подобиями друг к другу) типов представлений 3-мерных алгебр Ли, определяемых соотношением (1).*

Примеры базисов матричных алгебр из $\mathcal{A}_E$ приведены ниже.

Пример 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -b & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Теорема 1. *Следующие орбиты алгебр из $\mathcal{A}_E$ являются новыми аффинно однородными гиперповерхностями в $\mathbb{R}^4$:*

$$x_1x_4 + x_2x_3 = x_2^A x_4^{2-A}, \ A \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}, \tag{3}$$

$$x_1x_3 \pm x_2^2 = x_3^A x_4^{2-A}, \ A \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}, \tag{4}$$

$$x_1x_4 + x_2x_3 = x_4^2 \exp(x_3/x_4), \tag{5}$$

$$x_1x_4 - x_2^2 = x_4^2 \exp(x_3/x_4), \tag{6}$$

$$x_1x_4 - x_3^2 = x_2x_4(\ln x_2 - \ln x_4), \tag{7}$$

$$x_1x_2 + x_3x_4 = x_2^2(\ln x_2 - \ln x_4), \tag{8}$$

$$x_1x_4 + x_2x_3 = |x_3 + ix_4|^2 \exp(A \arg(x_3 + ix_4)), \ A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{9}$$

$$\left(x_1x_4^2 - x_2x_3x_4 + \frac{1}{3}x_3^3\right)^2 = A\left(x_2x_4 - \frac{1}{2}x_3^2\right)^3, \ A \neq -8/9. \tag{10}$$

Некоторые из 3-мерных орбит рассмотренных алгебр оказались «тривиальными», т.е. цилиндрическими поверхностями или поверхностями 2-го порядка.

Литература

1. Можей Н.П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии / Н.П. Можей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — № 7. — С. 41–52.

2. Лобода А.В. Об орбитах в $\mathbb{R}^4$ абелевой 3-мерной алгебры Ли / А.В. Лобода, Б.М. Даринский // Матер. междунар. научн. конф. «УОМШ-2021». — Уфа : 2021. — С. 239-241.

3. Лобода А.В. О реализуемости 3-мерных алгебр Ли векторными полями / А.В. Лобода, В.К. Каверина // Матер. междунар. научн. конф. «ВЗМШ-2022». — Воронеж : 2022. — С. 150-153.

О НЕЛИНЕЙНОЙ НАЧАЛЬНО - КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯ ТИПА ВЕНТЦЕЛЯ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ГОМОГЕНИЗАЦИИ ЗАДАЧ СЛОЖНОГО ТЕПЛОБМЕНА[1]

А.А. Амосов, Н.Е. Крымов (Москва, НИУ МЭИ)
AmosovAA@mpei.ru, KrymovNY@mpei.ru

Изучена нелинейная начально - краевая задача с краевым условием типа Вентцеля

$$c_p D_t v - \varepsilon \Delta H(v) = f, \quad (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \tag{1}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} c_p D_t v + \varepsilon D_n H(v) - \frac{\varepsilon^2}{2} D_s^2 H(v) + H_\Gamma(v) = g_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2} f_\Gamma, \qquad (x,t) \in (\Gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon) \times (0,T), \tag{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{4} c_p D_t v + \varepsilon \widehat{D}_n H(v) + H_\Gamma(v) = \widehat{g}_\Gamma + \frac{\varepsilon}{4} \widehat{f}_\Gamma, \quad (x,t) \in \gamma_\varepsilon \times (0,T), \tag{3}$$

$$v|_{t=0} = u^0, \ x \in \Omega_\varepsilon; \ v|_{t=0} = v_\Gamma^0, \ x \in \Gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon; \ v|_{t=0} = \widehat{v}_\Gamma^0, \ x \in \gamma_\varepsilon, \tag{4}$$

которая возникает при гомогенизации задач сложного теплообмена.

Здесь $0 < \varepsilon$ – малый параметр; $\Omega_\varepsilon = (\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2)^2$ - квадрат с границей Γ_ε, $\gamma_\varepsilon = \{A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon\}$ - множество его угловых точек. Кроме того, $D_t = \partial/\partial t$, $D_1 = \partial/\partial x_1$, $D_2 = \partial/\partial x_2$, а D_n, D_s – производные по внешней нормали и касательной к Γ_ε. В угловых точках

$$\widehat{D}_n|_{x=A_\varepsilon} = -\frac{1}{2}(D_1 + D_2)|_{x=A_\varepsilon}, \quad \widehat{D}_n|_{x=B_\varepsilon} = \frac{1}{2}(-D_1 + D_2)|_{x=B_\varepsilon},$$

$$\widehat{D}_n|_{x=C_\varepsilon} = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)|_{x=C_\varepsilon}, \quad \widehat{D}_n|_{x=D_\varepsilon} = \frac{1}{2}(D_1 - D_2)|_{x=D_\varepsilon}.$$

Установлены существование, единственность и регулярность

[1] Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

обобщенного решения задачи (1) – (4). Кроме того, получены равномерные оценки снизу и сверху решения v а также оценки норм производных $D_t v$, $D_1^2 v$, $D_2^2 v$, $D_1 D_2 v$ с квалифицированным порядком относительно ε.

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ[1]

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ)
askhabov@yandex.ru

Рассматривается начальная задача вида

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x h(x-t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x k(x-t)u'(t)\,dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

$$u(0) = f(0) = 0, \quad (2)$$

где ядра $h(x)$, $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} h \in C[0,\infty),\ k \in C^1[0,\infty) \text{ не убывают,} \\ h(0) \geqslant 0,\ k(0) = 0,\ k'(0) > 0, \end{gathered} \quad (3)$$

$$f(x) \in C^1[0,\infty),\ f(x) \text{ не убывает и } f(0) = 0. \quad (4)$$

Решения начальной задачи (1)-(2) разыскиваются в классе:

$$Q_0^1 = \left\{u(x) : u \in C[0,\infty) \cap C^1(0\,\infty),\ u(0) = 0,\ u(x) > 0 \text{ при } x > 0\right\}.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x H(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad (5)$$

где ядро $H(x) = h(x) + k'(x)$ непрерывно, не убывает и $H(0)>0$.

Решения уравнения (5) разыскиваются в классе:

$$Q_0 = \{u(x) : u \in C[0,\infty),\ u(0) = 0,\ u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Если $u \in Q_0$ является решением уравнения (5), то $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$,*

---

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ по проекту: Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи (FEGS-2020-0001)

непрерывно дифференцируема при $x > 0$ и для любого $x \in [0,\infty)$ удовлетворяет неравенствам $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)$, где:

$$F(x) = \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} H(0)\right]^{1/(\alpha-1)} x^{1/(\alpha-1)},$$

$$G(x) = \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_0^x H(t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Если $u \in Q_0^1$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1), то $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (5). Обратно, если уравнение (5) имеет решение $u \in Q_0$, то $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1).*

Введем класс $P_b = \{u(x) : u \in C[0,b]$ и $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\}$, где $b > 0$ любое число. Предположим дополнительно, что

$$C = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{x} < \infty. \tag{6}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия (3), (4) и (6), то начальная задача (1)-(2) имеет в Q_0^1 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение. Это решение можно найти в полном метрическом пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа со сходимостью по метрике:*

$$\rho_b(u_1,u_2) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}\cdot e^{\beta x}}, \quad \text{где } \beta = \frac{1}{H(0)}\cdot \sup_{c\leqslant x\leqslant b} \frac{H(x)-H(0)}{x},$$

а число $c \in (0,b)$ определяется из условия $H(c) < \alpha \cdot H(0)$.

Ранее аналогичные результаты при $h(x) = 0$ были получены в работе [1] в связи с возникновением уравнений вида (5) при описании процессов инфильтрации жидкости через стенки цилиндрического резервуара, распространении ударных волн в трубах, наполненных газом, остывании тел при лучеиспускании, отвечающему закону Стефана-Больцмана, и др. (подробнее см. в [1]).

Литература

1. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части / С.Н. Асхабов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 786–795.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ

Е.А. Бадерко,
С.И. Сахаров (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
ser341516@yandex.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T]$ рассматривается область $\Omega = \{(x,t) \in D: \ g_1(t) < x < g_2(t), \ 0 < t < T\}$ с негладкими боковыми границами $\Sigma_i = \{(x,t) \in \overline{D}: \ x = g_i(t)\}, \ i = 1, 2$. Предполагается, что $g_1(t) < g_2(t), \ |\Delta_t g_i(t)| \leqslant |\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2})$, $t, t + \Delta t \in [0, T]$, где ω_1 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини: $\int\limits_0^z \omega_1(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \ z > 0$. В Ω рассматривается равномерно параболический оператор $Lu = \partial_t u - \sum\limits_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u$, для матричных коэффициентов $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m, \ m > 1$, которого выполнено условие $|\Delta_{x,t} a_{ijl}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x|) + \omega_0(|\Delta t|^{1/2})$ в $\overline{D}$, где ω_0 — модуль непрерывности, удовлетворяющий «дважды» условию Дини: $\int\limits_0^z y^{-1}dy \int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \ z > 0$.

Доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть оператор L и кривые $\Sigma_i, \ i = 1, 2$, удовлетворяют сформулированным условиям. Предположим, что $u_j \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}), \ j = 1, 2, 3,$— классические решения соответствующих задач:*

$Lu_1 = 0$ *в* $\Omega, \ u_1(x, 0) = 0, \ g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \ u_1|_{\Sigma_i} = 0,$

$Lu_2 = 0$ *в* $\Omega, \ u_2(x, 0) = 0, \ g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \ \partial_x u_2|_{\Sigma_i} = 0,$

$Lu_3 = 0$ *в* $\Omega, \ u_3(x, 0) = 0, \ g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \ u_3|_{\Sigma_1} = 0, \ \partial_x u_3|_{\Sigma_2} = 0.$

Тогда $u_j \equiv 0$ *в* $\overline{\Omega}$.

Литература

1. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // ДАН. — 2022, Т. 503, № 2, С. 26–29.

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И В- ЛАПЛАСИАНОМ

О.П. Барабаш (Воронеж, ВГУ)

navyS9@yandex.ru

Рассмотрим задачу (1)-(2), где $n \geqslant 3$, и задан вещественный параметр λ, а также начальное условие u_0.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_B u + \frac{\lambda}{|x|^2}u, \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

Уравнение (1) содержит Δ_B, где В- дифференциальный оператор Бесселя [1]. Более подробно о развитии таких операторов [2].

Первоначально задачу подобного типа рассматривал П.Барас и Ж.Гольдштейн. В [3] было доказано, что для уравнения теплопроводности с потенциалом с начальным условием (2) не существует положительных локальных по времени решений при $\lambda > \frac{(n-2)^2}{4}$. Кроме того, при $0 < \lambda \leqslant \frac{(n-2)^2}{4}$ авторами было найдено необходимое и достаточное условие для u_0, при котором существует неотрицательное решение $u(x,t)$.

Утверждение 1. *Для каждого* $\lambda \leqslant \frac{(n-2+|\gamma|)^2}{4}, x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$, $t > 0$ *уравнение (1) имеет 2 явных решения вида*

$$u_1(x,t) = t^{\sigma - \frac{n}{2}} |x|^{-\sigma} \exp^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \tag{5}$$

$$u_2(x,t) = t^{\frac{n}{2} - \sigma - 2} |x|^{2-n+\sigma} \exp^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \tag{6}$$

где $\sigma = \frac{n-2+|\gamma|}{2} - \sqrt{\frac{(n-2+|\gamma|)^2}{4} - \lambda}$. [4]

С помощью непосредственной подстановки решений (5) и (6) в уравнение (1) можно убедиться в истинности предположения. Найдем решение уравнения (1) в радиальной форме, т.е.

$$u(x,t) = t^{-\alpha} U\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big)$$

После подстановки $u(x,t)$ в (1) получим уравнение для $U = U\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big)$:

$$U^{''}(r) + U^{'}(r)\Big(\frac{n-1+|\gamma|}{r} + \frac{r}{2}\Big) + U(r)\Big(\alpha + \frac{\lambda}{r^2}\Big) = 0, \tag{7}$$

где $\frac{|x|}{\sqrt{t}} = r$. Далее с помощью замены $U(r) = e^{-pr^2}w(r)$ при $p = \frac{1}{8}$ получим:

$$w^{''}(r)+w^{'}(r)\Big(\frac{n-1+|\gamma|}{r}\Big)+w(r)\Big(-\frac{r^2}{16}-\frac{1}{4}(n+|\gamma|)+\alpha+\frac{\lambda}{r^2}\Big)=0 \quad (8)$$

Принимая $w = r^b g$ для некоторого $b \in R$, который будет выбран позже, приходим к уравнению

$$\begin{gathered} r^b g^{''} + g^{'} r^{b-1}(2b+n-1+|\gamma|) + g r^{b-2}(b^2 + b(n-2+|\gamma|)+\lambda)+ \\ +r^b g\Big(\alpha - \frac{1}{4}(n+|\gamma|) - \frac{1}{16}r^2\Big) = 0 \end{gathered} \quad (9)$$

b найдем из квадратного уравнения $b^2 + b(n-2+|\gamma|)+\lambda = 0$. Т.е при $\lambda < \frac{(n-2+|\gamma|)^2}{4}$ получим два корня

$$b_{1,2} = \frac{2-n-|\gamma|}{2} \pm \sqrt{\frac{(n-2+|\gamma|)^2}{4} - \lambda} \quad (10)$$

Выразим (10) через σ, получим

$$b_1 = 2-n+\sigma, b_2 = -\sigma$$

Используя эти b и подстановку $\alpha = \frac{n+b+|\gamma|}{2}$, $g = e^{\frac{r^2}{8}}$, делаем обратные замены и получаем решение (5) для b_1 и решение (6) для b_2.

Литература

1. Киприянов И.А Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 208 с.

2. Ситник С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина // ФИЗМАТЛИТ — 2018. — 264 с.

3. Baras P. The heat equation with a singular potential /P. Baras, J. A. Goldstein // Trans. Am.Math. Soc. — 1984. — C. 121–139.

4. Pilarczyk D. Self-similar asymptotics of solutions to heat equation with inverse square potential // Journal of Evolution Equations. — 2013. — T. 13. — C. 69–87.

ХАРАКТЕРИСТИКА КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ НЕКОТОРОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ФУНКЦИЙ

В.А. Беднаж, Д.С. Ермакова
(Брянск, ФГБОУ ВО «БГУ им. И.Г. Петровского»)
vera.bednazh@mail.ru, ermakova.darya.sergeevna@yandex.ru

В работе используя некоторые ограничения на функцию, конформно отображающую единичный круг на односвязную область комплексной плоскости, получена оценка нулей функции из класса $X_\alpha^\infty(G)$.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций. Рассмотрим класс функций

$$X_\alpha^\infty(D) = \left\{ f \in H(D) : \ln|f(z)| \leqslant \frac{c_f}{(1-|z|)^\alpha} \right\},$$

где c_f — положительная постоянная, зависящая только от f. В работе Ф.А. Шамояна [1] установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция* $f \in X_\alpha^\infty(D), 0 < \alpha < 3,$ *и* $f(z_k) = 0, k = 0, 1, 2, \ldots, z_k \in D,$ *тогда*

$$\left| \frac{f(z)}{\widetilde{B}(z, z_k)} \right| \leqslant c_1 \exp\left(\frac{c_2}{(1-|z|)^\alpha} \right),$$

где $\widetilde{B}(z, z_k)$ *— бесконечное произведение вида*

$$\widetilde{B}(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(z, z_k)) \cdot b_k(z, z_k), \quad z, z_k \in D,$$

c_1, c_2 *— некоторые положительные постоянные.*

Мы обобщаем этот результат на случай произвольной односвязной области комплексной плоскости, используя методы работ [1] и [2]. Обозначим

$$X_\alpha^\infty(G) = \left\{ F \in H(G) : \ln|F(w)| \leqslant \frac{c_F}{(dist(w, \partial G))^\alpha} \right\},$$

где $dist(w, \partial G)$ — расстояние от точки w до границы области ∂G, где c_F — некоторая положительная постоянная зависящая только от F. Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть G — односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки, $\varphi(z)$ — функция, конформно отображающая единичный круг D на область G, ψ — обратная функция для φ. Если функция $F \in X_\alpha^\infty(G), 0 < \alpha < 3$, и $F(w_k) = 0, k = 0, 1, 2, \ldots, w_k \in G$ и справедлива оценка*

$$c_1 \leqslant |\varphi'(z)| \leqslant c_2,$$

тогда $\frac{F(w)}{\widetilde{B}} \in X_\alpha^\infty$, где $\widetilde{B}(w, w_k)$ — бесконечное произведение вида

$$\widetilde{B}(w, w_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(\psi(w), \psi(w_k))) \cdot b_k(\psi(w), \psi(w_k)), \quad w, w_k \in G,$$

c_1, c_2 — некоторые положительные постоянные.

Литература

1. Djrbashian A.E. and Shamoyan F.A. Topics in the theory of A_α^p spaces / A.E. Djrbashian and F.A. Shamoyan — Leipzig. :BSB Teubner, 1998.

2. Беднаж В.А., Ермакова Д.С. Об одном свойстве корневых множеств функций A_α^∞, где $\alpha > -1$, на односвязной области комплексной плоскости, / В.А. Беднаж, Д.С. Ермакова // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов. : Саратовский университет. — 2022. — С. 44–45.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат — М.. : Наука, 1958. — 736 с.

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ТИПА. ЧТО ОБЩЕГО?

Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян
(Москва, ЦЭМИ РАН, НИУ ВШЭ)
lbeklaryan@outlook.com, abeklaryan@hse.ru

Доклад посвящён вопросам качественной теории функционально-дифференциальных уравнений точечного типа (ФДУТТ), основанной на групповом подходе. Важность такого класса уравнений определяется тем, что решения ФДУТТ взаимно однозначно соответствуют решениям типа бегущей волны (солитонным решениям) с заданной характеристикой для каноническим образом индуцированной бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Ключевым свойством такой индуцированной бесконечномерной системы является «почти перестановочность» её правой части с группой операторов сдвига, действующей в фазовом пространстве бесконечных последовательностей. Верно и обратное: решения типа бегущей волны с заданной характеристикой для бесконечномерной системы ОДУ, правая часть которой «почти перестановочна» с группой операторов сдвига, действующей в фазовом пространстве бесконечных последовательностей, взаимно однозначно соответствуют решениям каноническим образом индуцированного ФДУТТ. В частности, конечно-разностные аналоги уравнений математической физики относятся к упомянутому классу бесконечномерных систем ОДУ.

Будут представлены контуры разрабатываемого формализма для описания дуальной пары «оператор-функция», где «оператор» определяет правую часть бесконечномерного ОДУ, а «функция» определяет правую часть соответствующего ФДУТТ. В такой дуальной паре по «оператору» однозначно определяется «функция», но по «функции» оператор определяется не однозначно и среди них существует простейший, который генерирует тоже самое пространство решений типа бегущей волны, что и остальные. Это продемонстрировано на примере гиперболических систем.

В рамках такого подхода реализуется процедура «регулярного расширения» класса ОДУ в классе ФДУТТ, основанная на сохранении теоремы существования и единственности решения начально-краевой задачи, устанавливаются препятствия, в силу которых ФДУТТ не наследуют ряд свойств решений ОДУ. Весьма важно, что такое «расширение» является точным, не улучшаемым.

Важный класс образуют ограниченные и периодические солитонные решения. В соответствии с этим, для ФДУТТ установлены теоремы существования периодических и ограниченных решений нового типа, которые основаны на сравнении асимптотических свойств таких решений с теми же свойствами всего пространства решений и являются новыми даже для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ранее, утверждения такого типа основывались на возможности обеспечения поточечной принадлежности фазовой кривой выделенной области. В предлагаемом подходе поточечные условия на фазовую кривую заменяются на условия в среднем по периоду для периодических решений и среднему по некоторому периоду для ограниченных решений, что расширяет класс уравнений, к которым они применимы. Представлена теорема существования и единственности периодического решения для ФДУТТ, полученная с использованием метода Фурье. Важно, что формулировка условий теоремы не требует обращения к спектральным свойствам (локализации спектра) соответствующего уравнения в вариациях для рассматриваемого ФДУТТ, что относится к категории трудных задач.

Для линейных ФДУТТ, на основе теорем типа теоремы Нётер реализованы «расширения», сохраняющие условие точечной полноты решений. Представлены «расширения», сохраняющие те или иные условия невырожденности, либо сохраняющие аппроксимационные свойства решений максимальной гладкости. Большинство из представленных «расширений» являются не улучшаемыми.

В линейных системах для дуальной пары «оператор-функция» представлена связь между спектральными свойствами бесконечномерной системы ОДУ и соответствующего ФДУТТ. Описана бифуркация ветвления, либо слипания решений.

Для волнового уравнения с квазилинейным потенциалом установлена теорема существования и единственности солитонных решений, приводится описание полного семейства как ограниченных, так и неограниченных таких решений. Это, в свою очередь, позволяет для волнового уравнения с сильно нелинейным потенциалом описать семейство ограниченных солитонных решений.

Литература

1. Френкель Я.И. О теории пластической деформации и двойственности / Я.И. Френкель, Т.А. Конторова // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8. — С. 89–97.

2. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход / Л.А. Бекларян. — М. : Факториал Пресс, 2007. — 286 с.

3. Бекларян Л.А. Вопросы разрешимости линейного однородного функционально-дифференциального уравнения точечного типа / Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 148–159.

4. Бекларян Л.А. Новый подход в вопросе существования периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа / Л.А. Бекларян // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 6. — С. 3–36.

5. Beklaryan L.A. Solutions of Traveling Wave Type for Korteweg-de Vries-Type System with Polynomial Potential / L.A. Beklaryan, A.L. Beklaryan, A.Yu. Gornov // CCIS. — 2019. — V. 974. — P. 291–305.

6. Бекларян Л.А. Функционально-дифференциальные уравнения точечного типа. Бифуркация / Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян // ЖВММФ. — 2020. — Т. 60, № 8. — С. 1291–1303.

7. Бекларян Л.А. Новый подход в вопросе существования ограниченных решений для функционально-дифференциальных уравнений

точечного типа / Л.А. Бекларян // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84, № 2. — С. 3–42.

8. Бекларян Л.А. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с сильно нелинейным потенциалом / Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян // ЖВММФ. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2024–2039.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В ШКАЛЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ-ЛЕБЕГА С ВЕСОМ[1]

А.М. Бирюков (Москва, НИУ МЭИ)
birukovalmix@mail.ru

В данной работе изучается аналитическая задача Коши для общих линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - A(t,z,D)u = h(t,z)$$
$$u(t_0,z) = \varphi(z),$$

в банаховых пространствах аналитических функций с интегральными метриками, имеющих особенности степенного характера при приближении к боковой поверхности конуса

$$V_{\sigma,R} = \{(t,z) : |t-t_0| < R/\sigma, |z-z_0| < R-\sigma|t-t_0|\}, R > 0, \sigma > 0.$$

Получены необходимые и достаточные условия для корректности задачи Коши в рассматриваемой шкале функциональных пространств, тем самым, точно описана структура систем дифференциальных уравнений, для которых эта корректность имеет место. Область определения решения аналитической задачи Коши совпадает с областью определения правой части системы дифференциальных уравнений. Ранее в работе [1] подобные задачи рассматривались в классах аналитических функций с супремум- нормами и были получены критерии корректности в заданной шкале функциональных пространств. Оказывается, что условия, при выполнении которых имеет место корректность задачи Коши в пространствах с супремум-нормами и в пространствах с интегральными метриками, совпадают.

Литература

1. Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной области / Ю.А. Дубинский. — М. : Издательство МЭИ, 1996. — 180 с.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-11-00033).

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГАЗА И УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

С.В. Богомолов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
bogomo@cs.msu.su

Математические модели газовой динамики и её вычислительная индустрия, на наш взгляд, далеки от со-вершенства. Мы посмотрим на эту проблематику с точки зрения ясной вероятностной микро — модели газа из твёрдых сфер, опираясь как на теорию случайных процессов, так и на классическую кинетическую теорию в терминах плотностей функций распределения в фазовом пространстве, а именно, построим сначала систему нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), а затем — обобщённое случайное и неслучайное интегро — дифференциальное уравнение Больцмана с учётом корреляций и флуктуаций. Ключевой особенностью исходной модели является случайный характер интенсивности скачкообразной меры и её зависимость от самого процесса.

Кратко напомним переход ко всё более грубым мезо — макро приближениям в соответствии с умень-шением параметра обезразмеривания, числа Кнудсена. Получим стохастические и неслучайные уравнения, сначала в фазовом пространстве (мезо — модель в терминах СДУ по винеровским мерам и уравнения Колмогорова — Фоккера — Планка), а затем — в координатном пространстве (макро — уравнения, отличающиеся от системы уравнений Навье — Стокса и систем квазигазодинамики). Главным отличием этого вывода является более точное осреднение по скорости благодаря аналитическому решению стохастических дифференциальных уравнений по винеровской мере, в виде которых представлена промежуточная мезо —– модель в фазовом пространстве. Такой подход существенно отличается от традиционного, использующего не сам случайный процесс, а его функцию распределения. Акцент ставится на прозрачности допущений при переходе от одного уровня детализации к другому, а не на численных экспериментах, в которых содержатся дополнительные погрешности аппроксимации.

Теоретическая мощь микроскопического представления макроскопических явлений важна и как идейная опора методов частиц, альтернативных разностным и конечно — элементным.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова — Фоккера — Планка, уравнение Навье — Стокса, уравнения стохастической газодинамики и квазигазодинамики, стохастические дифференциальные уравнения по бернуллиевой и винеровской мерам, методы частиц.

Литература

1.Bogomolov S. V., Zakharova T. V. Boltzmann equation without the molecular chaos hypothesis /S. V. Bogomolov, T. V. Zakharova //Mathematical Models and Computer Simulations. —- 2021. —- Vol. 13, № 5. —- P. 743–755.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

Н.П. Бондаренко

(Саратов, СГУ; Самара, Самарский университет)

bondarenkonp@info.sgu.ru

Доклад посвящен обратной спектральной задаче для следующего функционально-дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией-отражением:

$$-\alpha u''(x) - u''(-x) + p(x)u(x) + q(x)u(-x) = \lambda u(x), \quad x \in (-1,1), \quad (1)$$

где λ — спектральный параметр, $\alpha \in (-1,1) \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, $p, q \in L_1(-1,1)$.

Доказано, что функции $p(x)$ и $q(x)$ однозначно определяются пятью спектрами краевых задач для уравнения (1) со следующими наборами краевых условий, регулярными в смысле [1]:

$$(i)\, u(-1) = u(1) = 0, \quad (ii)\, u'(-1) = u(1) = 0,$$
$$(iii)\, u(-1) = u'(-1) = 0, \quad (iv)\, u(1) = u'(1) = 0,$$
$$(v)\, u(-1) = u'(1) = 0.$$

Метод доказательства основан на сведении уравнения (1) к матричной форме

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda W Y, \quad x \in (0,1), \quad (2)$$

где $Y(x)$ — двухэлементная вектор-функция, $Q(x)$ — матричная функция размера (2×2), $W = \operatorname{diag}\{w_1, w_2\}$ — константная весовая матрица, $w_1 w_2 \ne 0$, $\arg w_1 \ne \arg w_2$. Непрерывность $u(x)$ и $u'(x)$ при $x = 0$ дает краевое условие

$$TY'(1) - T^{\perp}Y(1) = 0, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1] Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/).

Доказательство единственности решения обратной спектральной задачи приведено в [2] и основано на развитии идей метода спектральных отображений [3]. Предложенный подход также может быть применен к функционально-дифференциальным операторам с инволюцией высших порядков.

Заметим, что уравнение с инволюцией вида

$$-u''(x) + p(x)u(x) + q(x)u(-x) = \lambda u(x), \quad x \in (-1, 1), \tag{3}$$

изучавшееся, например, в [4], сводится к матричной форме (2) с единичным весом W. Поэтому к уравнениям вида (3) применимы результаты теории обратных спектральных задач, построенной в [5-6] для матричных операторов Штурма-Лиувилля с самосопряженными краевыми условиями общего вида.

Литература

1. Владыкина В.Е. Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией / В.Е. Владыкина, А.А. Шкаликов // ДАН. — 2019. — Т. 484, № 1. — С. 12–17.

2. Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for functional-differential operators with involution / N.P. Bondarenko // J. Diff. Eqns. — 2022. — Vol. 318. — P. 169–186.

3. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А. Юрко. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 384 с.

4. Polyakov D.M. Formula for regularized trace of a second order differential operator with involution / D.M. Polyakov // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 251, no. 5. — P 169–178.

5. Bondarenko N.P. Direct and inverse problems for the matrix Sturm-Liouville operator with general self-adjoint boundary conditions / N.P. Bondarenko // Math. Notes. — 2021. — Vol. 109, no. 3. — P. 358–378.

6. Bondarenko N.P. Inverse problem solution and spectral data characterization for the matrix Sturm-Liouville operator with singular potential / N.P. Bondarenko // Anal. Math. Phys. — 2021. — Vol. 11. — Article number: 145.

ЯВЛЕНИЕ БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Е.З. Боревич (Санкт-Петербург, СПбГЭТУ)
danitschi@gmail.com

Рассматривается одномерная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках.Функции $E(x)$ и $n(x)$, описывающие соответственно напряженность электрического поля и плотность движущихся электронов, удовлетворяют при $0 < x < 1$ системе уравнений [1]

$$\begin{cases} (D(|v'|)(n' - nv'))' = 0, \\ \qquad -v'' = f - n \end{cases} \tag{1}$$

и граничным условиям

$$v(0) = 0, \quad v(1) = v'(0) = v'(1) = E_0, \quad E_0 > 0. \tag{2}$$

Константа $f > 0$ задает однородную плотность ионизированной примеси, $D(|v'| > 0$ — коэффициент диффузии, зависящий от электрического поля.

При любом значении параметра f задача (1)-(2) имеет тривиальное решение $v(x) = E_0 x, \quad n(x) = f$. Система (1)-(2) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} u = v', \\ D(|u + E_0|)(-u'' + fu + fE_0 + E_0 u' + uu') = j, \\ v(0) = 0, \quad v(1) = v'(0) = v'(1) = E_0, \end{cases} \tag{3}$$

где произвольная константа j задает плотность потока электронов. Предположим, что плотность потока электронов линейно зависит от однородной плотности ионизированной примеси, т.е. $j = fE_0 D(E_0) + c$, c — произвольная константа.

Предположим, что

$$\frac{E_0 D'(E_0)}{D^2(E_0)} - 1 > 0.$$

При сделанных предположениях задача (3) имеет бифуркационные решения при $f = f_k, \quad k \in N$.

Литература

1. Van Roosbroeck, W. Theory of flow of electrons and holes in Germanium and other semiconductors // Bell. Syst. Tech. — 1950. — T 29. — C. 560–607.

О БИФУРКАЦИИ ПОРОГОВ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА В ПРИСУТСТВИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ[1]

Д.И. Борисов (Уфа, ИМВЦ УФИЦ РАН)
borisovdi@yandex.ru

В работе исследуется оператор Шрёдингера на плоскости с потенциалом вида $V_1(x) + V_2(y) + \varepsilon W(x, y)$, где V_2 и W – финитные комплексные потенциалы. Предполагается, что одномерные операторы Шредингера $\mathcal{H}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$ и $\mathcal{H}_2 = -\frac{d^2}{dy^2} + V_2(y)$ обладают следующими свойствами: $\mathcal{H}_1$ имеет два вещественных собственных значения Λ_0, Λ_1, а $\mathcal{H}_2$ имеет виртуальный уровень на краю существенного спектра $\lambda = 0$ и спектральную сингулярность во внутренней точке существенного спектра $\lambda = \mu > 0$. При этом происходит наложение собственных чисел и спектральной сингулярности во внутреннем пороге λ_0 существенного спектра двумерного оператора в смысле равенства $\lambda_0 := \Lambda_0 + \mu = \Lambda_1$. В работе показано, что возмущение потенциалом εW приводит к бифуркации внутреннего порога λ_0 на четыре спектральных объекта, которые являются резонансами и/или собственными значениями. Эти объекты соответствуют полюсам локальных мероморфных продолжений резольвенты, причём наличие спектральной сингулярности у оператора $\mathcal{H}_2$ качественно меняет структуру этих полюсов по сравнению с ранее исследованным случаем, когда спектральная сингулярность отсутствовала. В работе детально исследован данный эффект и описано асимптотическое поведение возникающих полюсов и соответствующих спектральных объектов рассматриваемого оператора Шрёдингера.

Работа выполнена совместно с Д.А. Зезюлиным.

О ПОНЯТИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

А.В. Боровских (Москва, МГУ)
bor.bor@mail.ru

Вопрос о том, что такое «математическая грамотность» обсуждается не первый день. Особую актуальность он приобрел в связи с известными обследованиями TIMSS и PISA. На первый взгляд, следовало бы обратиться к тем определениям, которые связаны с этими измерениями, но оказывается, что эти определения меняются год от года. Тем более, что эти определения являются чисто феноменологическими, то есть описывают «что бывает», но не дают понимания, «как это сформировать».

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).

Поэтому возникает необходимость каким-то образом задать основания именно для педагогического понимания математической грамотности, то есть понимания, обеспечивающего ее формирование в педагогической практике. Следует подчеркнуть, что расплывчатость понимания на самом деле имеет объективный характер (о чем будет ниже), и вычленение оснований для четкого понимания не является очевидным.

На самом деле ответ достаточно простой, но для этого необходимо обратиться к более общему понятию грамотности и его корням. Наиболее важным здесь оказывается сам факт того, что проблема грамотности не является естественной: эта проблема возникла при переходе от идеографического письма к знаковому, и грамотность в общем смысле означает умение пользоваться знаковыми средствами.

Для того, чтобы завершить предварительное обсуждение понятия математической грамотности неким определением, необходимо задать форму этого определения. К сожалению, в педагогике многие определения даются чисто описательно, и даже если сами понятия имеют важное практическое значение, определения оказываются с практической точки зрения абсолютно бесполезны. Поэтому мы очертим кратко саму форму того определения, которое будет даваться. Эта форма включает:

— объемлющее понятие;

— сущность определяемого понятия;

— проявления этой сущности;

— функция, которая этим понятием схватывается;

— морфология (устройство) соответствующего объекта;

— основные характеристики этого объекта, внешние и внутренние.

Математической грамотностью *называется интеллектуальная способность, состоящая во владении математическими знаковыми средствами и проявляющаяся в решении задач с использованием этих средств. Она обеспечивает выстраивание отношения между задачей, сформулированной на общеупотребительном или профессиональном языке и задачей математической. В состав математической грамотности входят:*

— анализ задачи и выделение необходимых данных;

— схематизация основных отношений между этими данными;

— формулировка, с помощью схемы, математической постановки задачи;

— решение математической задачи в рамках той или иной системы операций со знаковыми средствами;

— переход, при необходимости, от одной знаковой системы к другой (например, от алгебраической к графической и обратно);

— формулировка ответа для математической задачи;

— интерпретация ответа и, при необходимости, промежуточных результатов, на схеме;

— формулировка ответа на исходную задачу в терминах этой задачи и оценка соответствия ответа смыслу задачи.

Математическая грамотность характеризуется:

а) набором освоенных знаковых средств и способов их использования;

б) классом решаемых задач.

В докладе будет представлен подробный разбор этого определения, обоснование его функциональности с точки зрения методики, особое внимание будет уделено схеме отношений между данными, являющейся основным посредником между текстом задачи и математическим аппаратом. Будет представлена общая палитра введения математических знаковых средств и способов их использования в начальной школе.

Литература

1. Боровских А.В. О понятии математической грамотности / А.В. Боровских // Педагогика. — 2022. — Т. 86, № 3. — С. 33–45.

ТЕОРЕМА О РАВНОМЕРНОЙ РАВНОСХОДИМОСТИ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ РАЗРЫВНЫМ ОПЕРАТОРАМ ДИРАКА[1]

Л.З. Буксаева (Баку, АГПУ)
leylabuksayeva.80@yahoo.com

Пусть интервал $(0,\, 2\pi)$ точками $\{\xi\}_{i=0}^{m}$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_m = 2\pi$, разбит на интервал $G_l = (\xi_{l-1}\, ,\, \xi_l)\, ,\ l = \overline{1,m}$.

Рассмотрим оператор Дирака

$$Ly \equiv B\frac{dy}{dx} + P\,(x)\,y, \quad x \in G = \bigcup_{l=1}^{m} G_l,$$

где $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{2}\, , b_{ii} = 0, , b_{i,3-i} = (-1)^{i-1}$, $y\,(x) = (y_1\,(x)\, ,\, y_2\,(x))^T$, $P\,(x) = diag\,(p\,(x)\, ,\, q\,(x))$, причем $p\,(x)$ и $q\,(x)$ комплекснозначные суммируемые на $(0,\, 2\pi)$ функции.

Следуя [1-2], будем понимать корневые (т.е. собственные и присоединенные) вектор- функции оператора L,безотносительно к виду краевых условий и условия «сшивания» (см. [3]). Пусть $\{u_k\,(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - произвольная система, составленная из корневых (собственных и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

присоединенных) вектор - функций оператора L, а $\{\lambda_k\}$ - соответствующая ей система собственных значений и выполняются условиям A_p (условия В.А. Ильина):

1) при некотором фиксированном $p \geqslant 1$ система вектор-функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L_p^2\,(0,\,2\pi)$.

2) система собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$удовлетворяет двум неравенствам:

$$|Im\,\lambda_k| \leqslant C_1\,,\quad k=1,2,...\sum_{t\leqslant|\lambda_k|\leqslant t+1} 1 \leqslant C_2,\quad \forall\, t\geqslant 0.$$

Для произвольной $f(x) \in L_p^2\,(0,\,2\,\pi)$ составим частичную сумму порядка n биортогонального разложения по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_n(x,f)=\sum_{k=1}^{n}(f,\upsilon_k)\;u_k(x)\,,\qquad x\in\,G.$$

Для каждого *j=1,2* рассмотрим *j-ю* компоненту частичной суммы

$$\sigma_n^j(x,f)=\sum_{k=1}^{n}(f,\upsilon_k)\;u_k^j(x)\,,\qquad x\in\,G.$$

сравним с модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда Фурье соответствующей *j-й* компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$

$$S_\nu(x,\,f_j)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\,\nu\,(x-y)}{x-y}\,f_j(y)\;dy.$$

порядка $\nu=|\lambda_n|$.

Будем говорить, что *j-я* компонента разложения вектор-функции $f(x)\;\in\;L_p^2\,(0,\,2\,\pi)$ в биортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равносходится равномерно на любом компакте множества $G=\bigcup\limits_{l=1}^{m} G_l$ с разложением соответствующей *j-й* компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, если на любом компакте $K\subset G$

$$\lim_{n\to\infty}\;\left\|\,\sigma_n^j(\cdot\,,f)-S_{|\lambda_n|}\;(\cdot\,,f_j)\,\right\|_{C(K)}=0.$$

Теорема 1. Пусть $P(x)\;\in\;L_1\,(0,\,2\pi)\otimes C^{2\times 2}$ и система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет при фиксированном $p\;\geqslant\;1$ дум условиям A_p. Тогда для того чтобы каждая *j-я (j=1,2)* компонента разложения произвольной вектор-функции $f(x)\;\in\;L_p^2\,(0,\,2\,\pi)$ в биортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равносходилась равномерно на любом компакте $K \subset G$ с разложением в тригонометрический ряд Фурье соответствующей j-й компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$, необходимо, чтобы для любого компакта $K_0 \subset G$ существовала постоянная $C(K_0)$, обеспечивающая справедливость для всех номеров $\boldsymbol{\kappa}$ неравенства

$$\|u_k\|_{L_p^2(K_0)} \|\upsilon_k\|_{L_q^2(0,2\pi)} \leqslant C(K_0),$$

в котором $q = \frac{p}{(q-1)}$ ($q = \infty$ при $p = 1$).

Теорема 2. Пусть $P(x) \equiv 0$ и система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет при фиксированном $p \geqslant 1$ двум условиям A_p. Тогда для того чтобы каждая j-я компонента разложения произвольной вектор-функции $f(x) \in L_p^2(0, 2\pi)$ в биортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равносходилась равномерно на любом компакте $K \subset G$ с разложением в тригонометрический ряд Фурье соответствующей компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K_0 \subset G$ существовала постоянная $C(K_0)$, обеспечивающая справедливость для всех κ неравенства (2).

Литература

1. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I. // Дифференц. Уравнения.1980. –Т.16, -№5,С.771-794.

2. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II. // Дифференц. Уравнения.1980. –Т.16, -№6,С.980-1009.

3. Курбанов В.М., Буксаева Л.З., О неравенстве Рисса и базисности систем корневых вектор – функций разрывного оператора Дирака. // Дифференц. Уравнения.2019. –Т.55, -№8,С.1079-1089.

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

М.В. Булатов, Л.С. Соловарова (Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
mvbul@icc.ru, soleilu@mail.ru

В докладе рассмотрена задача

$$A(t)x^{''}(t) + B(t)x^{'}(t) + C(t)x(t) = f(t),\ t \in [0, 1],$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, x^{'}(t)|_{t=0} = x_0^{'},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 20-51-S52003 МНТ-а).

где $A(t), B(t), C(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n-мерные вектор-функции, соответственно, $x_0, x_0^{'} \in R^n$. Здесь и далее предполагается, что $detA(t) \equiv 0$. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями второго порядка(ДАУ2). В исследованиях на предмет существования единственного решения таких задач большую роль играют матричные полиномы [1].

Для ДАУ2 предложены многошаговые разностные схемы. Проведены анализ устойчивости таких схем и расчеты модельного примера.

Литература

1. Булатов М.В. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка /М.В. Булатов, Минг-Гонг Ли // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 10. —С. 1299–1306.

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИЙ[1]

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)
ebulinsk@yandex.ru

Оптимизация функционирования реальных систем является одной из важных задач прикладной теории вероятностей. Для этого широко используются так называемые модели входа-выхода (см., напр., [1]), описываемые заданием горизонта планирования, процессов на входе и выходе системы, функционала, отражающего структуру системы и способ ее функционирования, множества допустимых управлений и целевой функции, оценивающей качество функционирования системы. Наиболее часто дивиденды, инвестиции и займы рассматриваются как возможные управления. Для моделей теории риска, возникающих в страховании, используются также сострахование и перестрахование. Оказалось, что во многих случаях системы с дискретным временем лучше описывают сущность изучаемых процессов. Поэтому в докладе основное внимание будет уделено именно моделям с дискретным временем, которые могут служить приближением для моделей с непрерывным временем, а также удобны для использования численных методов. Первая из рассматриваемых моделей продолжает исследования, проводившиеся в [2], и посвящена оценке вероятности разорения за конечное (или бесконечное) число шагов при инвестировании на каждом шаге определенной доли имеющегося капитала в безрисковый актив. Вторая изучает, как распределить имеющийся капитал для инвестиций в безрисковый и риско-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00487).

вый активы при различных предположениях об их доходности. Исследуется также устойчивость к малым флуктуациям параметров и распределений этих моделей.

Литература

1. Bulinskaya E.V. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E.V. Bulinskaya. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2017. — V. 208, — P. 349–408.

2. Bulinskaya E.V. Discrete-time model of company capital dynamics with investment of a certain part of surplus in a non-risky asset for a fixed period / E.V. Bulinskaya, B.I. Shigida. // Methodology and Computing in Applied Probability. — 2021. — V.23, — P. 101-123.

МЕТОД А.П. ХРОМОВА РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

М.Ш. Бурлуцкая, Д.В. Белова (Воронеж, ВГУ)
bmsh2001@mail.ru

В [1-2] в смешанных задачах для волнового уравнения, используя резольвентный подход, исследованы вопросы существования классических решений при минимальных требованиях гладкости на начальные данные, и получены обобщенные решения, понимаемые как предел классических решений для случая гладких аппроксимаций начальных функций. Дальнейшее развитие этих идей продолжено в работах А.П. Хромова и связано с привлечением расходящихся рядов [3-4]. Это позволяет не только получать необходимые и достаточные условия существования классических и обобщенных решений в случаях суммируемых потенциалов и начальных функций, тем самым расширяя границы применения метода Фурье, но и дать новую модификацию этого метода. Так, например, в работе [5] для рассматриваемой задачи были получены обобщенное и классическое решение в виде быстросходящегося ряда, не привлекая при этом сложные факты теории функций и анализа. В данной работе применяются новые подходы А.П. Хромова из [4].

1. Рассмотрим сначала следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u'_x(0,t) = u'_x(1,t) \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197, выполняемом в Воронежском госуниверситете)

Формальное решение по методу Фурье есть

$$u(x,t) = (\varphi, 1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} [(\varphi(\xi), \cos 2\pi n\xi) \cos 2\pi nx + \\ + (\varphi(\xi), \sin 2\pi n\xi) \sin 2\pi nx] \cos 2\pi nt, \tag{4}$$

где $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Под классическим решением смешанной задачи (1)–(3) понимается функция $u(x,t)$, непрерывная вместе с производными $u'_x(x,t)$, $u'_t(x,t)$, причем $u'_x(x,t)$ ($u'_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющая условиям (2), (3) и почти всюду по x и t уравнению (1). Необходимые условия для существования классического решения: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

По теореме 1 из [6] если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с условием, что $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ класса Q, то оно единственно и находится по формуле (4), в которой ряд справа при любом фиксированном $t > 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ (здесь и в дальнейшем полагается, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ есть функция класса Q, если $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Ряд (4) имеет смысл для любой $\varphi(x) \in L[0,1]$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Следуя [3-4], тем не менее будем считать, что он является формальным решением задачи (1)–(3), но понимаемой теперь чисто формально и называемой *обобщенной смешанной задачей*. В соответствии с [4] найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти «сумму» расходящегося ряда (4). Помимо аксиом о расходящихся рядах из [7, с. 19], будем пользоваться еще следующим правилом интегрирования расходящегося ряда [4]:

$$\int \sum \overset{def}{=} \sum \int, \tag{5}$$

где $\int$ — определенный интеграл.

Ряд (4) представим в виде $u(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-$, где

$$\Sigma_\pm = \frac{(\varphi,1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(\varphi(\xi), \cos 2\pi n\xi) \cos 2\pi n(x \pm t) + \\ + (\varphi(\xi), \sin 2\pi n\xi) \sin 2\pi n(x \pm t)]\,.$$

Отсюда следует, что для нахождения «суммы» ряда (4) надо найти «сумму» тригонометрического ряда Фурье функции $\varphi(x)$, т. е. ряда

$$(\varphi, 1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} [(\varphi(\xi), \cos 2\pi n\xi) \cos 2\pi nx \\ + (\varphi(\xi), \sin 2\pi n\xi) \sin 2\pi nx]\,. \tag{6}$$

Пусть «сумма» расходящегося ряда (6) при $x \in [0,1]$ есть какая-то функция $g(x) \in L[0,1]$. Тогда в соответствие с правилом (5) и с использованием фактов из ([8, с. 320, теорема 3]) также, как в [3] получим, что при $x \in [0,1]$ $\int\limits_0^x g(\eta)\,d\eta = \int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$. Отсюда $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду, т. е. найдена «сумма» $g(x)$ расходящегося ряда. Тогда получаем, что «сумма» $u(x,t)$ есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)], \tag{7}$$

где $\tilde{\varphi}$ есть 1-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось.

Таким образом, получаем, что решением обобщенной смешанной задачи (1)–(3) является функция $u(x,t)$ класса Q, определенная по формуле (7).

2. Рассмотрим обобщенную смешанную задачу:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty),\\ u(0,t) = u(1,t), \quad u'_x(0,t) = u'_x(1,t)\\ u(x,0) = u'_t(x,0) = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q.

Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right) \int_0^t R^0_\lambda f(\cdot,\tau) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau d\lambda.$$

Использование результатов п.1 приводит его к виду:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta,$$

где $\tilde{f}(\eta,\tau)$ есть 1-периодическое продолжение по η функции $f(\eta,\tau)$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось.

3. Рассмотрим теперь обобщенную смешанную задачу:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty),\\ u(0,t) = u(1,t), \quad u'_x(0,t) = u'_x(1,t),\\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $f(x,t)$ — функция класса Q и $\varphi(x) \in L[0,1]$. Представляя формальное решение по методу Фурье в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$, где $u_0(x,t)$ есть ряд (4), получаем

Теорема 1. *Обобщенная смешанная задача* (10) *имеет решение класса* Q*, определяемое по формуле:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta.$$

4. Наконец, рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \\ u(0,t) = u(1,t), \quad u'_x(0,t) = u'_x(1,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

где $\varphi(x) \in L[0,1]$, $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)u(x,t)$ класса Q.

Тогда из результатов п. 3 получаем, что нахождение решения задачи (11) в классе Q сводится к нахождению в классе Q решения интегрального уравнения

$$u(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)u(\eta,\tau)}\, d\eta, \tag{12}$$

где $\widetilde{q(\eta)u(\eta,\tau)}$ есть 1-периодическое продолжение по η функции $q(\eta)u(\eta,\tau)$ на всю ось.

Интегральное уравнение (12) имеет единственное решение в классе Q, получаемое по методу последовательных подстановок.

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Резольвентный подход для волнового уравнения / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 51–63.

2. Бурлуцкая М.Ш. Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двухточечных граничных условий разных порядков / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 505–515.

3. Хромов А.П., Корнев В.В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Тр. ИММ УрО РАН. — Т.27, № 4. — 2021. — С. 215–238.

4. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Совр. пробл. теор.

функ. и их прил.: матер. 21-й междунар. Саратовской зимн. школы. — Саратов: СГУ, 2022. – С. 319–324.

5. Ломов И.С. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения / И.С. Ломов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — ВИНИТИ РАН, М., 2021. — Т. 199. С. 66–79.

6. Хромов А. П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А.П. Хромов // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 5. — С. 717–731.

7. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.

8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1957. 552 с.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ[1]

Д.В. Валовик, Г.В. Чалышов (Пенза, ПГУ)
dvalovik@mail.ru, 19gordey99@gmail.com

Пусть функции $P(x;\lambda), Q(x;\lambda)$ положительны и непрерывны при $(x,\lambda)\in\bar{\text{x}}\times\Lambda$, а $\bar{\text{x}}=[0,a]$, $1<a<\infty$ и $\Lambda=[b,+\infty)$, b – вещественная постоянная, и ещё P однократно непрерывно дифференцируемой по x при $x\in\bar{\text{x}}$. Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения $\big(P(x,\lambda)y'(x)\big)'+Q(x,\lambda)y(x)=0$, где $x\in\bar{\text{x}}=[0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям

$$\alpha_0(\lambda)y(0;\lambda)-y'(0;\lambda)=0,\quad \alpha_1(\lambda)y(1;\lambda)+y'(1;\lambda)=0,$$

где $\alpha_0(\lambda),\alpha_1(\lambda)\in C(\Lambda)$ – вещественнозначные положительные функции.

Будем предполагать, что справедливы оценки

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\min\limits_{x\in\bar{\text{x}}}P(x,\lambda)}{\max\limits_{x\in\bar{\text{x}}}Q(x,\lambda)}=O(\lambda^{-2c_1}),\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\max\limits_{x\in\bar{\text{x}}}P(x,\lambda)}{\min\limits_{x\in\bar{\text{x}}}Q(x,\lambda)}=O(\lambda^{-2c_2}),$$

где c_1,c_2 – вещественные постоянные, $c_1\geqslant c_2>0$ и без потери общности предполагается, что первые коэффициенты в асимптотике равны 1. Несмотря на тот факт, что такой задачей занимались многие исследователи [1, 2], она по-прежнему представляет интерес. В настоящей работе исследования построены на введении интегральной характеристической функции изучаемой задачи [3].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10015).

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Сформулированная задача Штурма – Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений* $\lambda = \widetilde{\lambda}_n$ *с точкой накопления на бесконечности; при этом для достаточно больших номеров* n *справедливы оценка* $(\pi(n-1))^{\frac{1}{c_1}} - \Delta \leqslant \widetilde{\lambda}_{n-1} \leqslant (\pi n)^{\frac{1}{c_2}} + \Delta$, *где* $\Delta > 0$ *– произвольная постоянная, и, в случае* $c_1 = c_2 = a > 0$, *оценка* $\widetilde{\lambda}_{n-1} = O(n^{\frac{1}{c}})$, *где коэффициент при главном члене асимптотики равен* $\pi^{\frac{1}{c}}$.

Литература

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1 / Дж. Сансоне. — М. :ИЛ, 1953. — 348 с.

2. Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A.A. On the eigenvalue accumulation of Sturm-Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter // Math. Nachr. — 1998. — Vol. 189 — P. 157–170.

3. Валовик Д.В. Об интегральной характеристической функции задачи Штурма-Лиувилля // Матем. сб. — 2020. — Том 211. — № 11 — С. 41–53.

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

А.В. Васильев, В.Б. Васильев,

А.А. Ходырева (Белгород, НИУ «БелГУ»)

vbv57@inbox.ru

Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант на плоскости. Рассматривается следующая краевая задача

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, \quad x \in K, \\ \int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1 = f(x_2), \quad \int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 = g(x_1), \\ \int\limits_K u(x)dx = 0. \end{cases} \tag{1}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi), \xi = (\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

и допускающим волновую факторизацию [1] относительно K с индексом æ, таким, что $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. Однозначная разрешимость задачи (1) в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(K)$ доказана в [2] при условии $f, g \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}_+)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Пусть $\mathbb{Z}^2$ – целочисленная решетка на плоскости. Обозначим $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Введем пространство функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$,. Следуя [3], определяются дискретные пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^2)$ и Соболева–Слободецкого $H^s(K_d)$ и дискретный псевдодифференциальный оператор A_d.

Далее мы исследуем разрешимость дискретной краевой задачи в пространстве $H^s(K_d)$

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in K_d, \\ \sum\limits_{\tilde{x}_1 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h = f_d(\tilde{x}_2), \quad \sum\limits_{\tilde{x}_2 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h = g_d(\tilde{x}_1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sum\limits_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h^2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

и даем сравнение решений задач (1) и (2).

Специальный подбор дискретных функций f_d, g_d и элементов периодической волновой факторизации приводит к следующему результату.

Теорема. *Пусть $f, g \in S(\mathbb{R})$, $æ > 1$. Тогда дискретная краевая задача (2) однозначно разрешима и справедлива следующая оценка для решений u и u_d континуальной задачи (1) и ее дискретного аналога (2)*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leqslant C(f, g)h^\beta,$$

где постоянная $C(f, g)$ зависит от функций f, g, $\beta > 0$ может быть произвольным.

Литература

1. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / В.Б. Васильев — М. : КомКнига, 2010. —135 с.

2. Vasil'ev V.B. On some new boundary value problems in nonsmooth domains / V.B. Vasil'ev // J. Math. Sci. — 2011. — V. 173, No 2. – P. 225–230.

3. Vasilyev A.V. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space / A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev // Math. Model. Anal. — 2018. — V.23, No 3. — P. 492–506

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ[1]

А.В. Васильев, В.Б. Васильев,
Н.В. Эберлейн (Белгород, НИУ «БелГУ»)
vbv57@inbox.ru

В пространстве Соболева–Слободецкого H^s [1] рассматривается следующая задача: найти функцию

$$U(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in C_+^a \\ u_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a} \end{cases}$$

такую, что $u_+ \in H^s(C_+^a), v_- \in H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} (Au_+)(x) = 0, & x \in C_+^a, \\ (Au_-)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \end{cases} \tag{1}$$

где $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > a|x_1|, \ a > 0\}, \Gamma = \partial C_+^a$, A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$,

$$c_1 \leqslant |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2.$$

К уравнениям (1) мы добавляем следующие граничные условия:

$$\theta \cdot u_+{}_{|\partial C_+^a} + \omega \cdot u_-{}_{|\partial C_+^a} = \mu, \ \ \eta \cdot \left(\frac{\partial u_+}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} + \gamma \cdot \left(\frac{\partial u_-}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} = \nu, \tag{2}$$

где $\theta, \omega, \eta, \gamma$ – комплексные числа, принимающие различные значения на сторонах угла ∂C_+^a, $\mu \in H^{s-1/2}(\Gamma), \nu \in H^{s-3/2}(\Gamma)$– заданные на Γ функции..

Подобная задача рассматривалась в [2] при дополнительных предположениях относительно символа $A(\xi)$ и была сведена к некоторой системе одномерных интегральных уравнений. Предполагалось, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_+^a [1]

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с индексом æ таким, что $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$.

Полученная система линейных интегральных уравнений в случае $æ = \alpha/2$ и предположения однородности степени $\alpha/2$ элементов волновой факторизации допускает дальнейшую редукцию к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей $\mathcal{A}(\lambda)$. Элементы

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

матрицы $\mathcal{A}(\lambda)$ строятся по элементам волновой факторизации и преобразования Меллина. Необходимым и достаточным для существования единственного решения задачи (1),(2) является условие

$$inf|\det\mathcal{A}(\lambda)| > 0, \quad \Re\lambda = 1/2. \tag{3}$$

Теорема. *При выполнении условия (3) имеет место оценка*

$$||U||_s \leqslant \ const(||\mu||_{s-1/2} + ||\nu||_{s-3/2}).$$

Литература

1. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / В.Б. Васильев — М. : КомКнига, 2010. —135 с.

2. Vasilyev V.,B. On some transmission problems in a plane corner - V.B. Vasilyev // Tatra Mt. Math. Publ. — 2015. — V. 63. —P. 291–301.

К ИЗУЧЕНИЮ ИНДЕКСА ДЕФЕКТА НЕСАМОСОПРЯЖЁННЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.Ю. Ватолкин (Ижевск, ИжГТУ им. М.Т. Калашникова)
vmyu6886@gmail.com

Теория индекса дефекта симметрического линейного оператора, действующего в гильбертовом пространстве достаточно хорошо разработана многими известными математиками: Г. Вейлем, В. Виндау, Д. Ю. Шином, И. М. Глазманом, В. Н. Эверитом, М. А. Наймарком и др. (подробнее см. [1]). Здесь рассматривается более общая ситуация.

Пусть X, вообще говоря, — комплексное рефлексивное банахово пространство, т.е. $X^{**} = X$. Пусть $Y \doteq X^{*}$. Теория индекса дефекта построена для линейного оператора $A : X \to Y$ с плотной в X областью определения $\mathfrak{D}_A$ (см. [2]). Рассмотрены операторы (см. [2]), порождённые квазидифференциальными выражениями, и исследован индекс дефекта (см. [2]) квазидифференциального оператора произвольного порядка, действующего из $\mathbb{L}_q(0,\infty)$ в $\mathbb{L}_p(0,\infty)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < +\infty$). Пусть $U : X \to Y$ линейный оператор (оператор умножения на функцию $Ux \doteq u(t)x$) (см. [2]) и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Операторы $A - \lambda U$ и $A - \bar{\lambda} U$ определены на $\mathfrak{D}_A$. Обозначим соответственно области их значений в пространстве Y через $\mathfrak{R}_\lambda$ и

$\mathfrak{R}_{\bar\lambda}$. Соответствующие ортогональные дополнения $^{\perp}\mathfrak{R}_\lambda$ и $^{\perp}\mathfrak{R}_{\bar\lambda}$ будем называть *дефектными подпространствами* оператора A и обозначать их соответственно через $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Если при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ существует нетривиальное решение уравнения $Ax = \lambda Ux$, то будем говорить, что λ является *собственным значением* оператора A *относительно оператора* U, а соответствующее ему решение x будем называть *собственным элементом* оператора A, отвечающим собственному значению λ. Если комплексное число $\bar\lambda\,(\lambda)$ *является собственным значением оператора* A^*, *сопряжённого оператору* A, *то* $\mathfrak{N}_\lambda\,(\mathfrak{N}_{\bar\lambda})$ *есть собственное подпространство оператора* A^*, *отвечающее этому собственному значению.* Положим $m = dim\,\mathfrak{N}_i$, $n = dim\,\mathfrak{N}_{-i}$. Пару чисел (m, n) назовём *индексом дефекта* оператора $A : X \to Y$ (вообще говоря, несимметрического), а сами числа m и n назовём его *дефектными числами.* В настоящих тезисах приведены три новые теоремы, являющиеся продолжением исследований, начатых автором ранее, в работе [2].

Теорема 1. *Пусть неотрицательные функции* $\dfrac{u(t)}{p_{nn}(t)\cdot p_{00}(t)}$ *и* $\sqrt[n]{\dfrac{u(t)}{p_{nn}(t)\cdot p_{00}(t)}}$ *имеют суммируемые на* $[0,+\infty)$ *производные, и существует предел* $\lim\limits_{t\to+\infty}(u(t)/(p_{nn}(t)\cdot p_{00}(t))) > 0$. *Пусть, далее, функции* $\dfrac{p_{\nu k}(t)}{p_{\nu\nu}(t)}$ $(\nu \in 1:n,\ k \in 0:\nu-1)$, $\sqrt[n]{\dfrac{u(t)}{p_{nn}(t)\cdot p_{00}(t)}}$ *суммируемы на* $[0,+\infty)$, *и пусть* $\frac{1}{p_{\nu\nu}(t)} = g_\nu(t) + a_\nu$ $(\nu \in 1:n-1)$, *где функции* $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_{n-1}(t)$ *суммируемы на* $[0,+\infty)$, *а числа* $a_\nu \neq 0$ $(\nu \in 1:n-1)$. *Пусть, кроме того, невещественное число* λ *таково, что все корни n-й степени из него, т.е. числа* μ_k $(k \in 1:n)$, *имеют различные действительные части, а вещественное число* d *таково, что превосходит значения всех модулей этих действительных частей. Тогда уравнение* $(\,^{n}_{\mathcal{P}}x)(t) = \lambda ux$, $Im\,\lambda \neq 0$, *(см. [2]) имеет* n *линейно независимых решений* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, *таких, что при* $t \to +\infty$, *имеют место следующие асимптотические равенства:* $\,^{0}_{\mathcal{P}}x_k(t) = e^{(\mu_k-d)\xi(t)}\,[1+o(1)]$,

$$\,^{1}_{\mathcal{P}}x_k(t) = ((\mu_k-d)\rho(t)/a_1)\cdot e^{(\mu_k-d)\xi(t)}\,[1+o(1)],\quad \cdots\quad,$$

$$\,^{n-1}_{\mathcal{P}}x_k(t) = \left((\mu_k-d)^{n-1}\rho^{n-1}(t)\Big/\prod_{\nu=1}^{n-1}a_\nu\right)\cdot e^{(\mu_k-d)\xi(t)}\,[1+o(1)]\,, \text{ где}$$

$$\rho(t) \doteq \sqrt[n]{u(t)\prod_{\nu=1}^{n-1}a_\nu\Big/(p_{nn}(t)\cdot p_{00}(t))},$$

$$\xi(t) \doteq \int\limits_{t_0}^{t} \rho(s)ds \ \ (k \in 1:n,\, t_0 \in [0+,\infty)).$$

Теорема 2. *Пусть функции* $\left(\dfrac{1}{p_{\nu\nu}(t)}\right)'$ $(\nu \in 1:n-1)$,

$$\sqrt[n]{\frac{u(t)}{p_{nn}(t)\cdot p_{00}(t)}}, \quad \left(\frac{u(t)}{p_{nn}(t)\cdot p_{00}(t)}\right)', \quad \left(\sqrt[n]{\frac{u(t)}{p_{nn}(t)\cdot p_{00}(t)}}\right)',$$

$\dfrac{p_{\nu k}(t)}{p_{\nu\nu}(t)}$ $(\nu \in 1:n,\ k \in 0:\nu-1)$ *суммируемы на* $[0,+\infty)$ *и существует предел* $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{u(t)}{p_{00}(t)}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{p_{\nu\nu}(t)}\right) > 0$. *Пусть, кроме того, невещественное число* λ *таково, что все корни* n*-й степени из него, т.е. числа* μ_k $(k \in 1:n)$, *имеют различные действительные части, а вещественное число* d *таково, что превосходит значения всех модулей этих действительных частей. Тогда уравнение* $\left({}_{\mathcal{P}}^{n}x\right)(t) = \lambda u x$, $Im\,\lambda \neq 0$, *(см. [2]) имеет* n *линейно независимых решений* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, *таких, что при* $t \to +\infty$, *имеют место следующие асимптотические равенства:*

$${}_{\mathcal{P}}^{0}x_k(t) = e^{(\mu_k-d)\xi(t)}\left[1+o(1)\right],$$

$${}_{\mathcal{P}}^{1}x_k(t) = p_{11}(t)(\mu_k-d)\rho(t)\cdot e^{(\mu_k-d)\xi(t)}\left[1+o(1)\right],$$

$${}_{\mathcal{P}}^{2}x_k(t) = p_{11}(t)p_{22}(t)\left((\mu_k-d)\rho(t)\right)^2\cdot e^{(\mu_k-d)\xi(t)}\left[1+o(1)\right],$$

$$\ldots$$

$${}_{\mathcal{P}}^{n-1}x_k(t) = \prod_{\nu=1}^{n-1}p_{\nu\nu}(t)(\mu_k-d)^{n-1}\rho^{n-1}(t)\cdot e^{(\mu_k-d)\xi(t)}\left[1+o(1)\right], \text{ \textit{где}}$$

$$\rho(t) \doteq \sqrt[n]{\frac{u(t)}{p_{00}(t)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1}{p_{\nu\nu}(t)}},$$

$$\xi(t) \doteq \int\limits_{t_0}^{t} \rho(s)ds \ \ (k \in 1:n,\ t_0 \in [0,+\infty)).$$

Применением теорем 1 и 2 является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $p \leqslant q$, *функция* $1/p_{00}(t)$ *ограничена в существенном на интервале* $[0,+\infty)$ *и, кроме того, выполнены все условия теоремы 1 или теоремы 2, тогда индекс дефекта оператора* L_β^+ *(определение квазидифференциального оператора* L_β^+ *см. в работе [2]) есть* (n,n).

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

2. Ватолкин М.Ю. К исследованию индекса дефекта операторов, порождённых несамосопряжёнными квазидифференциальными выражениями / М.Ю. Ватолкин // Известия института математики и информатики УдГУ. — 1997. № 3(11). — С. 51–80.

ПОСТРОЧНО-БЛОЧНАЯ ПАРАЛЛЕЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА СБОРКИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.С. Великань (Казань, КФУ)

velickan.vladislav@yandex.ru

Сформулируем двумерную линейную эллиптическую краевую задачу в прямоугольной области $\Omega = (a,\, b) \times (c,\, d)$ с граничным условием первого рода на всей границе.

$$-\nabla \cdot (K(x)\nabla u(x)) + q(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = g_D(x). \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1,\, x_2) \in \Omega$, $K \in C^1(\Omega), \exists\, k_0, k_1 > 0 : k_0 < K(x) < k_1\ \forall x \in \Omega$. Функция q непрерывна в области Ω и является положительной, $f \in L^2(\Omega)$, $g_D \in L^2(\partial\Omega)$.

Решение задачи (1) — (2) аппроксимируется кусочно разрывными функциями [1], которые принадлежат пространству P_1 на каждом конечном элементе. За счет выбора глобальных базисных функций, поиск приближенного решения задачи (1) — (2) сводится к решению СЛАУ с блочной пятидиагональной матрицей

$$Ax = b. \tag{3}$$

В данной работе было рассмотрено несколько алгоритмов параллелизации сборки матрицы СЛАУ (3).

- **Наивный алгоритм** заключается в параллелизации классического алгоритма сборки матрицы A, используя обход по конечным элементам и ребрам. Такой подход вынуждает к применению критических секций из-за потенциально возможных конфликтов.

- **Алгоритм colouring** [2] использует перенумерацию внутренних ребер разбиения области Ω (закрашивание их тремя цветами) таким образом, чтобы никакие два ребра одного цвета не принадлежали одному элементу. Обход внутренних ребер по цветам защищает от конфликтов при сборке элементов матрицы A, расположенных на главной диагонали. Однако данный алгоритм требует барьерной синхронизации после обхода ребер каждого из трех цветов.

- **Алгоритм построчно-блочной параллелизации**, предложенный в данной работе, за счет хранения массива ребер для каждого элемента позволяет частично совместить обходы по элементам и ребрам в одной параллельной области, что делает невозможными конфликты при сборке главной диагонали матрицы A. При этом алгоритм требует меньше точек барьерной синхронизации по сравнению с colouring, что может ускорить работу.

Результаты сравнения времени работы трех паралльных алгоритмов сборки СЛАУ (3) представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты численных экспериментов

Число элементов	Время работы, с		
	Naive	Colouring	Row-partition
10^2	$7 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
10^3	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$
10^4	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$
10^5	0.170	0.168	0.159
10^6	5.012	2.000	1.767

Литература

1. B. Riviere Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations, Theory and Implementation. Frontiers in Applied Mathematics. / B. Riviere. — Philadelphia : SIAM, 2008. — 174 p.

2. Y. Sato Parallelization of an unstructured Navier–Stokes solver using a multicolor ordering method for OpenMP / Y. Sato, T. Hino, K. Ohashi // Computers & Fluids. — 2013. — Vol. 88. — Pp. 496–509.

КРИТЕРИЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ю.П. Вирченко (Белгород, БГТУ, БелГУ)
virch@bsu.edu.ru

Рассматриваются произвольная система квазилинейных уравнений первого порядка

$$\dot{u}_a(\boldsymbol{x},t) = \sum_{b=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_k^{(a,b)}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u_b(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_k} + H_a(\mathsf{u},\boldsymbol{x},t)\,, \quad a = 1 \div n\,. \quad (1)$$

для непрерывно дифференцируемых функций $u_a(\boldsymbol{x},t)$, $a = 1 \div n$, заданных на $\mathbb{R}^m$.

Определение. *Система называется гиперболической, если $n \times n$-матрица $\mathsf{T}(\boldsymbol{q})$ с матричными элементами*

$$T_{a,\,b}(\boldsymbol{q}) = \sum_{k=1}^{m} q_k\, A_k^{(a,b)}(\boldsymbol{x},t)$$

диагонализуема и имеет только вещественные собственные числа $\omega^{(l)}$, $l = 1 \div n$ для любого набора $\boldsymbol{q} = \langle q_s; s = 1 \div m\rangle \in \mathbb{R}^m$, времени $t \in \mathbb{R}$ и любых значений наборов $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$.

Матрицы $\mathsf{T}(\boldsymbol{q})$, обладающие свойством, указанным в определении названы *гиперболическими.* Доказывается утверждение

Теорема 1. *Для того чтобы вещественная $n \times n$-матрица B была диагонализуема и все ее собственные числа $\langle \mu_1, ..., \mu_n\rangle$ были вещественны необходимо и достаточно, чтобы существовала такая симметричная положительная $n \times n$-матрица D, для которой матрица DB симметрична. При этом набор собственных чисел матрицы B совпадает с набором собственных чисел матрицы DB.*

Эта теорема сводит установление гиперболичности системы (1) к изучению представимости матрицы $\mathsf{T}(\boldsymbol{q}) = \mathsf{DB}$, $\mathsf{D}^{\mathrm{T}} = \mathsf{D}$, $\mathsf{D} > 0$, $\mathsf{B}^{\mathrm{T}} = \mathsf{B}$. Определение возможности такого представления проводится на основе эквивалентного матричного уравнения

$$[\mathsf{T}_+, \mathsf{D}] = \{\mathsf{T}_-, \mathsf{D}\}\,, \quad (2)$$

где $\mathsf{T}_+ = (\mathsf{T}(\boldsymbol{q}) + \mathsf{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}))/2$, $\mathsf{T}_- = (\mathsf{T}(\boldsymbol{q}) - \mathsf{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}))/2$, $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор пары матриц, а $\{\cdot,\cdot\}$ — их антикоммутатор. Анализ этого уравнения приводит к следующим результатам.

Теорема 2. *Если $[\mathsf{T}_+, \mathsf{T}_-] = 0$, то симметричное решение уравнения (2) относительно матрицы D не существует.*

Наоборот, доказано справедливость утверждения, которое существенно упрощает установление гиперболичности матрицы T и, тем самым, гиперболичности системы квазилинейных уравнений так, что оно решает полностью вопрос о гиперболичности матрицы $\mathsf{T}(\boldsymbol{q})$ при условии достаточной малости по матричной норме матрицы T_-.

Теорема 3. *Пусть* $\{\lambda_l \ : \ l = 1 \div n\}$ *— набор собственных чисел матрицы* T_+*, попарно неравных друг другу. Пусть, далее,* $\delta = \min\{|\lambda_j - \lambda_k| \ : \ j \neq k; j, k = 1 \div n\}$*. Тогда существует при* $\delta > 2n\varepsilon\|\mathsf{T}_-\| > 0$ *симметричная положительная матрица* D*, удовлетворяющая уравнению*

$$[\mathsf{T}_+, \mathsf{D}] = \varepsilon\{\mathsf{T}_-, \mathsf{D}\}\,.$$

В общем случае исследование наличия симметричного положительного решения D уравнения (2) сводится к изучению множества $\mathfrak{T}_-$ матриц в пространстве всех антисимметричных $n \times n$-матриц, каждый элемент которого обеспечивает разрешимость задачи. Это множество обладает свойствами

Теорема 4. *Множество* $\mathfrak{T}(\mathsf{T}_-)$ *является:*

а) центрально-симметричным относительно нулевой матрицы;

б) размерность $\dim\mathfrak{T}_-$ *не превосходит числа нулевых матричных элементов* $(T_+)_{a,b}$ *при* $a > b$*;*

в) множество $\mathfrak{T}_-$ *компактно* $\|\mathsf{T}_-\| \leqslant \|\mathsf{T}_+\|$*;*

г) множество $\mathfrak{T}_-$ *связно.*

Литература

1. Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics / B.L. Rozhdestvenskii. — AMS: Translations of Mathematical Monographs, V.55, 1983. — 688 p.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕНЕРАТОРОВ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ[1]

В.В. Власов, Н.А. Раутиан

(Москва, МГУ, МЦФПМ)

vikmont@yandex.ru, nrautian@mail.ru

Исследование посвящено спектральному анализу линейных несамосопряженных операторов в гильбертовых пространствах, являющихся генераторами полугрупп, порождаемых вольтерровы-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

ми интегро-дифференциальными уравнениями с операторными коэффициентами. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости, теории распространения тепла в средах с память и имеющие ряд других важных приложений. Для генераторов полугрупп установлены результаты о полноте и базисности Рисса системы корневых векторов в подпространстве, соответствующем невещественной части их спектра. На основе спектрального анализа генераторов полугрупп получены представления решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, порождающих указанные полугруппы операторов (см. [1]–[4]). Полученные результаты могут быть использованы для изучения поведения и получения оценок решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

Литература

1. Власов В.В., Раутиан Н.А. О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 4. —С. 536–551.

2. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ и разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. —2021. —Т. 496. — С. 16–20.

3. Власов В.В., Раутиан Н.А. Исследование интегродифференциальных уравнений методами спектральной теории / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Современная математика. Фундаментальные направления. —2021. —Т. 67, № 2. —С. 255–284.

4. Раутиан Н. А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями /Власов В.В., Раутиан Н.А. // Дифференциальные уравнения. —2020. —Т. 56, № 9. — С. 1226–1244.

О ЗАДАЧЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.А. Власова, Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГУ)
zolotoonline@yandex.ru, stenyuhin@mail.ru

Возьмём $u(x), x \in D \subset R^2$. Также пусть $u(x, y)$ двумерная минимальная поверхность в конформных координатах, определенная на области D. Пусть $\Gamma \subset D$ некоторая кривая в области D. Образ кривой Γ при отображении $u(x,y)$ назовем свободной ганицей на минимальной поверхности.

$$\begin{cases} \int\limits_D (|\bigtriangledown u|^2 + 2uf)dx \longrightarrow min, \\ u|_{\partial D} = g(s), \end{cases} \tag{1}$$

где $u \in W_2^4(D)$, f-внешняя сила.

На свободной границе существуют вторые соболевские производные. Но в точках границы множества налегания они, вообще говоря, разрывны. Рассмотрим вопрос оптимальной регулярности решения для задачи со свободной границей, т. е будем доказывать, что вторые соболевские производные ограничены

$$D^2 u \in L_{\infty,loc}(D).$$

L_∞ строится из пространства измеримых функций, ограниченных почти всюду, отождествлением между собой функций, различающихся лишь на множестве меры нуль; банахово пространство.

Теорема 1. *Существует константа c такая, что u-решение задачи со свободной границей, допускает оценку*

$$u(x) \leqslant cd^2(x), \tag{2}$$

где $c = c(n, \sup\limits_D u, dist\{x, \partial D\})$.

Доказательство: Возьмем произвольную точку на свободной границе рассмотрим произвольный шар B_{2R} с центром в точке 0. В этом шаре выполняется $\triangle u = f\chi_{\{u>0\}}$,где

$$\chi_{\{u>0\}} = \begin{cases} 1, x \in D, \\ 0, x \notin D. \end{cases} \text{ -индикаторная функция.}$$

Доказать квадратичную оценку из условия теоремы все равно, что показать
$$\begin{cases} u \geqslant 0, \\ \sup\limits_{B_R} u \leqslant cR^2, c = c(n, M), M = \|f\|_{L_\infty}. \end{cases}$$

Разбиваем $u = u_1 + u_2$, где u_1 и u_2 решения следующих задач

$$\begin{cases} \triangle u_1 = f\chi_{\{u \geqslant 0\}} \text{ в } B_{2R}, \\ u_1|_{\partial B_{2R}} = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle u_2 = 0 \text{ в } B_{2R}, \\ u_2|_{\partial B_{2R}} = u. \end{cases}$$

$u > 0 \Rightarrow u_2 > 0$. А для гармонической нотрицательной функции выполняется неравенство Гарнака: $\sup\limits_{B_R} u_2 \leqslant c(n) \inf\limits_{B_R} u_2 \leqslant c(n)\ u_2(0)$.

Оценим $u_2(0) = -u_1(0)$, так как в нуле $u_1 + u_2 = 0$. Нужно оценить $\sup\limits_{B_{2R}} |u_1|$. Рассмотрим впомогательную функцию «шапочка»: $w(x) = \frac{M}{2n}(4R^2 - |x|^2)$.

Вычислим оператор Лапласа для $w(x)$:

$\triangle w(x) = -M$, так как $\triangle u|x|^2 = 2n$,

$| \triangle (\pm u_1)| \leqslant M,\ \triangle(w \pm u_1) \leqslant 0$, по принципу максимума

$w \pm u_1 \geqslant 0$ в $B_{2R} \Rightarrow |u_1(x)| \leqslant w(x)$,

$u_1(x) \leqslant \frac{2M}{n}R^2 \Leftrightarrow u(x) \leqslant \frac{4M}{n}R^2$.

Получили квадратичную оценку и показали, что вторые производные на любой компактной части всей большой области могут быть оценены неравенством (2).

Теорема 2. (невырожденность) *Для любого* $x_0 \in \overline{\Omega(u)}$, *где* $\Omega(u) := \{u >\ 0\}$, *для любого шара* $B_r(x) \subset D$ *выполнена оценка*

$$\sup_{B_R(x_0)} u \geqslant \frac{r^2 c_0}{2n} + u(x_0). \tag{3}$$

Доказательство: Пусть $x_0 \in \Omega(u)$, т. е $u(x_0) > 0$. Проведём доказательство, предполагая противное

$$\sup_{B_R(x_0)} u < \frac{r^2 c_0}{2n} + u(x_0),$$

Рассмотрим функцию $v(x) := u(x) - u(x_0) - \frac{|x-x_0|^2 c_0}{2n}$ в шаре $B_R(x_0)$, $\triangle v = \triangle u - c_0 = f - c_0 \geqslant 0$ в $\Omega(u) \cap B_R(x_0)$. В дополнении к $\Omega(u) \cap B_R(x_0)$ неотрицательноти не будет. v-субгармоническая функция в $\Omega(u) \cap B_R(x_0)$, $v(x_0) = 0$. Субгармоническая функция не может иметь внутри максимум, поэтому максимум будт достигаться на границе этого множества.

$$\sup_{\partial\{\Omega \cap B_R(x_0)\}} v > 0,$$

$$v|_{\partial B_r(x_0)} < 0.$$

Получаем противоречие. В любой точке любого шара области Ω выполняется невырожденность вплоть до границы.

Следствие. Для двумерных миимальный поверхностей оценка (3) имеет вид:

$$\sup_{B_R(x_0)} u \geqslant \frac{r^2 c_0}{4} + u(x_0).$$

Литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 760 с.

2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н.

Уральцева — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 576 с.

3. Стенюхин, Л.В. О минимальных поверхностях с ограничениями типа неравенств / Л.В. Стенюхин // Известия вузов. Математика. – 2012. – № 11. – С. 51–59.

ТЕОРЕМА О ПОКОМПОНЕНТНОЙ РАВНОМЕРНОЙ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ТИПА ДИРАКА $2m$-ГО ПОРЯДКА[1]

Г.Р. Гаджиева, В.М. Курбанов (Баку, АГПУ)
gunel-haciyeva-88@mail.ru

Рассмотрим оператора типа Дирака

$$D\psi = B\frac{d\psi}{dx} + P\ (x)\ \ \psi, x \in G = (0,\pi)\,,$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$ или $B = \begin{pmatrix} 0 & J_m \\ -J_m & 0 \end{pmatrix}$, I_m-единичный оператор в E^m, $J_m = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^m$, $\alpha_{k,\ m-k+1} = 1$, $k = \overline{1,m}$; $\alpha_{ij} = 0$ при $(i,j) \neq (k, m-k+1)$, $k = \overline{1,m}$; $P\,(x) = diag\ (p_1\,(x)\,,\ p_2\,(x)\,,...,p_{2m}\,(x))$; $\psi = \left(\psi^1,\ \psi^2,...,\psi^{2m}\right)^T$; $p_l\,(x)$, $l = \overline{1,2m}$ -действительнозначные функции из $L_p\,(0,\pi)$, $p > 2$.

Пусть $L_p^{2m}\,(0,\pi)$ пространство $2m$-компонентных вектор-функций $f\,(x) = (f_1\,(x)\,,\ f_2\,(x)\,,...,f_{2m}\,(x))^T$с нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{p,2m} = \left\{\int_G \left(\sum_{j=1}^{2m} |f_j\,(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $p = \infty$ норма вектор-функции $f\,(x)$ определяется равенством $\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,2m} = \sup\limits_{x\in\overline{G}} vrai\ |f\,(x)|$. При $f\,(x) \in L_2^{2m}\,(G)$ и $g\,(x) \in L_2^{2m}\,(G)$ существует скалярное произведение $(f,g) = \int_G \sum_{j=1}^{2m} f_j\,(x)\ \overline{g_j\,(x)}\ dx$.

Под собственной вектор-функцией оператора D, отвечающей собственному значению λ, будем понимать любую тождественно не равную нулю $2m$-компонентную вектор-функцию $\psi\,(x)$, которая абсолютно непрерывна на $\overline{G}$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D\psi = \lambda\psi$ (см.[1]).

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полная ортонормированная в $L_2^{2m}(G)$ система, состоящая из собственных вектор-функций оператора D, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k \in R$, соответствующая система собственных значений.

Введем для произвольной $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ частичную сумму её спектрального разложения по системе $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\nu(x,f) = \left(\sigma_\nu^1(x,f),\, \sigma_\nu^2(x,f), ..., \sigma_\nu^{2m}(x,f)\right)^T,$$

где

$$\sigma_\nu^j(x,f) =$$

$$= \sum_{|\lambda_k| \leqslant \nu} (f,\psi_k)\ \psi_k^j(x), \psi_k(x) = \left(\psi_k^1(x),\, \psi_k^2(x), ..., \psi_k^{2m}(x)\right)^T,$$

$$f(x) = (f_1(x),\, f_2(x),\, ...,\, f_{2m}(x))^T.$$

Наряду с частичной суммой $\sigma_\nu(x,f)$ определим вектор $S_\nu(x,f) = (S_\nu(x,f_1),\ S_\nu(x,f_2), ..., S_\nu(x,f_{2m}))^T$, где $S_\nu(x,f_j)$, $j = \overline{1,2m}$, модифицированная частичная сумма тригонометрического ряда функции $f_j(x)$, т.е.

$$S_\nu(x,f_j) = \frac{1}{\pi}\int_G \frac{\sin\nu\ (x-y)}{x-y}\ f_j(y)\ dy, \nu > 0.$$

В работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функции $p_l(x)$, $l = \overline{1,\, 2m}$, принадлежат классу $L_p(G)$, $p > 2$. Тогда для произвольной вектор-функции $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ на любом компакте $K \subset G$ справедливо равенство

$$\lim_{\nu\to+\infty} \left\|\sigma_\nu^j(\cdot,f) - S_\nu(\cdot,f_j)\right\|_{C(K)} = 0, j = \overline{1,\, 2m},$$

т.е. j-я компонента разложения вектор-функции $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ в ортогональный ряд по системе $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно равносходится на любом компакте $K \subset G$ с разложением в тригонометрический ряд Фурье соответствующей j-й компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$.

Теорема 2. При выполнении условия теоремы 1 для ортогонального разложения произвольной функции $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ по системе $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ справедлив покомпонентный принцип локализации: сходимость или расходимость j-й компоненты указанного разложения в точке $x_0 \in G$ зависит от поведения в малой окрестности этой точки x_0 только соответствующей j-й компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$ (и не зависит от поведений других компонентов).

Отметим что при $m = 1$ эти результаты следуют из работы [2].

Литература

1. Ильин В.А. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // Дифференциал. уравнения, 1991, т.27, №11, с.1862-1878.

2. Курбанов В.М., Исмайлова А.Н. Покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака с тригонометрическим разложениям // Дифференциал. уравнения, 2012, т.48, №5, с.648-662.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ К НЕКОТОРЫМ КЛАССАМ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова (Воронеж, ВГПУ, ВГТУ)

g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

Пусть $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ — гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей со стандартным базисом $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$, нормой и скалярным произведением. В l_2 рассматриваются два разностных оператора $A_i : D(A_i) \subset l_2 \to l_2$, заданные своими бесконечными матрицами $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, в l_2:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & a(-2)+2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a(-1)+2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a(0)+2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a(1)+2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a(2)+2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & a(-2) & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & a(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a(0)+2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(1) & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & a(2) & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

с областями определения $D(A_1) = \{x \in l_2 : \sum |a(i)x(i)|^2 < \infty\}$, $D(A_2) = \{x \in l_2 : \sum |a(-i)x(i)|^2 < \infty\}$. Таким образом, оператор A_1 определяется формулой $(A_1x)(n) = -x(n-1) + (a(n)+2)x(n) -$

$x(n+1), n \in \mathbb{Z}$. Оператор A_2, соответственно, задается формулой $(A_2x)(n) = -x(n-1) + a(n)x(-n) + 2x(n) - x(n+1), n \in \mathbb{Z}$, где $a(0) = 0$.

Отметим, что оценки спектральных характеристик оператора A_1 при различных условиях на растущую последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ приведены в работах [1–3]. При этом исследование проводилось методом подобных операторов. Для исследования спектральных свойств оператора A_2 также применяется метод подобных операторов. При этом показаны отличия его применения для оператора A_2. В качестве примера приведем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ сбалансирована, т. е. выполнены условия*

$$c_1|a(-n)| \leqslant |a(n)| \leqslant c_2|a(-n)|, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$
$$\lim_{n\to\infty} |a(n)| \to \infty, \qquad \gamma_i = \mathrm{dist}_{j\neq i}\,(\sigma_i, \sigma_j) \to \infty$$

при $|i| \to \infty$, где $\sigma_i = \{-2 \pm \sqrt{a(i)a(-i)}\} = \{\lambda_i^{\pm}\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Тогда собственные значения $\widetilde{\lambda}_i^{\pm}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, оператора A_2 допускают оценки

$$|\widetilde{\lambda}_i^{\pm} - \lambda_i^{\pm}| \leqslant c_3\gamma_i^{-1}, \qquad c_3 > 0.$$

Литература

1. Гаркавенко Г.В. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 4. — С. 395–402.

2. Гаркавенко Г.В. Метод подобных операторов и спектральные свойства разностного оператора с четным потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова, А.Р. Зголич // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2016. — № 20(241). — С. 42–45.

3. Гаркавенко Г.В. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Сиб. электрон. матем. изв. — 2017. — Т. 14. — С. 673–689.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ПРИ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ЦЕНТРАЛЬНО СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ ЯДРА

Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева, В.И. Герасимова (Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)
losh-elena@yandex.ru

В сообщении на основе уравнения Дирака [1] рассмотрена задача о движении частицы в центрально симметричном поле при заданной зависимости потенциальной функции $V(r)$ от расстояния r от центра симметрии. Использован аппарат обобщенных степеней (ОС) Берса [2,3]. Система уравнений для движения частицы в центрально симметричном поле согласно [1] имеет вид

$$\begin{array}{c} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1-x}{r} f + (\varepsilon - m - V) g = 0, \\ \frac{dg(r)}{dr} + \frac{1+x}{r} g - (\varepsilon + m - V) f = 0. \end{array} \tag{1}$$

После введения вспомогательных функций φ_1, φ_2, согласно соотношениям

$$\varphi_1 = r^{1-x} f, \quad \varphi_2 = r^{1+x} g, \tag{2}$$

система (1) примет вид

$$\left. \begin{array}{c} r^{2x} \frac{d\varphi_1}{dr} + b_1 \varphi_2 = 0 \\ r^{-2x} \frac{d\varphi_2}{dr} - b_2 \varphi_1 = 0 \end{array} \right\} \tag{3}$$

при

$$b_1 = \varepsilon - m - V(r), \quad b_2 = \varepsilon + m - V(r).$$

Укажем, что r радиальная координата сферической системы координат, $V(r)$ - потенциальная функция, m - масса электрона, ε - энергия частицы, x - фактор учитывает общий момент частицы. Система (3) допускает применение метода ОС. В общем случае для произвольного $V(r)$ построение степеней $X^{(n)}(r, r_0)$ сложно, но выполнимо. Поэтому далее аппроксимируем $V(r)$ кусочно постоянной функцией. Обозначим функции $b_1(r), b_2(r)$ в этом случае через λ_1, λ_2, приняв

$$\lambda_1 = -b_1, \quad \lambda_2 = -b_2. \tag{4}$$

Тогда система (3) примет вид

$$\left. \begin{array}{c} r^{2x} \frac{d\varphi_1}{dr} = \lambda_1 \varphi_2 \\ r^{-2x} \frac{d\varphi_2}{dr} = -\lambda_2 \varphi_1 \end{array} \right\}. \tag{5}$$

Система (5) определяет пару функций φ_1, φ_2 , известную в литературе [2] как обобщенные осесимметричные потенциалы.

Решение граничной задачи

$$\varphi_1|_{r_0} = c_1, \quad \varphi_2|_{r_0} = c_2$$

представим в форме

$$\varphi_1 = c_1 \cos \lambda X\,(r, r_0) + c_2 \sqrt{\tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}} \sin \lambda X\,(r, r_0)\,,$$
$$\varphi_2 = c_1 \sqrt{\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}} \sin \lambda X\,(r, r_0) + c_2 \cos \lambda X\,(r, r_0)\,,$$

где $\lambda = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$.

Константы c_1, c_2 определяют значение φ_1, φ_2 в точке $r = r_0$. Применяя матричный способ согласования решений, можно построить решение, аппроксимируя функции $V\,(r)$ кусочно постоянной функцией. Проведено решение этим методом задачи для потенциальной ямы

$$V = \begin{cases} -V_0, r < r_0 \\ 0, r > r_0 \end{cases}$$

при $x = \pm 1$.

Это решение для определения возможных значений в целом совпадает с решением, приведенным в [1]. Отличие связано с тем, что в [1] принято условие нулевой производной на стенке ямы, а в нашем случае исчезновения f, g в бесконечности. На наш взгляд это более соответствует физической сущности задачи и совпадает с обычно принимаемым в квантовой постановке задачи.

Литература

1. Ахиезер В.Б. Квантовая электродинамика / В.Б. Ахиезер. — М. : ИФМЛ, 1959. — 428 с.

2. Гладышев Ю.А. Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике / Ю.А. Гладышев. — Калуга. : Издательство КГПУ им. К.Э. Циолковского, 1997. — 253 с.

3. Гладышев Ю.А. О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса / Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева // Вестник Калужского университета. — 2020. — № 2(47). — С. 77–80.

О СКОРОСТИ РАВНОМЕРНОЙ РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ИЗ КЛАССА $f(x) \in W_p^1(G)$, $p \geqslant 1$, ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ[1]

Х.Р. Годжаева, В.М. Курбанов (Баку, АГПУ)
mehdizade.xedice@gmail.com,q.vali@yahoo.com

Рассмотрим на интервале $G = (0, 1)$ формальный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(2m)} + P_2(x)u^{(2m-2)} + P_3(x)u^{(2m-3)} + ... + P_{2m}(x)u$$

с вещественными коэффициентами $P_l(x) \in L_1(G)$ $l = \overline{2, 2m}$.

Обозначим через $D_{2m}(G)$ класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своим производными до $(2m-1)$-го порядка включительно на отрезке $\overline{G} = [0, 1]$.

Под собственной функцией оператора L, отвечающей собственному значению λ будем понимать любую тождественно не равную нулю функцию $y(x) \in D_{2m}(G)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $L\,y + \lambda\,y = 0$ (см. [1]).

Пусть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$−полная ортонормированная в $L_2(G)$ система, состоящая из собственных функций оператора L, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующая система собственных значений, причем $(-1)^{m+1}\lambda_k \geqslant 0$.

Введем частичную сумму ортогонального разложения функции $f(x) \in W_1^1(G)$ по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\nu(x, f) = \sum_{\mu_k \leqslant \nu} f_k u_k(x), \nu > 2,$$

где $\mu_k = \left((-1)^{m+1}\lambda_k\right)^{1/2}$ $f_k = (f, u_k) = \int_0^1 f(x)\,\overline{u_k(x)}\,dx$.

Обозначим $\Delta_v(x, f) = \sigma_\nu(x, f) - S_\nu(x, f)$ где $S_\nu(x, f)$ $\nu > 0$ частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$.

Пусть K — некоторый компакт, принадлежащий интервалу G.

Если $\max\limits_{x \in K} |\Delta_v(x, f)| \to 0$ при $v \to +\infty$ то будем говорить, что разложения функции $f(x)$ в ортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на компакте $K \subset G$.

В этой работе доказаны следующие теоремы.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x) \in W_p^1(G)$, $p > 1$, *и система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условию*

$$\left| f(x)\, \overline{u_k^{(2m-1)}(x)}\, \Big|_0^1 \right| \leqslant C_1(f)\, \mu_k^{\alpha} \|u_k\|_{\infty}\ 0 \leqslant \alpha < 2m-1,\ \mu_k \geqslant 1. \quad (1)$$

Тогда разложение функции $f(x)$ *в ортогональный ряд по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на любом компакте* $K \subset G$ *и справедлива оценка*

$$\max_{x \in K} |\Delta_{\nu}(x, f)| = O(v^{\beta - 1})\ v \to +\infty \quad (2)$$

где $\beta = 0$, *если система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *равномерно ограничена;* $\beta = \frac{1}{2}$, *если система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *не является равномерно ограниченной.*

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in W_1^1(G)$ *и выполняются условия (1) и*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \omega_1\left(f' n^{-1}\right) < \infty. \quad (3)$$

Тогда разложения функции $f(x)$ *в ортогональный ряд по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на любом компакте* $K \subset G$ *и справедлива оценка (2).*

Литература

1.Ильин, В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // Дифференциальные уравнения, - Москва: - 1980. т.16, №5, - с. 771-794.

2.Курбанов, В.М., Годжаева, Х.Р. О сходимости спектрального разложения по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка // Дифференциальные уравнения, -Москва: -2019. т. 55, №1, -с. 10-24.

УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГРЕССИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В УСЛОВИЯХ НЕСИММЕТРИЧНОСТИ ВЫБРОСОВ В ДАННЫХ[1]

О.А. Голованов, А.Н. Тырсин (Екатеринбург, ФГАОУ ВО «УрФУ»)
leonardomin.golovanov@ya.ru

В условиях стохастической неоднородности данных, особенно при анализе временных рядов, необходимо использовать устойчивые алгоритмы регрессионного анализа. В [1] предложен подход к реализации метода наименьших модулей (МНМ) на основе спуска по узловым прямым. Однако МНМ не рассчитан на анализ временных рядов при наличии аномальных наблюдений. Для таких данных была предложена его модификация – обобщенный метод наименьших модулей, оценивающий коэффициенты многомерных линейных регрессионных моделей как решение задачи вида [2]

$$Q(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} \rho(|y_i - a_0 - \sum_{j=1}^{m} a_j x_{ij}|). \qquad (1)$$

где $\rho(\cdot)$ — некоторая монотонно возрастающая, всюду дважды непрерывно-дифференцируемая на положительной полуоси функция, причем $\rho(0) = 0$ и $\forall x > 0$ $\rho'(x) > 0$, $\rho''(x) < 0$. Недостатком известных алгоритмов решения задачи (1) является низкое быстродействие, что не затрудняет их применение для динамического моделирования быстроменяющихся процессов.

Алгоритм решения задачи (1) заключается в последовательном спуске из случайно выбранной узловой точки u по узловым прямым $l(k_1, ..., k_{m-1})$ к точному решению. Где узловая точка и прямая являются пересечениями m и $(m-1)$ гиперплоскостей $\Omega_i = \Omega(\mathbf{a},\mathbf{x}_i, y_i)$ вида $y_i - \langle \mathbf{a},\mathbf{x}_i \rangle = 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$ соответственно.

Однако, стоить отметить, что даже в статическом моделировании процесса все еще необходимо вычислять значение целевой функции в каждой узловой точке на прилежащих узловых прямых при поиске точки минимума для каждой итерации. Способом уменьшения вычислительной сложности в этом случае может послужить использование производных по направлению. Каждая производная при этом

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-41-660008).

будет равна сумме n слагаемых по числу наблюдений

$$\frac{\delta Q(u^{(*)})}{\delta\vec{l}(k_1,...,k_{m-1})} = \sum_{i=1}^{n}(l_1 + x_{i2}l_2 + ... + x_{im}l_m)\cdot$$
$$\cdot sign((\sum_{j=1}^{m} u_j^{(*)}x_{ij}) - y_i) \qquad (2)$$

где $\vec{l}(k_1,...,k_{m-1}) = (l_1,l_2,...,l_m)$ является направляющим вектором узловой прямой $l(k_1,...,k_{m-1})$. Наименьшее значение на узловой прямой целевая функция (1) будет принимать в точке, где знак производной по направлению слева $\left.\frac{\delta Q}{\delta\vec{l}(k_1,...,k_{m-1})}\right|_{u_-^{(1)}}$ и $\left.\frac{\delta Q}{\delta\vec{l}(k_1,...,k_{m-1})}\right|_{u_+^{(1)}}$ справа от узловой точки будет или меняться с отрицательного на положительный, или будет равен нулю.

Динамическая же реализация в данном случае будет исходить из того факта, что на каждом последующем шаге алгоритма после первого будет добавляться только одно новое наблюдение. Соответственно, путем сохранения решения статического анализа и проведения «уточнения» решения на последующих итерациях, учитывая, что новое искомое решение будет находится в некоторой окрестности около уже найденной узловой точки в силу выпуклости целевой функции МНМ, можно добиться существенного уменьшения вычислительной сложности решения. В докладе описан предложенный алгоритм и приведены результаты апробации на модельных и реальных данных.

Литература

1. Тырсин А.Н., Азарян А.А. Точное оценивание линейных регрессионных моделей методом наименьших модулей на основе спуска по узловым прямым / Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». — 2018. — Т. 10. № 2. — С. 47–56.

2. Тырсин А.Н. Робастное построение регрессионных зависимостей на основе обобщенного метода наименьших модулей / Записки научных семинаров ПОМИ. — 2005. — Т. 328. — С. 236–250.

КВАЗИБЕЗМОНОДРОМНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

А.А. Голубков (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
andrej2501@yandex.ru

Для стандартного уравнения Штурма–Лиувилля на комплексной плоскости, равносильного системе уравнений первого порядка

$$y_1'(z) = y_2,\ y_2'(z) = \left(\lambda^2 - q(z)\right) y_1(z), \qquad (1)$$

впервые исследован вопрос существования *квазибезмонодромных потенциалов,* т.е. потенциалов с такими особыми точками (включая точки ветвления), для которых некоторая степень матрицы монодромии M не зависит от спектрального параметра и равна $\pm I$, где I — единичная матрица. Этот вопрос возникает, в частности, при исследовании асимптотик решений уравнений Штурма–Лиувилля вдоль кривых на комплексной плоскости, а также краевых и обратных спектральных задач для этих уравнений. До сих пор изучались только безмонодромные ($M \equiv I$) однозначные потенциалы [1].

Пусть Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в $\mathbf{C}, \Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек, т.е. существует «кольцеобразная» область $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$, причём потенциал $q(z)$ в системе уравнений (1) аналитичен в K и имеет порядок ветвления $N-1$. Обозначим через $Y_0(z, \lambda, z_0)$ фундаментальную матрицу пространства голоморфных решений (1) в односвязной окрестности точки $z_0 \in K$ при некотором значении спектрального параметра λ, а через $Y_1(z, \lambda, z_0)$ — аналитическое продолжение Y_0 вдоль некоторой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset K$ с началом и концом в точке z_0, которая N раз обходит область Ω_1 в положительном направлении. Поскольку функция q имеет порядок ветвления $N-1$, то матрицы Y_0 и Y_1 являются в окрестности точки z_0 фундаментальными для одной и той же системы уравнений (1), и значит, существует постоянная невырожденная *матрица монодромии M области* Ω_1 такая, что $Y_1(z, \lambda, z_0) = Y_0(z, \lambda, z_0)M(\lambda, Y_0)$. Пусть теперь $Y_n(z, \lambda, z_0)$ — аналитическое продолжение Y_0 вдоль некоторой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset K$ с началом и концом в точке z_0, которая обходит область Ω_1 nN раз ($n > 0$, если обход происходит в положительном направлении, и $n < 0$, если — в отрицательном). Тогда $Y_n(z, \lambda, z_0) = Y_0(z, \lambda, z_0)M^n(\lambda, Y_0)$. Заметим, что матрица M, в силу аналитичности потенциала q в области K, не зависит от формы кривой γ, но зависит от выбора фундаментальной матрицы Y_0. При этом все матрицы монодромии области Ω_1 подобны друг другу, и, следовательно, имеют одинаковый след.

Определение. Потенциал q и уравнение Штурма–Лиувилля, эквивалентное системе уравнений (1), будем называть *квазибезмонодромным* в «кольцеобразной» области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$, если существует такое натуральное число $n \geqslant 1$, что $M^n(\lambda) \equiv \pm I$, где M — некоторая матрица монодромии области Ω_1. Минимальное значение степени n, при котором это тождество выполнено, будем называть модулем *показателя безмонодромности* потенциала и уравнения. При этом показатель безмонодромности будем считать положительным, если $M^n(\lambda) \equiv I$, и отрицательным, если $M^n(\lambda) \equiv -I$.

Заметим, что в соответствии с приведенным определением показатель безмонодромности безмонодромного потенциала равен единице. В докладе доказана следующая теорема.

Теорема. *Система* (1) *и потенциал* q *являются квазибезмонодромными в «кольцеобразной» области* $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$, *если и только если некоторая матрица монодромии* M *области* Ω_1 *или её след* m *удовлетворяют одному из следующих условий:* 1) $M \equiv \pm I$; 2) $m = 2\cos\left(\dfrac{\pi k}{n}\right)$, $n \geqslant 2$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *причём* k *и* n *— взаимно простые числа. В первых двух случаях показатель безмонодромности равен соответственно* ± 1, *а в последнем:* $(-1)^k n$.

Из теоремы следует, что не существует квазибезмонодромных потенциалов с положительным четным показателем безмонодромности. В докладе описаны классы безмонодромных потенциалов, в том числе неоднозначных с конечным порядком ветвления, со всеми остальными значениями показателя безмонодромности, и показано, что новые квазибезмонодромные потенциалы можно находить с помощью преобразования Дарбу. Обсуждена также тесная связь квазибезмонодромных особых точек системы (1) с безмонодромными особыми точками уравнения Штурма–Лиувилля с переменным весом, которые совпадают с нулями весового коэффициента.

Литература

1. Ишкин Х.К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма—Лиувилля / Х.К. Ишкин // Мат. заметки. — 2013. — Т. 94, № 4. — С. 552–568.

НАЧАЛЬНО–КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДЗЕКЦЕРА С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВЕНТЦЕЛЯ

Н.С. Гончаров (Челябинск, ЮУрГУ)
Goncharov.NS.krm@yandex.ru

Для ограниченной связной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T \in \mathbb{R}_+$, рассматривается линейное уравнение Дзекцера

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \alpha_0 \Delta u(x,t) - \beta_0 \Delta^2 u(x,t) - \\ -\gamma u(x,t) + f(x,t), \ (x,t) \in Q_T. \qquad (1)$$

моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [1], решения которого должны удовлетворять краевым условиям Вентцеля

$$\Delta u(x,t) + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta_1 u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \qquad (2)$$

и Робена

$$\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta_2 u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

а также либо начальному условию Шоуолтера — Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} (\lambda - \Delta)(u(x,t) - u_0(x)) = 0,\ x \in \Omega, \tag{4}$$

или начальному условию Коши

$$\lim_{t\to 0+} (u(x,t) - u_0(x)) = 0,\ x \in \Omega. \tag{5}$$

Здесь параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, α_k, β_k, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $k = 0, 1$, характеризуют среду; функция $f(x,t)$ — источники жидкости, а $\nu = \nu(x)$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

В указанной работе авторами с учетом использования методов теории вырожденных голоморфных полугрупп строятся точные решения для линейного уравнения Дзекцера с краевыми условиями Вентцеля и Робена. В частности, для подходящих пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, при выполненном условии на коэффициенты

$$\left.\begin{array}{c} (\alpha_0,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \text{ и } \beta_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ т.ч. ни одно собственное значение} \\ \lambda_k \in \sigma(\Delta) \text{ не является корнем уравнения } \beta_0\xi^2 - \alpha_0\xi + \gamma = 0. \end{array}\right\} \tag{*}$$

доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$ и выполнено условие (*). Тогда*

(i) для любых $f \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{F}^1)$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи Шоуолтера–Сидорова (1), (2), (3), (4);

(ii) *для любых $f \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{F}^1)$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ такого, что*

$$\sum_{\lambda_k=\lambda} \langle u_0, \varphi_k\rangle\varphi_k = \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle f(0), \varphi_k\rangle\varphi_k}{\alpha_0\lambda - \beta_0\lambda^2 - \gamma},$$

существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи Коши–Вентцеля (1), (2), (3), (5);

(iii) *решение $u = u(t)$ обеих задач имеет вид*

$$u(t) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \exp(t\mu_k)\langle u_0, \varphi_k\rangle\varphi_k + \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle f(t), \varphi_k\rangle\varphi_k}{\alpha_0\lambda - \beta_0\lambda^2 - \gamma} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}{\sum_{k=1}^{\infty}}' (\lambda - \lambda_k)^{-1} \int_0^t ds \int_\Gamma \frac{\exp(\mu(t-s))\langle f(s), \varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu - \mu_k} d\mu\ ,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$.

Литература

1. Дзекцер Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // Докл. АН СССР — 1972. — Т. 202, № 5. — С. 1031–1033.

2. Denk R. The Bi-Laplacian with Wentzell boundary conditions on Lipschitz domains / R. Denk, M. Kunze, D. Ploss // Integr. Equ. Oper. Theory — 2021. — Т. 93, № 2. — 26 с.

О КОНТРПРИМЕРАХ К ГИПОТЕЗЕ ЗИГЕЛЯ[1]

В.А. Горелов (Москва, НИУ «МЭИ»)

gorelov.va@mail.ru

Метод Зигеля-Шидловского (см.[1],[2]) является одним из основных методов в теории трансцендентных чисел. С его помощью доказывается трансцендентность и алгебраическая независимость значений т.н. E-функций — подкласса целых функций 1-го порядка, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$. В частности, E-функциями являются гипергеометрические E-функции ${}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^{q-l})$, где

$$ {}_l\varphi_q(\vec{\nu};\vec{\lambda};z) = {}_{l+1}F_q\left(\begin{array}{c} 1,\nu_1,\ldots,\nu_l \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_q \end{array}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)_n\ldots(\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n\ldots(\lambda_q)_n}z^n, $$

$0 \leqslant l < q,\ (\nu)_0 = 1,\ (\nu)_n = \nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1),\ \vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_l) \in \mathbb{Q}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}^-)^q,\ \alpha \in \mathbb{A}$.

В статье [1] К. Зигель доказал,что всякий многочлен с алгебраическими коэффициентами от z и конечного числа гипергеометрических E-функций, а также функций, получающихся из них заменой z на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$, является E-функцией, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$. В той же статье [1, §2] К. Зигель сформулировал гипотезу, что справедливо и обратное утверждение.

В статьях автора [3], [4], [5] гипотеза Зигеля была доказана для E-функций, удовлетворяющих линейным однородным дифференциальным уравнениям не выше 2-го порядка, а в некоторых случаях — неоднородным уравнениям 2-го порядка.

[1] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № FSWS - 2020-0022).

В 2005 г. автор [6] доказал ослабленный вариант гипотезы Зигеля для всех линейных дифференциальных уравнений не выше 2-го порядка, в том числе неоднородных. В той же статье было высказано предположение, что в общем случае гипотеза Зигеля неверна. В качестве опровергающего примера предлагалось рассмотреть E-функцию

$$V(z) = e^{\alpha z} \int_0^z e^{-\alpha t} \varphi_\lambda(t) dt = z + \left(\frac{1}{\lambda + 1} + \alpha \right) \frac{z^2}{2} + \dots, \qquad (1)$$

удовлетворяющую уравнению

$$y'' + (-\alpha - 1 + \lambda/z)y' + (\alpha - \lambda\alpha/z)y = \lambda/z,$$

где

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\dots(\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots.$$

Недавно Ж. Фрезан и П. Жоссен [7], опираясь на работы И. Андрэ, Н. Каца, Т. Ривоаля, С. Фишлера и других математиков, доказали, что E-функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{[2n/3]} \frac{(1/4)_{n-m}}{(2n-3m)!(2m)!} \right) z^n \qquad (2)$$

не выражается через гипергеометрические E-функции. Рассуждения статьи [7] могут быть применены и к функции(1). Таким образом, функция (1) также является контрпримером к гипотезе Зигеля, более естественным, чем (2).

Литература

1. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen / C.L. Siegel // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys. – Math. Kl. — 1929–1930. — № 1. — P. 1–70.

2. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа / А.Б. Шидловский. — М. : Наука, 1987. — 448 с.

3. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений E-функций в особых точках и гипотезе Зигеля / В.А. Горелов //Матем. заметки. – 2000. — Т. 67, вып. 2. — С. 174—190.

4. Горелов В.А. О гипотезе Зигеля для случая линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка / В.А. Горелов //Матем. заметки. – 2004. — Т. 75, вып. 4. — С. 549—565.

5. Горелов В.А. О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка / В.А. Горелов //Матем. заметки. – 2005. — Т. 78, вып. 3. — С. 331-–348.

6. Горелов В.А. Об ослабленной гипотезе Зигеля / В.А. Горелов //Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. — Т. 11, вып. 6. — С. 33—39.

7. Fresan J. A non-hypergeometric E-function / J. Fresan, P. Jossen //Ann. of Math. – 2021. — V. 194(3). — P. 903–942.

О СТРУКТУРЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

Е.И. Григорьева (Воронеж, ВГУ)
elenabiryukova2010@yandex.ru

При исследовании вопросов сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов существенным является требование регулярности краевых условий. Для описания операторов, действующих в пространстве вектор-функций, удобным является задание таких операторов на геометрических графах. В работе рассматривается простейший геометрический граф из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю.

Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0,1]$, зададим интегральный оператор на графе Γ, как оператор в пространстве вектор-функций:

$$y(x) = Af(x) = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $A(x,t)$ — некоторая матрица.

Ставится задача: среди всевозможных интегральных операторов выделить класс таких, которые, во-первых, учитывают структуру графа, что необходимо влечет условие $y_1(0) = y_1(1) = y_2(0)$ на область значения оператора, и во-вторых, имеют ядра, имеющие разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$ (представляя собой в некотором смысле «канонические» операторы [1, стр. 381-382], которые важны, например, в исследовании равносходимости спектральных разложений с тригонометрическим рядом). Добиться нужных условий удается за счет возмущения одномерным оператором (см. также [2]).

Теорема 1. *Пусть* $\widetilde{A}_1(x,t)$, $\widetilde{B}_1(x,t)$, $\widetilde{B}_2(x,t)$ *— произвольные функции, непрерывно дифференцируемые по первой и непрерывные по второй компоненте соответственно при* $t \neq x$ *и* $t \neq 1-x$, *причем* $\widetilde{A}_1(x,x)\equiv 1$, $\widetilde{B}_k(x,x)\equiv 1$. *Тогда область значений интегрального оператора* (1) *с ядром*

$$A(x,t)=\begin{pmatrix} A_1(x,t) & 0 \\ \frac{g_2(x)}{g_2(0)}A_1(0,t) & A_2(x,t)\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $A_1(x,t)=\varepsilon(x,t)\widetilde{A}_1(x,t)+g_1(x)\nu(t)$,
$A_2(x,t)=\alpha_1\varepsilon(x,t)\widetilde{B}_1(x,t)+\alpha_2\varepsilon(1-x,t)\widetilde{B}_2(1-x,t)-\alpha_2\frac{g_2(x)}{g_2(0)}\widetilde{B}_2(1,t)$;
$\varepsilon(x,t)=1$, *если* $x\geqslant t$, $\varepsilon(x,t)=0$, *если* $x\leqslant t$;
$g_1(x),g_2(x)\in C^1[0,1]$ $g_1(0)\neq g_1(1)$, $g_2(0)\neq 0$, $\nu(t)=\frac{\widetilde{A}_1(1,t)}{g_1(0)-g_1(1)}$, α_k — *комплексные числа*, $\alpha_2\neq 0$, *удовлетворяет соотношениям*

$$y_1(0)=y_1(1)=y_2(0). \tag{2}$$

Литература

1. Khromov, A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators // A. P. Khromov / Mat. Sb. — 1981. — V. 114(156), № 3 — P. 378–405.

2. Бурлуцкая, М. Ш. Теорема равносходимости для интегрального оператора на простейшем графе с циклом / М. Ш. Бурлуцкая // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Т. 8, вып. 4. — С. 8–13.

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Г.Э. Гришанина, Э.М. Мухамадиев
(Дубна, Государственный университет «Дубна», Вологда, ВоГУ)
anora66@mail.ru, emuhamadiev@rambler.ru

Уравнение Пуассона [1-4] является одним из наиболее важных уравнений в математической физике и в общей теории уравнений с частными производными, оно встречается в различных областях математического анализа и является простейшим представителем класса эллиптических уравнений. В докладе исследуются вопросы, связанные с гладкостью решения уравнения Пуассона $\Delta u=f(x,y)$ в ограниченной области $G\subset R^2$ при предположении существования определенных частных производных у правой части $f(x,y)$.

Напомним, что классическим решением уравнения Пуассона в области G называют функцию $u(x,y)$ из класса $C^2(G)$ такую, что $\Delta u=f(x,y)$ в любой точке области G. Следовательно, для существования классического решения в области G необходима непрерывность функции $f(x,y)$ в этой области. В то же время существуют непрерывные функции $f(x,y)$, для которых уравнение Пуассона не имеет классического решения. В работе [5] были получены дополнительные к свойству непрерывности условия на функцию $f(x,y)$, которые в случае интегрируемости функции $f(x,y)$ являются и достаточными для существования классического решения.

Обозначим через $C^{n,m}(G)$ линейное пространство всех функций $f(x,y)$, непрерывных в G вместе со всеми частными производными $\frac{\partial^{i+j}f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, 0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m$. Положим $C(G) = C^{0,0}(G)$ — пространство непрерывных в G функций. По $g \in C(G)$ определим функцию $g_2(x,y,r) = \int_0^{2\pi} g(x + rcos\varphi, y + rsin\varphi) exp(2i\varphi) d\varphi$ на множестве $\widetilde{G} = \{(x,y,r) : M = (x,y) \in G, 0 \leqslant r < \rho(M, \partial G)\}$.

Функцию $g \in C(G)$ назовем усиленно непрерывной в G, если существует несобственный интеграл

$$\int_0^{r_1} g_2(x,y,r)\frac{dr}{r} = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{r_1} g_2(x,y,r)\frac{dr}{r}, r_1 = \rho(M, \partial G), M = (x,y) \tag{1}$$

в каждой точке $(x,y) \in G$, и равномерно усиленно непрерывной, если предельное соотношение (1) выполняется равномерно относительно (x,y) на каждом компакте $K \subset G$ при некотором $r_1 = r_1(K) > 0$.

Простые признаки равномерной усиленной непрерывности функции $g \in C(G)$ приведены в работе [5].

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C^{n,m}(G)$ и уравнение Пуассона $\Delta u = f$ имеет решение, принадлежащее пространству $C^{n+2,m+2}(G)$. Тогда функция $g(x,y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f(x,y)$ равномерно усиленно непрерывна в G.*

Теорема 2. *Пусть функция $f \in L_1(G) \bigcap C^{n,m}(G)$ и функция $g(x,y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f(x,y)$ равномерно усиленно непрерывна в G. Тогда уравнение Пуассона $\Delta u = f$ имеет решение, принадлежащее пространству $C^{n+2,m+2}(G)$.*

Из теорем 1 и 2 следует, что для функции $f \in L_1(G) \bigcap C^{n,m}(G)$ условие равномерной усиленной непрерывности функции $g(x,y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f(x,y)$ является необходимым и достаточным для существования решения уравнения Пуассона в пространстве $C^{n+2,m+2}(G)$. Из общей теории гармонических функций следует, что в условиях теоремы 2 любое обобщенное решение уравнения Пуассона принадлежит пространству $C^{n+2,m+2}(G)$.

Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 735 с.

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 527 с.

3. Бернс Л. Уравнения с частными производными / Л. Бернс, Ф. Джон, М. Шехтер. — М. : Мир, 1966. — 351 с.

4. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными / О.А. Олейник . — М. : БИНОМ, 2005. — 260 с.

5. Мухамадиев Э.М Применение метода регуляризации к построению классического решения уравнения Пуассона / Э.М. Мухамадиев, Г.Э. Гришанина, А.А.Гришанин // Труды института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург. : 2015. — Т. 21, — № 4. — С. 196–211.

О РАЗРЕШИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГУРТИНА-ПИПКИНА В ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ[1]

А.В. Давыдов (Москва, МГУ)

esse101@yandex.ru

В данном докладе мы рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau = f(t), \qquad (1)$$

где $u(t)$ и $f(t)$ — это векторные функции со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Рассмотрим конкретный вид ядра релаксации $\Gamma(t)$:

$$\Gamma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\gamma_k t},\ c_k > 0,\ \gamma_{k+1} > \gamma_k > 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1.$$

$$c_k = Ak^{-\alpha} + O(k^{-\alpha-1}),\ \gamma_k = Bk^{\beta} + O(k^{\beta-1}),\ \alpha+\beta > 1. \qquad (2)$$

Оператор A^2 в нашем случае является самосопряженным положительным оператором, а оператор A^{-2}, обратный к нему, является компактным. Определим также простанства $H_\alpha = \mathrm{Dom}A^\alpha$, $\alpha > 0$ с нормой $||f||_{H_\alpha} = ||A^\alpha f||_H$ и сопряженные к ним $H_{-\alpha} = H_\alpha^*$.

Добавив к уравнению (1) начальные условия

$$u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1, \qquad (3)$$

мы получим задачу Коши.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта МГУ им М. В. Ломоносова научной школы «Математические методы анализ сложных систем» под руководством В. А. Садовничего, а также фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

Определение. *Векторная функция $u(t)$ является сильным решением рассматриваемой задачи со значениями в H_r, если она принадлежит пространству Соболева $W_2^2([0,+\infty);H_r;A^2)$ со скалярным произведением*

$$(u(t),v(t))_{W_2^2([0,+\infty);H_r;A^2)} = \int\limits_0^{+\infty} ((u''(t),v''(t))_{H_r} + \\ + (A^2u(t),A^2v(t))_{H_r})dt,$$

выполнены равенства (3), и соотношение (1) выполнено почти всюду на $\mathbb{R}^+$.

Положим $s = (1-\alpha)/(2\beta)$, а также возьмем произвольную действительную константу r.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_0 \in H_{2-s+r}$ и $\varphi_1 \in H_{1-s+r}$, а $A^{1-2s+r}f(t) \in L_2([0,+\infty),H)$, тогда существует единственное сильное решение рассматриваемой задачи $u(t)$, $t \geqslant 0$. Более того, оно асимптотически устойчиво и для некоторой положительной константы d выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);H_r;A^2)} \leqslant d(||A^{1+r-s}f||_{L_2([0,+\infty),H)} + \\ + ||\varphi_0||_{H_{2+r-s}} + ||\varphi_1||_{H_{1+r-s}}).$$

При отсутствии ограничений (2) на c_j, γ_j можно доказать следующий ослабленный вариант теоремы:

Теорема 2. *Пусть $\varphi_0 \in H_{2+r}$ и $\varphi_1 \in H_{1+r}$, а $A^{1+r}f(t) \in L_2([0,+\infty),H)$, тогда существует единственное сильное решение рассматриваемой задачи $u(t)$, $t \geqslant 0$. Более того, оно асимптотически устойчиво и для некоторой положительной константы d выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);H_r;A^2)} \leqslant d(||A^{1+r}f||_{L_2([0,+\infty),H)} + \\ + ||\varphi_0||_{H_{2+r}} + ||\varphi_1||_{H_{1+r}}).$$

МЕТОД ПЕРРОНА ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Д.В. Савастеев
(Воронеж, ВГУ; Алматы, Казахстан, Satbayev University)
o.m.penkin@gmail.com

В данной работе мы распространяем хорошо известный метод Перрона доказательства разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа на случай так называемого мягкого Лапласиана на стратифицированном множестве. Попытка это сделать предпринималась ранее, но была успешной лишь в случае, когда размерности страт не превосходили 2 (см. [1]). Однако, недавно был достигнут существенный прогресс в доказательстве неравенства Харнака для такого Лапласиана и специальной теоремы о стирании особенностей в случае произвольного стратифицированного множества. Это сделало возможным распространить метод Перрона на случай стратифицированного множества произвольной размерности. Остановимся на некоторых определениях.

Под стратифицированным множеством понимается, в общем случае, связное подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа гладких многообразий различных размерностей. В данной работе мы предполагаем, что каждая страта σ_{kj} (k – размерность страты, j служит для нумерации страт) является относительно открытым k-мерным многогранником. Предполагается, что страты примыкают друг к другу по типу клеточного комплекса, т.е.:

– пересечение замыканий любой пары страт является объединением страт;

– граница $\overline{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ также является объединением страт.

Множество Ω представляется в виде объединения Ω_0 и $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$, где Ω_0 — связное и открытое подмножество Ω в топологии, индуцированной на Ω из $\mathbb{R}^n$, составленное из страт последнего так, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. На Ω_0 мы задаём лапласиан, а на $\partial\Omega_0$ — условия Дирихле. Лапласиан определяется в терминах специальной “стратифицированной” меры. А именно, мера подмножества $\omega \subset \Omega$ определяется как сумма

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}),$$

в которой μ_k — стандартная k-мерная мера Лебега.

Векторное поле $\vec{F}$ называется касательным к Ω_0, если его сужение на каждую страту σ_{kj} является касательным к этой страте (принадлежит касательному расслоению $T\sigma_{kj}$). Дивергенция касательного векторного поля $\vec{F}$ в точке $X \in \sigma_{kj}$ определяется формулой:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i}} (\vec{\nu}_i \cdot \vec{F}(X + 0\vec{\nu}_i),$$

где ∇_k — обычный оператор дивергенции на σ_{kj}. Сумма распространяется на все $k+1$-мерные страты, примыкающие к σ_{kj}, $\vec{\nu}_i$ — единичная нормаль к σ_{kj} в точке X, направленная внутрь σ_{k+1i}, а $\vec{F}(X+0\vec{\nu}_i)$ определяется как предел вектора $\vec{F}(Y)$ при Y, стремящемся к X изнутри σ_{k+1i}. Можно показать, что так определённая дивергенция является плотностью потока векторного поля $\vec{F}$ относительно меры μ (подробности см. в [2]).

Функция p называется стратифицированной константой, если она постоянна на каждой страте. В данной работе мы предполагаем, что она положительна на стратах старшей размерности, а на остальных равна нулю. В этом случае оператор $\Delta u = \nabla \cdot (p \nabla u)$ называется мягким Лапласианом. Здесь ∇u — векторное поле, состоящее из градиентов сужений скалярной функции u на страты из Ω_0. Основной результат данной работы относится к классической разрешимости задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad u\Big|_{\partial\Omega_0} = g. \tag{1}$$

Сразу заметим, что такая задача разрешима далеко не всегда; требуются некоторые геометрические ограничения на примыкания страт, называемые нами условиями прочности. А именно, мы называем пару $\{\Omega_0, \partial\Omega_0\}$ прочной, если объединение замыканий страт старшей размерности d (они автоматически принадлежат Ω_0) совпадает с Ω, если граница $\partial\Omega_0$ является объединением замыканий своих $d-1$ мерных страт и, наконец, для любой точки $X \in \Omega_0$ и шара $B_r(X)$ достаточно малого радиуса его пересечение с объединением страт размерности $d-1$ и d является связным.

При сделанных предложениях имеет место следующее утверждение — точный аналог неравенства Харнака.

Теорема 1. Для любого компакта $K \subset \Omega_0$ существует такая константа $C > 0$, что для всех неотрицательных гармонических функций (решений уравнения $\Delta u = 0$) выполняется неравенство:

$$\sup_{X \in K} u(X) \leqslant C \inf_{X \in K} u(X).$$

Как известно, неравенство Харнака и формула Пуассона для решения задачи Дирихле для обычного Лапласиана в шаре позволяют доказать, что верхняя огибающая

$$u(X) = \sup_{v \in S_g} v(X)$$

по по множеству S_g всех субгармонических функций, значения которых на границе области не превосходят предписанных функцией g, является гармонической функцией. В случае Лапласиана на стратифицированном множестве всё обстоит значительно сложнее. Определение субгармонических функций на стратифицированном множестве аналогично классическому (для любой точки $X \in \Omega_0$ значение $u(X)$ не превосходит среднего по стратифицированных сферам достаточно малого радиуса), но формула Пуассона получена только для сфер достаточного малого радиуса, центры которых лежат в стратах размерности d и $d-1$. Из-за этого гармоничность верхней огибающей удаётся доказать только в пределах страт размерности d и $d-1$. Однако, оказалось, что имеет место следующий аналог теоремы об устранимых особенностях.

Теорема 2. Множество всех страт размерности не превосходящей $d-2$ (будем называть такие страты маломерными) является устранимым в том смысле, что функция, гармоническая в стратах размерности не меньшей $d-1$, может быть продолжена по гармоничности на всё Ω_0.

Отсюда уже получается основной результат данной работы.

Теорема 3. Верхняя огибающая множества всех субгармонических функций из класса S_g, в предположении непрерывности функции g, является классическим решением задачи Дирихле (1).

В обычной ситуации требуется, чтобы граница области была регулярной. Напомним, что это подразумевает существование в каждой точке $X \in \partial\Omega_0$ локального барьера (супергармонической функции, обращающейся в нуль в точке X и положительной вблизи этой точки, см., например, [3]). В нашем случае регулярность границы выполняется автоматически, поскольку мы предположили все страты плоскими. Можно было бы ослабить последнее требование в граничных стратах наложив условие регулярности на границе.

Под классическим решением мы в данной работе понимаем непрерывную в целом на Ω функцию, которая в каждой страте размерности d или на $d-1$ из Ω_0 принадлежит классу C^2 и такая, что первые производные на каждой страте σ_{dj} допускают продолжение по непрерывности на страты размерности $d-1$, примыкающие к σ_{dj}. Нетрудно заметить, что уравнение $\Delta u = 0$ не предполагает наличие дифференциальных соотношений в маломерных стратах (это из-за того, что стратифицированная константа p, фигурирующая в определении мягкого Лапласиана, равна нулю в стратах, размерность которых не превосходит $d-1$, а потому уравнение $\Delta u = 0$, превращается в тривиальное тождество $0 = 0$ на маломерных стратах). В маломерных стратах от гармонической функции требуется лишь непрерывность. В силу этого теорему 2 можно переформулировать с большей подробностью так: функция, гармоническая в стратах размерности d и $d-1$ из Ω_0, продолжается до непрерывной функции на Ω_0.

Естественно спросить, а что случиться, если потребовать положительности стратифицированной константы p всюду на Ω_0? Например, положим $p \equiv 1$. К настоящему времени серьёзных продвижений в этом случае нет. Однако, полностью решён вопрос о слабой её разрешимости в соболевских пространствах по стратифицированной мере. Более того, нам удалось получить общие результаты о слабой разрешимости задачи Дирихле для p-лапласиана на стратифицированном множестве (см. [4],[5]).

Второй из авторов имел много полезных обсуждений с Юрием Ивановичем Сапроновым теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах с момента её становления. За что он ему очень благодарен. Данную работу авторы посвящают светлой памяти Юрия Ивановича Сапронова — одного из ярчайших представителей Воронежской школы и замечательного человека.

Литература

1. Nicaise S. Poincare-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets / S. Nicaise, O.M. Penkin // Journal of mathematical analysis and applications, vol 296(2), 504-520.

2. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный и др. — М.: Физматлит, 2004.

3. Гилбарг Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. — М.: Наука, 1989.

4. Даирбеков Н.С. Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества / Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова // Сиб.Мат.Журнал. — Т.59, № 6. — 2018. — С. 1291–1302

5. Даирбеков Н.С. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве / Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова // Алгебра и анализ. — Т.30, № 5. — 2018. — С. 149–158.

О НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА[1]

М.Т. Дженалиев, М.Г. Ергалиев,
А.С. Касымбекова (Алматы, ИМММ, КазНУ им. аль-Фараби)
muvasharkhan@gmail.com, ergaliev.madi.g@gmail.com, kasar1337@gmail.com

Пусть $\Omega_t = \{0 < x < t\}$, $\partial\Omega_t$ – граница Ω_t, $0 < t_0 < T < \infty$. В области $Q_{xt} = \Omega_t \times (t_0, T)$ рассматривается начально-граничная задача для уравнения типа Буссинеска

$$\partial_t u - \partial_x (|u|\partial_x u) = f, \ \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{1}$$

$$u = 0, \ \{x,t\} \in \Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (t_0, T), \ u = u_0, \ x \in \Omega_{t_0} = (0, t_0). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_{3/2}((t_0,T); W^{-1}_{3/2}(\Omega_t))$, $u_0 \in H^{-1}(\Omega_{t_0})$. *Тогда граничная задача (1)–(3) имеет единственное решение* $u \in L_3(Q_{xt})$.

Для доказательства Теоремы 1 мы рассмотрим вспомогательную граничную задачу. Для этой цели перейдем от переменных $\{x,t\}$ к $\{y,t\}$ по формулам $y = \frac{x}{t}$, $t = t$ и преобразуем трапецию Q_{xt} в прямоугольную область $Q_{yt} = \Omega \times (t_0,T)$, $0 < t_0 < T < \infty\}$, где $y \in \Omega = (0,1)$, $\partial\Omega = \{0\} \cup \{1\}$, $\Sigma_{xt} = \partial\Omega \times (t_0,T)$. Введя обозначения $w(y,t) = u(yt,t) = w(\frac{x}{t},t)$, $w_0(y) = u_0(yt_0,t_0)$ и $g(y,t) = f(yt,t)$, мы запишем вспомогательную граничную задачу для (1)–(2) в следующем виде:

$$\partial_t w - \frac{1}{t^2}\partial_y (|w|\partial_y w) - \frac{y}{t}\partial_y w = g, \ \{y,t\} \in Q_{yt}, \tag{3}$$

$$w = 0, \ \{y,t\} \in \Sigma_{yt}, \ w = w_0, \ y \in \Omega. \tag{4}$$

В силу взаимно-однозначности преобразования независимых переменных $\{x,t\} \to \{y,t\}$ получаем:

$$g \in L_{3/2}((t_0,T); W^{-1}_{3/2}(\Omega)), \ u_0 \in H^{-1}(\Omega). \tag{5}$$

Теорема 2. *При условиях (5) граничная задача (3)–(4) однозначно разрешима* $w \in L_3(Q_{yt})$.

Мы используем вложения $L_3(\Omega_t) \subset H^{-1}(\Omega_t) \equiv (H^{-1}(\Omega_t))' \subset L_{3/2}(\Omega_t)$ $\forall\, t \in (t_0,T)$, и априорные оценки. Вначале мы установим ряд вспомогательных утверждений. Для задачи (3)–(4) введем операторы

$$A(t,w) = \frac{1}{t^2}A_1(w) + \frac{1}{t}A_{21}(w), \ A_1(w) = -\partial_y(|w|\partial_y w), \ A_2(w) = -y\partial_y w,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН Республики Казахстан (грант № AP09258892).

и оператор $A_2(w)$ представим в виде:

$$A_2(w) = A_{21}(w) + A_{22}(w), \text{ где } A_{21}(w) = w, \ A_{22}(w) = -\partial_y(yw).$$

Введем скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi \left[\left(-d_y^2 \right)^{-1} \psi \right] dy, \ \forall \varphi, \psi \in H^{-1}(\Omega), \tag{6}$$

$$d_y^2 = \frac{d^2}{dy^2}, \, -d_y^2 \tilde{\psi} = \psi, \, \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(1) = 0, \forall \psi \in H^{-1}(\Omega).$$

Лемма 1. *Оператор $A(t, w) = (t^{-2}A_1 + t^{-1}A_{21})(w)$ является монотонным в смысле скалярного произведения (6) в пространстве $H^{-1}(\Omega)$:*

$$\langle (A(t, w_1) - (A(t, w_2), w_1 - w_2 \rangle \geqslant 0.$$

По аналогии с (6) введем скалярное произведение в области Ω_t.

Лемма 2. *Оператор эллиптической частью (1) $A_1(t, u)$ является монотонным в пространстве $H^{-1}(\Omega_t)$:*

$$\langle A_1(t, u_1) - A_1(t, u_2), u_1 - u_2 \rangle \geqslant 0, \forall t \in (t_0, T).$$

Леммы 1 и 2 позволяют доказать Теоремы 2 и 1.

Результаты справедливы и для усеченного (наклонного) конуса для двумерного уравнения типа Буссинеска, т.е. если $x = (x_1, x_2)$, $\Omega_t = \{|x - t| < t\}$, $\partial\Omega_t = \{|x - t| = t\}$, $Q_{xt} = \Omega_t \times (t_0, T)$, $\Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (t_0, T)$, $0 < t_0 < T < \infty$; а также для уравнений с высоким порядком нелинейности.

ОБ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ[1]

Ю.А. Дубинский (Москва, НИУ «МЭИ»)
julii_dubinskii@mail.ru

Рассматривается следующая краевая задача. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с липшицевой границей Г.

В области G ищется вектор-функция $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, являющаяся решением системы уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = h(x), x \in G$$

[1] Результаты получены в рамках исполнения государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (проект №. FSWF–2020–0022).

при следующих условиях на границе Γ:

$$(u|_\Gamma, n) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma\right)_{tang} = f(\gamma), \gamma \in \Gamma,$$

где $h(x) = (h_1(x), h_2(x), h_3(x)) \in L_2(G)$.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma\right)_{tang} = [n, [\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma, n]]$$

означает тангенциальную часть вектора нормальных производных $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \frac{\partial u_3}{\partial n}\right)$ на границе Γ, $f(\gamma) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, причем почти всюду $(f, n)(\gamma) = 0$

Основные результаты.

1. Доказательство существования слабого решения задачи.
2. Лемма о следе вектора нормальных производных.
3. Слабое решение задачи является обобщенным решением.

Литература

1. Dubinskii Yu.A. Some coercieve problems for the systems of Poisson equations / Yu.A. Dubinskii // Russian J. of Math. Phys. — 2013. — V. 20. — No 4. — P. 402–412.

2. Дубинский Ю.А. О ядрах операторов следа и краевых задачах теории поля / Ю.А. Дубинский // Проблемы Мат. Анализа — 2020 — Т. 106, —С. 73–89.

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

А.В. Дюжева (Самара, СамГТУ)
aduzheva@rambler.ru

В работе изучалась разрешимость нелокальной задачи для уравнения (1) с заданием одного локального условия по переменной t и одного нелокального условия интегрального вида. Доказательство проводилось в пространстве Лебега L_p, Соболева W_p^l, а также пространстве $L_p(0, T; X)$.

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ с гладкой границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0, T)$ есть его боковая граница.

[1] Работа выполнена по плану госзадания «Программа фундаментальных исследований СамГТУ в области химических наук и материаловедения» (тема № FSSE-2020-0005).

Рассматривается следующая задача: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) \Delta u = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^T N(t) u(x,t)\, dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Регулярным решением нелокальной задачи (1)-(4) будем называть решение, принадлежащее пространству

$$H = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$
$$\Delta v_t(x,t) \in L_2(Q), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Обозначим

$$A_j = \int\limits_0^T N(t) \left(e^{z_{j,1} t} - e^{z_{j,2} t}\right) dt, \quad B_j = \int\limits_0^T t N(t) e^{-\frac{\alpha \lambda_j t}{2}}\, dt.$$

Теорема. *Пусть выполняются условие*

$$N(t) \in C([0,T]), \quad N(t) \geqslant N_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

а также одно из условий

$$\alpha < 0, \quad \beta \neq \frac{\alpha^2 \lambda_j}{4}, \quad A_j^{(1)} \neq 0 \quad \textit{при} \quad j \in \mathbb{N}; \tag{6}$$

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} : \beta = \frac{\alpha^2 \lambda_{j_0}}{4}; \quad A_j \neq 0 \quad \textit{при} \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{j_0\}, \quad B_{j_0} \neq 0. \tag{7}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(0,T; W_2^{2p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{2p-1}(\Omega))$ при $p \in \mathbb{N}$, при $p > \frac{n+2}{4}$ нелокальная задача I имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству H.

Литература

1. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной / Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. — Каз. : Казанский федеральный университет, 2014. — 528 с.

2. Кожанов А.И. Краевые задачи и свойства решений для уравнений третьего порядка / А.И. Кожанов // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 12, № 25. — С. 2143–2153.

3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. — М. : Наука, 1973. — 736 с.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПУТИ НА ГРАФАХ С ОДНОВРЕМЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ПРОХОЖДЕНИЯ ДУГ

Я.М. Ерусалимский, М.И. Осипов,
В.А. Скороходов (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
ymerusalimskiy@sfedu.ru

Широко используемые мобильные приложения, называемые навигаторами, наряду с несомненными достоинствами, обладают рядом существенных недостатков. В частности, маршруты из вершины в вершину, которые они находят, строятся, фактически, по одному принципу — они прокладывают кратчайший маршрут, привязанный, как правило, к основным магистралям. Это при широком их использовании способствует образованию транспортных пробок. Они также не учитывают, что кратчайший путь может быть далеко не самым быстрым — скорость его прохождения может быть низкой в силу загруженности потоком транспорта.

Рассмотрен новый класс ориентированных графов с парами весов на дугах $\rho_1(u), \rho_2(u)$. Веса дуг положительны и означают время прохождения соответствующей дуги. Задано время T, если $t_u + \rho_1(u) \leqslant T$ (t_u — время начала прохождения по дуге u), то «действует» вес $\rho_1(u)$, если $t_u \geqslant T$, то «действует» вес $\rho_2(u)$, в противном случае (для первых двух), действует «переходной вес дуги», который строится естественным образом по весам $\rho_1(u), \rho_2(u)$. Такие графы можно считать частным случаем динамических графов (см. [1–4]).

Рассмотрена задача нахождения кратчайшего по времени пути на таком графе из заданной вершины при указанном времени старта в произвольную вершину графа. Ясно, что задача имеет четкое практическое истолкование, а именно, T — время начала «часа пик», а пары весов дуг – времена прохождения по дуге ($\rho_1(u)$ —до «часа пик», $\rho_2(u)$ — во время «часа пик»).

Предложенный алгоритм можно считать модификацией известного алгоритма Е. Дейкстры, который в своей оригинальной версии не учитывает динамики графа. Аналогичная задача была рассмотрена ранее в [5]. В ней использован подход, применявшийся ранее авторами в задачах на графах с ограничениями на достижимость. Решение требует построение развертки графа. Задача полностью дискретизируется по времени, и значит не предполагает ситуации использования переходных весов. В этом смысле, алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, является более точным, близким к реальным ситуациям и просто реализуемым.

Литература

1. Пупырев С.Н., Тихонов А.В. Визуализация динамических графов для анализа сложных сетей / Моделирование и анализ информ. систем. — 2010. — Т. 17, № 1. — С. 117–135.

2. Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А. Динамические графы и некоторые их свойства / Современная математика и концепции инновационного математического образования. — 2016. — Т. 3, №1. — С. 50–53

3. Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А., Малинецкий Г.Г. Некоторые аспекты динамической теории графов / Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 9. — С. 1623.

4. Ерусалимский Я.М., Кузьминова М.В. Динамические периодические графы / Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов III Всероссийской школы-семинара. — 2007. — С. 39–40.

5. Ерусалимский Я.М. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения / Я.М. Ерусалимский, А.В. Скороходов, М.В. Кузьминова, А.Г. Петросян/ — Ростов н/Д.: ЮФУ. — 2009. — 196 с.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

И.В. Женякова, М.Ф. Черепова (Москва, НИУ «МЭИ»)
zheniakovaiv@mpei.ru, cherepovamf@mpei.ru

В слое $D = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$, $0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно-параболический оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u + b_0(x,t)u.$$

Предполагаем, что коэффициенты оператора удовлетворяют условиям:

а) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\sigma_i\sigma_j \geqslant \delta > 0$ для некоторого $\delta > 0$ и для всех $(x,t) \in \overline{D}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект №FSWF-2020-0022)

б)a_{ij}, $b_i \in C^{0,\omega_0}(\overline{D})$, где ω_0 —модуль непрерывности, удовлетворяющий дважды условию Дини и функция $z^{-\varepsilon_0}\omega_0(z)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, почти убывает. ($C^{k,\omega}(\overline{D})$, $k = 0, 1$, — пространства Дини).

В D рассмотрим задачу Коши

$$Lu = f \text{ в } D, u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Функция f удовлетворяет условиям:

1)f непрерывна в D и конечна величина

$$\|f; D\|^0_{1,\omega} = \sup_D \frac{t^{1/2}|f(x,t)|}{\omega(t^{1/2})},$$

где ω—модуль непрерывности такой, что функция $z^{-\varepsilon}\omega(z)$, $\varepsilon \in (0,1)$, почти убывает;

2)f локально Дини-непрерывна по переменной x в D с модулем непрерывности, удовлетворяющим условию Дини.

Теорема 1. *При заданных условиях на коэффициенты уравнения и функцию f существует классическое решение задачи (1), причем $u \in C^{1,\omega}(\overline{D})$ и*

$$\|u; D\|^{1,\omega} \leqslant C\|f; D\|^0_{1,\omega}.$$

ОБ ИНДЕКСЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ[1]

К.Н. Жуйков (Москва, РУДН)
zhuykovcon@mail.ru

Рассматривается бесконечный цилиндр $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ с координатами (x,t), на котором задано действие группы $\mathbb{Z}$ диффеоморфизмами $g^k \colon M \to M$, $k \in \mathbb{Z}$, где $g(x,t) = (x, t + 2\pi)$. На M рассматривается оператор вида

$$D = \sum_k D_k T^k \colon H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M, \mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-m,\gamma^-,\gamma^+}(M, \mathbb{C}^N), \qquad (1)$$

где D_k — матричный дифференциальный оператор порядка $\leqslant m$ на M, $T^k u(x,t) = u(x, t-k)$ — оператор сдвига по переменной t, а $H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M)$ — весовое пространство Соболева (см. [1,2]). При этом мы предполагаем, что только конечное число слагаемых в сумме (1) не равно нулю, а коэффициенты оператора D_k не зависят от t при больших t.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России», а также РФФИ и Немецкого научно-исследовательского сообщества (проект № 21-51-12006).

Внутренним символом оператора (1) в точке $(x,t,\xi,p) \in T_0^*M = \{(x,t,\xi,p) \mid \xi^2+p^2 \neq 0\}$ кокасательного расслоения без нулевого сечения называется оператор

$$\sigma(D)(x,t,\xi,p)=\sum_k \sigma(D_k)(x,t+2\pi n,\xi,p)\mathcal{T}^k, \tag{2}$$

где $\sigma(D_k)$ — главный символ оператора D_k, $\mathcal{T}w(n)=w(n-1)$ — оператор сдвига. Оператор (2) действует в весовых пространствах квадратично суммируемых последовательностей.

Конормальным символом оператора (1) называется пара (σ_c^+,σ_c^-) семейств операторов с параметром:

$$\sigma_c^{\pm}(D)(p)=\mathcal{F}_{t\to p}D\mathcal{F}^{-1}_{p\to t}\Big|_{t=\pm\infty}=\sum_k D_k^{\pm}(p)e^{ikp}, \tag{3}$$

где $\mathcal{F}_{t\to p}$ — преобразование Фурье, а $D_k^{\pm}(p)$ — конормальный символ оператора D_k при $t=\pm\infty$ (см., напр., [2]). Отметим, что $D_k(p)$ — дифференциальный оператор с параметром (см., напр., [3]).

Оператор (1) называется *эллиптическим*, если оператор (2) обратим при всех $(x,t,\xi,p)\in T_0^*M$, а операторы (3) обратимы на весовых прямых $L_{\gamma^\pm}=\{p\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}p=\gamma^{\pm}\}$.

Для эллиптического оператора (1) получена формула индекса. Наша формула индекса содержит три слагаемых: вклад внутреннего символа на основном многообразии, выраженный аналогом интеграла Атьи–Зингера, вклады конормальных символов на бесконечности, описываемые в терминах η-инварианта (см. [4,5]), а также третье слагаемое, включающее в себя две старшие компоненты полных символов конормальных символов. Полученный результат обобщает формулу Федосова–Шульце–Тарханова [6].

Литература

1. В.А. Кондратьев. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками / В.А. Кондратьев // Труды Моск. матем. об-ва. — 1967. — Т.16. — С. 209–292.

2. V. Nazaikinskii. Elliptic Theory on Singular Manifolds / V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, and B. Sternin. — CRC-Press, Boca Raton, 2005. — 372 p.

3. М.А. Шубин. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М.А. Шубин. — М.: Наука, 1978. — 280с.

4. R. Melrose. The eta invariant and families of pseudodifferential operators / R. Melrose // Math. Research Letters. — 1995. — Vol.2, No. 5. — PP. 541–561, .

5. К.Н. Жуйков. Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами / К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин // Уфимск. матем. журн. — 2022. (в печати).

6. B.V. Fedosov. The index of higher order operators on singular surfaces / B.V. Fedosov, B.-W. Schulze, N. Tarkhanov // Pacific J. of Math. — 1999. — Vol. 191, No. 1. — PP. 25–48.

МНОГОТОЧЕЧНОЕ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОСКОЛКОВА

С.А. Загребина, Г.А. Свиридюк (Челябинск, ЮУрГУ (НИУ))
zagrebinasa@susu.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Дирихле

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

для линейной системы уравнений Осколкова [1]

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - \nabla p + g, \quad \nabla \cdot v = 0, \tag{2}$$

моделирующей динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина — Фойгта. Здесь искомые функции $v = v(x,t)$, $p = p(x,t)$ отвечают скорости и давлению жидкости, заданная функция $g = g(x,t)$ отвечает внешнему воздействию на жидкость; параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости соответственно, причем отрицательные значения не противоречат физическому смыслу.

Следуя [2], задачу (1), (2) можно редуцировать к уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{3}$$

В предположении, что оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$ [3], и выполнено условие

$$\left.\begin{array}{c} \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{m} \sigma_j^L(M),\ m \in \mathbb{N},\ \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \varnothing, \\ \text{существует замкнутый контур } \gamma_j \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } D_j \supset \sigma_j^L(M), \\ \text{такой, что } \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \varnothing, \\ \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \varnothing \text{ при всех } j,k,l = \overline{1,m}, k \neq l, \end{array}\right\} \tag{4}$$

для уравнения (3) можно сформулировать многоточечное начально-конечное условие [4]

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0,m}. \tag{5}$$

Здесь $\tau_j \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ такие, что $\tau_{j+1} > \tau_j$, $j = \overline{0,m}$; а $P_j \equiv U_j^0$ – относительно спектральные проекторы, $U_j^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}(\mu L - M)^{-1}Le^{\mu t}d\mu$, $j = \overline{0,m}$.

Теорема 1. [4] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$, причем выполнено условие (4). Тогда для любых $\tau_j \in (a,b)$, таких, что $\tau_{j+1} > \tau_j$, $j = \overline{0,m}$; $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,m}$; $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$, существует единственное решение задачи (3), (5)*

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(k)}(t) +$$
$$+\sum_{j=0}^{m}\left(U_j^{t-\tau_j}u_j + \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s}L_{1j}^{-1}Q_j f(s)ds\right).$$

Для исследования однозначной разрешимости задачи (1), (2), (5) воспользуемся следующим результатом:

Лемма 1. [2] *При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ оператор M $(L,1)$-ограничен.*

Тогда имеет место

Теорема 2. *При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$, $\nu \in \mathbb{R}_+$; $\tau_j \in (a,b)$, таких, что $\tau_{j+1} > \tau_j$, $j = \overline{0,m}$; $u_j \in \mathfrak{U}$, вектор-функция $g : [a,b] \to L_2$ такая, что $\Sigma g \in C([a,b];\mathbb{H}_\sigma)$, $\Pi g \in C^1((a,b),\mathbb{H}_\pi) \cap C([a,b];\mathbb{H}_\pi)$, существует единственное решение задачи (1) – (3).*

Литература

1. Осколков А. П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1991. — Т. 198. — С. 31–48.

2. Свиридюк Г. А. Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. — 1994. — № 1. — С. 62–70.

3. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47–74.

4. Загребина С.А. Неклассические модели математической физики с многоточечным начально-конечным условием / С.А. Загребина, А.С. Конкина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2022. — Т. 15, № 1. — С. 60–83.

РАСХОД ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ЩЕЛЬ ЭКРАНА БЕЗ ПОДПОРА, КОГДА ДРЕНИРУЮЩИЙ СЛОЙ РАСПОЛОЖЕН НА БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЕ

Н.С. Задорожная (Ростов-на-Дону, РГУПС)
simon@sfedu.ru

В настоящей работе предлагается решение задачи фильтрации через щель полимерного экрана с дефектом. Фильтрация считается установившейся и подчиняется закону Дарси, грунт однороден и изотропен, жидкость несжимаема.

Будем предполагать, что однородный водопроницаемый слой грунта подстилается слоем грунта значительно большей водопроницаемости. Капиллярность грунта верхнего слоя учитывается.

Рассмотрим сначала случай, когда линия, разделяющая область фильтрации и дренируюший слой, и уровень защитного покрытия представляют собой горизонтальные прямые. Используем метод конформных преобразований [1] и, таким образом, получаем точное аналитическое решение.

Рассмотрим теперь случай, когда линия, подстилающая область фильтрации, и уровень защитного слоя имеют собой криволинейную форму. Будем вдавливать и выдавливать обе кривые до положения горизонтальных прямых.

При решении используются метод мажорантных областей [2], и точное решение, полученное выше. Таким образом, получаем верхнюю и нижнюю оценки фильтрационного расхода.

Искомое значение фильтрационного расхода находим как среднее арифметическое найденных оценок. Отметим, что в работе [3] получены значения напоров вдоль контура экрана и, таким образом, задача фильтрации через пленочные экраны с дефектами при наличии в основании дренирующего слоя неограниченной мощности решена полностью.

Литература

1. Аверьянов С.Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод / С.Ф. Аверьянов. — М. : Колос, 1982.

2. Положий Г.Н. Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций / Г.Н. Положий. — Киев : Наукова Думка, 1973. —- 423 с.

3. Клодина Т.В. Нахождение напоров под гибким флютбетом при наличии в основании дренирующего слоя неограниченной мощности / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная //Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж.весен. мат. школы. «Понтрягинские чтения -XXVII ». — Воронеж : ВГУ, 2016. —С. 147–148.

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗНОНАПРАВЛЕННЫМИ СДВИГАМИ В ПОТЕНЦИАЛАХ

Н.В. Зайцева (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
zaitseva@cs.msu.ru

Рассмотрим в полупространстве $\{(x,t)|\, x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ гиперболические уравнения

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} d_j u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, t), \qquad (1)$$

где a, $d_1, \ldots, d_n$ и $l_1, \ldots, l_n$ — заданные вещественные числа;

$$u_{tt}(x,t) = c^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_{jk}, x_{j+1}, \ldots, x_n, t), \qquad (2)$$

где c, d_{jk} и l_{jk} ($j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m_j}$) — заданные вещественные числа.

В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений [1–5]. Менее изучены параболические [6, 7] и гиперболические уравнения [8, 9]. Причем в гиперболических уравнениях операторы сдвига действовали по времени. В работе [10] рассмотрены гиперболические уравнения, содержащие сумму дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по многомерной пространственной переменной.

С помощью операционной схемы и идей работ [3–5] для указанных уравнений построены трехпараметрические семейства классических решений при условии положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в правой части уравнений.

Литература

1. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications / A.L. Skubachevskii. — Basel—Boston—Berlin : Birkhäuser, 1997. — 294 p.

2. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи матем. наук. — 2016. — Т. 71, вып. 5(431). — С. 3–112.

3. Муравник А.Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве / А.Б. Муравник // Матем. заметки. — 2020. — Т. 108, вып. 5. — С. 764–770.

4. Муравник А.Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения общего вида в полупространстве / А.Б. Муравник // Матем. заметки. — 2021. — Т. 110, вып. 1. — С. 90–98.

5. Муравник А.Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве / А.Б. Муравник // Уфимский матем. журнал. — 2021. — Т. 13, № 3. — С. 107–115.

6. Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А.Б. Муравник // Соврем. матем. Фундам. направл. — 2014. — Т. 52. — С. 3–143.

7. Йаакбариех А. Корректность задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента / А. Йаакбариех, В.Ж. Сакбаев // Известия вузов. Математика. — 2015. — № 4. — С. 17–25.

8. Власов В.В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В.В. Власов, Д.А. Медведев // Соврем. матем. Фундам. направл. — 2008. — Т. 30. — С. 3–173.

9. Акбари Фаллахи А. Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента / А. Акбари Фаллахи, А. Йаакбариех, В.Ж. Сакбаев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 352–365.

10. Zaitseva N.V. Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations in a half-space / N.V. Zaitseva // Differ. Equations. — 2021. — Vol. 57, no. 12. — P. 1629–1639.

НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СМЕСИ ДВУХ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д.А. Закора (Симферополь, КФУ им. В.И. Вернадского)
dmitry.zkr@gmail.com

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, полностью заполненную гомогенной смесью двух сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$, жёстко связанную с областью Ω, таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести $-g\mathbf{e}_3$, $g>0$, а начало координат находится в области Ω. Задача о малых движениях смеси в симметризованной форме описывается следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{\rho_{l0}(x_3)}\sum_{k=1}^{2}\bigl(\mu_{lk}\Delta\mathbf{u}_k(t,x)+(\mu_{lk}+\lambda_{lk})\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}_k(t,x)\bigr)+$$

$$+\frac{a}{\rho_{l0}(x_3)}\sum_{k=1}^{2}\bigl(\mathbf{u}_k(t,x)-\mathbf{u}_l(t,x)\bigr)-\nabla\left(\frac{c_l^{1/2}\rho_l(t,x)}{\rho_{l0}^{1/2}(x_3)}\right)+\mathbf{f}_l(t,x),$$

$$\frac{\partial \rho_l(t,x)}{\partial t}=-\frac{c_l^{1/2}}{\rho_{l0}^{1/2}(x_3)}\,\mathrm{div}\bigl(\rho_{l0}(x_3)\mathbf{u}_l(t,x)\bigr)\quad (x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega),$$

$$\mathbf{u}_l=\mathbf{0}\quad (x\in\partial\Omega),\quad \mathbf{u}_l(0,x)=\mathbf{u}_l^0(x),\quad \rho_l(0,x)=\rho_l^0(x),\quad l=1,2.$$

Здесь $\mathbf{u}_l(t,x)$ — поле скоростей жидкости смеси, $c_l>0$, $a>0$ — фиксированные константы, $\rho_{l0}(x_3)=\rho_{l0}(0)\exp(-gc_l^{-1}x_3)$ — плотность жидкости смеси в состоянии равновесия, $c_l^{-1/2}\rho_{l0}^{1/2}(x_3)\rho_l(t,x)$ — динамическая плотность жидкости смеси. Матрицы вязкостей удовлетворяют следующим условиям положительности:

$$\{\mu_{kj}\}_{k,j=1}^{2}>0,\quad \{2\mu_{kj}+\lambda_{kj}\}_{k,j=1}^{2}>0.$$

Будем разыскивать решения уравнений свободных колебаний рассматриваемой системы в виде

$$\mathbf{u}_l(t,x)=\mathbf{u}_l(x)\exp(-\lambda t),\quad \rho_l(t,x)=\rho_l(x)\exp(-\lambda t),\quad l=1,2,$$

в результате придём к следующей задаче на собственные значения:

$$\frac{1}{\rho_{l0}}\sum_{k=1}^{2}\bigl(\mu_{lk}\Delta\mathbf{u}_k+(\mu_{lk}+\lambda_{lk})\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}_k\bigr)+ \tag{1}$$

$$+\frac{a}{\rho_{l0}}\sum_{k=1}^{2}(\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_l)-\nabla\left(\frac{c_l^{1/2}\rho_l}{\rho_{l0}^{1/2}}\right)=-\lambda\mathbf{u}_l,$$

$$-\frac{c_l^{1/2}}{\rho_{l0}^{1/2}}\,\mathrm{div}(\rho_{l0}\mathbf{u}_l)=-\lambda\rho_l\quad (x\in\Omega),\quad \mathbf{u}_l=\mathbf{0}\quad (x\in\partial\Omega),\quad l=1,2.$$

Теорема 1. *Спектр σ задачи (1) расположен на действительной положительной полуоси за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряжённых собственных значений конечной* *кратности. Существенный спектр σ_{ess} задачи (1) вычисляется по формуле $\sigma_{ess} = \mathcal{E} \cup \mathcal{L}$, где*

$$\mathcal{E} := \big\{\lambda \in \mathbb{C}: \ \det\{2\mu_{kj} + \lambda_{kj} - \lambda^{-1}\delta_{kj}c_k\rho_{k0}\}^2_{k,j=1} = 0, \ \ x \in \Omega\big\},$$
$$\mathcal{L} := \big\{\lambda \in \mathbb{C}: \ \det\{3\mu_{kj} + \lambda_{kj} - \lambda^{-1}\delta_{kj}c_k\rho_{k0}\}^2_{k,j=1} = 0, \ \ x \in \partial\Omega\big\},$$

δ_{kj} — символ Кронекера. Множество $\sigma\backslash\sigma_{ess}$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и содержит подпоследовательность с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)} = C^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1)), \quad k \to \infty,$$

где константа C может быть вычислена по матрицам вязкостей и функциям ρ_{l0} ($l = 1, 2$).

Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо и для смеси нескольких жидкостей. Отметим, что в работе [1] решается вопрос о существовании слабых обобщённых решений нелинейной начально-краевой задачи, описывающей баротропное движение смеси нескольких сжимаемых вязких жидкостей.

Литература

1. Мамонтов А.Е. Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей / А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин // Изв. РАН Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 1. — С. 151–197.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

А.А. Замышляева, Е.В. Бычков, О.Н. Цыпленкова (Челябинск, ЮУрГУ)

bychkovev@susu.ru

В общем виде механические системы с ограничениями часто описываются системой дифференциальных уравнений вида [1, 2]

$$M\ddot{z} + D\dot{z} + Kz = Lf + J\lambda, \tag{1}$$
$$G\dot{z} + Hz = 0, \tag{2}$$

где $z = z(t) \in R^m$ — вектор положения, $f = f(t) \in R^m$ — вектор внешних сил, $\lambda = \lambda(t) \in R$ — множитель Лагранжа, M — матрица инерционных характеристик системы (положительно определенная

[1] Работа выполнена приподдержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).

и симметричная), D — матрица демпфирования, K — матрица жесткости, L — матрица параметров внешних сил, J — матрица Якоби уравнений ограничений (2), G и H — матрицы параметров уравнений ограничений. Все матрицы в (1) и (2) являются известными. Выходное устройство моделируется функцией наблюдения $y = y(t) \in R^n$ с матрицей измерения C

$$y = Cz. \tag{3}$$

В работах А.Л. Шестакова, Г.А. Свиридюка, А.В. Келлер и др. [3] предложена новая парадигма оптимальных динамических измерений на основе теории оптимального управления решениями уравнений соболевского типа первого порядка.

На основе теории уравнений соболевского типа высокого порядка [4] построим и исследуем математическую модель измерительного устройства второго порядка. Для того этого введем новую переменную $x = (z\ \lambda)^T \in R^{m+1}$, тогда (1)—(3), вместе с условием Шоуолтера — Сидорова, примет вид

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + u, \tag{4}$$

$$y = Nx, \tag{5}$$

$$P\dot{x}(0) = 0, \quad Px(0) = 0, \tag{6}$$

где P — некоторый проектор. Кроме того, зададим функционал штрафа для оценки близости полученного в результате моделирования $y(t)$ и наблюдаемого в ходе эксперимента $y_0(t)$ сигналов

$$F(u) = \alpha \sum_{k=0}^{2} \int_0^T \left\| y^{(k)}(t) - y_0^{(k)}(t) \right\|^2 dt + \beta \sum_{k=0}^{\bar{K}} \int_0^T \left\langle W_k u^{(k)}(t), u^{(k)}(t) \right\rangle dt,$$

где коэффициенты $\alpha \in (0,\ 1]$, $\beta \in [0,\ 1)$, $\alpha + \beta = 1$, W_k — симметричные неотрицательно определенные матрицы, $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — евклидовы норма и скалярное произведение в R^n иR^{m+1}, соответственно. Пусть U_{ad} — непустое, выпуклое множество допустимых измерений. Точка минимума $\hat{u}$ функционала

$$F(\hat{u}) = \min_{u \in U_{ad}} F(u) \tag{7}$$

будет оптимальным динамическим измерением. Предлагаемый доклад посвящен исследованию задачи (4)—(7).

На основе полученных теоретических результатов был разработан алгоритм численного метода нахождения оптимального динамического измерения для одной математической модели измерительного устройства второго порядка, построенной на основе механической системы и реализован в среде Maple. В программе используется метод фазового пространства и метод Ритца.

Литература

1. Белов А.А. Дескрипторные системы и задачи управления / А.А. Белов, А.П. Курдюков. — М. : Физматлит, 2015. — 301 с.

2. Пытьев Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем / Ю.П. Пытьев. — М. : Физматлит, 2004. — 400 с.

3. Shestakov A.L. The optimal measurements theory as a new paradigm in the metrology / A.L. Shestakov, A.V. Keller, A.A. Zamyshlyaeva, N.A. Manakova, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2020. — V. 7, №. 1. — P. 3–23.

4. Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 2. — С. 5–28.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

М.Б. Зверева (Воронеж, ВГУ)

margz@rambler.ru

Проведено исследование ряда моделей деформаций упругих систем (струна, балка) с нелинейным условием под воздействием внешней нагрузки. Такого рода условие возникает за счет наличия ограничителя на перемещение из состояния равновесия одного из концов рассматриваемой физической системы. В зависимости от приложенной внешней силы соответствующий конец или остается свободным, или касается граничных точек ограничителя.

Одна из такого рода моделей — модель деформаций системы струн, расположенной вдоль геометрического графа. Пусть вдоль геометрического графа - звезда Γ, состоящего из n ребер γ_i (см. терминологию в [1]), представленных одномерными отрезками длины l, натянута система из n струн, соединенных между собой в узле $x = 0$ и упруго закрепленных в граничных вершинах. Под воздействием внешней силы система струн отклоняется от положения равновесия и принимает форму $u(x)$, где $x \in \Gamma$. Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Условие скрепления струн в узле означает, что $u(0) = u_1(0) = u_2(0) = ... = u_n(0)$. Условия упругого закрепления в граничных вершинах имеют вид $p_i(l-0)u_i'(l-0) + u_i(l)(Q_i(l) - Q_i(l-0)) = F_i(l) - F_i(l-0)$. Дополнительно в узле установлен ограничитель $[-m, m]$ на перемещение струн так, что $|u(0)| \leqslant m$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009), РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20-51-15003 НЦНИ-а.

Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} -p_i(x)u_i'(x) + p_i(+0)u_i'(+0) + \int\limits_{+0}^{x} u_i dQ_i = \\ \qquad = F_i(x) - F_i(+0), i = 1, 2, ..., n, \\ u(0) = u_1(0) = u_2(0) = ... = u_n(0), \\ u(0) \in [-m, m], \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0) \in N_{[-m,m]}(u(0)), \\ p_i(l-0)u_i'(l-0) + u_i(l)(Q_i(l) - Q_i(l-0)) = \\ \qquad = F_i(l) - F_i(l-0), i = 1, 2, ..., n, \end{cases}$$

где множество $N_{[-m,m]}(u(0))$ — нормальный конус к $[-m, m]$ в точке $u(0)$, определяемый как

$$N_{[-m,m]}(u(0)) = \{\xi : \xi(c - u(0)) \leqslant 0 \quad \forall c \in [-m, m]\}.$$

Решение задачи рассматривается в классе E абсолютно - непрерывных на Γ функций $u(x)$, производная которых имеет ограниченную вариацию на каждом ребре.

Здесь функция $p(x)$ характеризует упругость струн, функции $Q(x)$ и $F(x)$ описывают упругую реакцию внешней среды и внешнюю нагрузку соответственно. Предполагается, что функции p, F имеют ограниченную вариацию на Γ; функция Q не убывает на каждом ребре в смысле ориентации; $\inf\limits_{\bigcup \gamma_i} p > 0$; функции F, Q непрерывны в $x = 0$.

Настоящая модель получена вариационными методами из задачи о минимизации функционала потенциальной энергии изучаемой физической системы

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Gamma} \frac{p(x)u'^2(x)}{2} dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{u^2(x)}{2} dQ - \int\limits_{\Gamma} u(x) dF(x),$$

рассматриваемого на множестве функций $u \in E$, удовлетворяющих условию $|u(0)| \leqslant m$.

Доказана корректность модели, вычислены критические нагрузки, при которых происходит соприкосновение системы струн с ограничителем; проанализирована зависимость решения от длины ограничителя.

Литература

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

2. Зверева М. Б. Задача о деформациях разрывной стилтьесовской струны с нелинейным граничным условием / М. Б. Зверева, М.

И. Каменский, П. Рено де Фитт // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика.—2020.—№ 3.—С. 76–94.

3. Kamenskii M. On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end / M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization.— 2020. — V. 69, iss.9.— P. 1935 –1959.

ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ С НАИМЕНЬШИМ КОАНАЛИТИЧЕСКИМ УКЛОНЕНИЕМ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

П.В. Зубков (Москва, НИУ «МЭИ»)
zubkovpv@mpei.ru

Пусть G — ограниченная односвязная область с гладкой границей Γ на комплексной плоскости. В качестве весовой функции на G рассматривается степенная функция вида ρ^L, где $\rho = \rho(z)$ это расстояние от точки $z = x + iy \in G$ до границы Γ, а $-1 < L < 1$.

Символом $W^1_{2,L}(G)$ обозначим весовой класс функций, определённых на G, для которых конечна величина

$$||f||_{W^1_{2,L}(G)} = \left(||\rho^{L/2}\nabla f||^2_{L_2(G)} + ||f||^2_{L_2(G)}\right)^{1/2}.$$

Известно, что всякая суммируемая с квадратом в области G функция в рассматриваемом весовом пространстве представима в виде ортогональной суммы аналитической и коаналитической составляющих $f(z) = f_a(z) + f_{ca}(z)$, поэтому коаналитическую составляющую естественно считать определенной характеристикой неаналитичности функции.

Определение. *Мерой неаналитичности или, что то же, коаналитическим уклонением функции* $f(z) \in W^1_{2,L}(G)$ *назовем число*

$$m(f, L) = ||f_{ca}||^2_{W^1_{2,L}(G)} = ||f - f_a||^2_{W^1_{2,L}(G)}.$$

Задача. *Среди всевозможных продолжений*

$$f(z) \in W^1_{2,L}(G), f(z)|_\Gamma = f_0(\gamma) \in B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)$$

найти то, которое имеет наименьшее коаналитическое уклонение $m(f, L)$.

Имеет место

[1] Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

Теорема. *Для любой функции* $f_0(\gamma) \in B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)$ *существует единственное решение задачи минимизации коаналитического уклонения при* $-1 < L < 1$.

Доказательство как существования, так и единственности решения проводится в рамках идей теории монотонных операторов.

Литература

1. Зубков П.В. О задаче продолжения функции внутрь круга в пространствах с весом, имеющим особенность на границе / П.В. Зубков // Вестник МЭИ. — 2019. — № 4. — С. 143–146.

2. Зубков П.В. Коаналитическая задача продолжения периодической функции в пространствах с весом, имеющим особенность на границе / П.В. Зубков // Вестник МЭИ. — 2022. — № 1. — С. 137–140.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ; Воронеж, ВГЛТУ)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = B\frac{\partial^l x(t,s)}{\partial s^l} + Du(t,s), \tag{1}$$

где $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $D : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $\quad s \in S = [0,\infty)$.

Система (1) называется полностью управляемой (ПУ), если существует функция управления (управление) $u(t,s)$, под воздействием которого система (1) переводится из произвольного начального состояния

$$x(0,s) = \alpha_0(s) \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

в произвольное конечное состояние

$$x(T,s) = \beta_0(s) \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

за время $T, \forall T > 0$.

Ставится задача выявления требований к матричным коэффициентам B и D, при выполнении которых система (1) является ПУ, а также задача построения управления $u(t,s)$ и соответствующего состояния $x(t,s)$, удовлетворяющего (1) и условиям (2), (3).

Основным методом исследования является метод каскадной декомпозиции ([1]—[3]), базирующийся на свойстве нетеровости $D : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, позволяющем расщепить $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ в прямые суммы подпространств:

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{Coim} D \dot{+} \operatorname{Ker} D, \quad \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} D \dot{+} \operatorname{Coker} D.$$

где Ker D — ядро D, Im D — образ D, Coker D — дефектное подпространство, Coim D — прямое дополнение к Ker D в $\mathbb{R}^n$; при этом сужение $\tilde{D}$ оператора D на Coim D имеет обратный $\tilde{D}^{-1}$. Проекторы на подпространства Ker D и Coker D обозначаются через P_0 и Q_0, соответственно.

Разработанный алгоритм МКД заключается в поэтапном (пошаговом) переходе к СДiШ в подпространствах (СДiШ — система декомпозиции i-го шага)

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} = B_i \frac{\partial^l x_i(t,s)}{\partial s^l} + D_i u_i(t,s), \tag{4}$$

с условиями

$$\frac{\partial^{j-1} x_i(t,s)}{\partial t^{j-1}}|_{t=0} = \alpha_{ji}(s), j = \overline{1,i}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^{j-1} x_i(t,s)}{\partial t^{j-1}}|_{t=T} = \beta_{ji}(s), j = \overline{1,i}. \tag{6}$$

Здесь $x_i(t,s)$ — функция псевдосостояния i-го шага (ПСiШ); $u_i(t,s)$ — функция псевдоуправления i-го шага (ПУiШ) из подпространств.

Конечномерность исходных пространств обусловливает полную реализацию метода за p шагов ($p \leqslant n$); на последнем шаге возможны лишь два исхода: 1) $D_p = (0)$ (в этом случае система (4) с условиями (5), (6) не является полностью управляемой, а, следовательно, и система (1) не является полностью управляемой); 2) D_p — сюръекция ($Q_p = 0$).

Во втором случае система (1) полностью управляема. Строится такая управляющая функция $u(t,x)$, что уравнение (1) с этой вектор-функцией имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (2), (3).

Теорема 1. *Система (1) полностью управляема в том и только том случае, когда $\exists p \in \mathbb{N}$ такое, что D_p — сюръекция.*

Литература

1. Zubova, S. P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives / S. P. Zubova, E. V. Raetskaya// Mathematical Methods in the Applied Sciences, AIMS, New York.— 2021. — V. 44, № 15. — P. 11998–12009.

2. Zubova, S. P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System / S. P. Zubova, E. V. Raetskaya// Automation and Remote Control. — 2018. — V. 78, № 7. — P. 1189–1202.

3. Zubova, S. P. Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method / S. P. Zubova // Doklady Mathematics, Pleiades Publishing,Ltd. — 2012. — V. 86, № 3. — P. 846–849.

ДРОБНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов,
С.М. Лашкарбеков (Душанбе, ЦИРННТ НАНТ)
ilolov.mamadsho@gmail.com

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство и A действующий в нем почти секториальный оператор порждающий аналитическую полугруппу $T(t)$.

Рассмотрим в H дробную задачу Коши

$$D_t^\alpha X(t) = (AX(t) + F(t, X(t)))dt^\alpha +$$

$$+b(t, X(t))dW(t), t \in [0,1], X(0) = \xi, \tag{1}$$

где D_t^α - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, $W(t)$ - винеровский процесс со значениями в некотором другом сепарабельном векторном пространстве H^1. $F(t, X)$ - отбражение из H в H, $B(t, X)$ - оператор действующий из H в пространстве линейных операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{L}_{HS}(H_Q^1, H)$.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - вероятностная тройка с нормальной фильтрацией $\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0$.

С почти секториальным оператором T связаны следующие три семейства операторов, а именно

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-tz} R(z, A) Dz, t \geqslant 0 \tag{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma E_\alpha(-zt^\alpha) R(z, A) Dz, t \geqslant 0 \tag{3}$$

$$P_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e_\alpha(-zt^\alpha) R(z, A) Dz, t \geqslant 0 \tag{4}$$

где контурный интеграл Γ ориентирован против часовой стрелки, $E_\alpha(z), e_\alpha(z)$ - функции Миттаг-Леффлера, $0 < \alpha < 1, z \in \mathbb{C}$.

Запишем задачу Коши (1) в интегральной форме

$$X(t) = \xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[Ax(s) + F(s, X(s))]ds +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B(s, X(s)) dW(s),$$

где X-искомый H-значный случайный предсказуемый процесс, ξ – $\mathfrak{F}_0$-измеримая H значная случайная величина, A почти секториальный оператор порождающий семиства операторов (2), (3), (4); отображение $F(t, X(t)) : H \to H$; Q-неотрицательный оператор следа в H^1 такой, что $Qe_j = \sigma_j^2 e_j, \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$; оператор $B(t, X(t))$ - оператор Гильберта-Шмидта из пространства $H_Q^1 = Q^{1/2} H^1$ с нормой $\|h\|_Q = \|Q^{-1}h\|_{H^1}$ в пространство H, далее пространство операторов Гильберта-Шмидта из H_Q^1 в H будем обозначать $\mathfrak{L}_{HS}$; $W(t), t \geqslant 0 - H^1$ - значный Q - винеровский процесс.

При фиксированном $T > 0$ заданы следующие условия на коэффициенты F, B:

(i) отображение $F : [0,T] \times \Omega \times H \to H$, $(t, \omega, x) \to F(t, \omega, x)$ измеримо из $(\Omega_T \times H, \mathfrak{P}_T \times \mathfrak{B}(H))$ в $(H, \mathfrak{B}(H))$;

(ii) отображение $B : [0,T] \times \Omega \times H \to \mathfrak{L}_{HS}$, $(t, \omega, x) \to B(t, \omega, x)$ измеримо из $(\Omega_T \times H, \mathfrak{P}_T \times \mathfrak{B}(H))$ в $(\mathfrak{L}_{HS}, \mathfrak{B}(\mathfrak{L}_{HS}))$;

(iii) существует такая постоянная $c > 0$ что $F(\cdot)$ и $B(\cdot)$ удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста:

$$\begin{cases} \|F(t,\omega,x) - F(t,\omega,y)\|_H + \|B(t,\omega,x) - B(t,\omega,y)\|_{\mathfrak{L}} \leqslant C\|x-y\|_H, \\ \|F(t,\omega,x)\|_H^2 + \|B(t,\omega,x)\|_{\mathfrak{L}_{HS}}^2 \leqslant C^2(1 + \|x\|_H^2), \end{cases} \tag{5}$$

где $x, y \in H, t \in [0,T], \mathfrak{P}_T$ - предсказуемая σ-алгебра на $\Omega_T = [0,T] \times \Omega$.

Предсказуемый H-значный процесс $X(t), t \in [0,T]$ называется слабым решением задачи Коши (1), если

$$P\left(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \leqslant \infty \right) = 1$$

для почти всех ω, для любого $t \in [0,T]$ и для любого $y \in D(A^*)$ справедливо равество

$$< y, X(t) > = < y, \xi > +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [< A^* y, X(s) > + < y, F(s, X(s)) >] +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t < y, B(s, X(s)) > DW(s). \tag{7}$$

Предсказуемый H-значный процесс $X(t), t \in [0,T]$ называется мягким решением задачи Коши (1), если выполнены (1) и (6), и кроме того, $X(t)$ для любого $t \in [0,T]$ удовлетворяет уравнению

$$X(t) = S_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) F(s, X(s)) ds +$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)B(s,X(s))dW(s). \qquad (8)$$

Теорема 1. *Пусть $\xi-\mathfrak{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина и условия (i)-(iii) выполнены. Тогда существует мягкое решение X задачи (1) единственное с точностью до эквивалентности среди процессов, удовлетворяющих условию (6).*

Теорема 2. *Пусть X H-значный предсказуемый процесс с интегрируемыми траекториями, оператор A порождает семейства ограниченных операторов (2), (3), (4), оператор $F(s,X(s))$ - отображение из H в H, оператор $B(s,X(s))$ удовлетворяет условию существования интеграла Ито, то есть*

$$E\int_0^t \|(t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)B(s,X(s))\|^2\mathfrak{L}_{HS}(H_Q^1,Q)<\infty.$$

Если для любого $t\in[0,T]$ и $y\in D(A^*)$ решение $X(t)$ удовлетворяет равенству (7), тогда $X(t)$ удовлетворяет равенству (8) и обратно.

В детерминированном случае абстрактная задача Коши с почти секториальными операторами подробно изучена в [1]. Абстрактные стохастические уравнения с целыми порядками производных и их приложения рассматриваются в [2], [3].

Литература

1. Rong-Nian Wang, De Han Chen, Ti-Jun Xiao. Abstract fractional Cauchy problem with almost sectorial operators / Rong-Nian Wang, De Han Chen, Ti-Jun Xiao.//J.Differential Equations — 2012. — № 252. — pp. 202–235.

2. Старкова О.С. Стохастическая задача Коши в гильбертовом пространстве: модели, примеры, решения / О.С. Старкова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и програмирование» (Вестник ЮУрГУ ММГ) — 2016. — № 9(4). — С. 63–72.

3. 9. Ilolov M., Kuchakshoev K.S., Rahmatov J.Sh. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model /M. Ilolov, K.S. Kuchakshoev, J.Sh. Rahmatov// Communications in Stochastic Analysis — 2020 —№ 14(3-4) — pp. 55-69

ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ[1]

А.И. Иноземцев, Е.В. Фролова

(Липецк, ЛГПУ)

inozemcev.a.i@gmail.com, lsnn48@mail.ru

Исследуется вопрос о представлении линейного уравнения в частных производных линейным частно-интегральным уравнением Вольтерра. Теория последних изучалась профессорами П.П. Забрейко, А.С. Калитвина А.С и другими авторами (см. [1], [2] и имеющиеся в этих работах ссылки).

Сведение линейного дифференциального уравнения к интегральному описано в книге [3, стр. 31]. Нами проведено исследование возможности представления линейного дифференциального уравнения первого порядка в частных производных линейным частно-интегральным уравнением Вольтерра.

В положительном октанте $D \subset \mathbb{R}_2$ рассматривается уравнение

$$c_{00}(x)u(x) + c_{10}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + c_{01}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = F(x), \tag{1}$$

решение которого удовлетворяет граничными условиями $u(x)\Big|_{x_1=0} = g(x_2)$, $u(x)\Big|_{x_2=0} = h(x_1)$, где $x = (x_1, x_2) \in D = (0, a) \times (0, b)$, коэффициенты $c_{i,j}$ и функции $F, g(x_2), h(x_1)$ предполагаются непрерывны в $\overline{D}$.

Теорема 1. *Уравнение (1) имеет следующее представление*

$$c_{00}(x)u(x) + c_{10}(x)\int_0^{x_2} k_1(x_1, t_2)\, dt_2 + c_{01}(x)\int_0^{x_1} k_2(t_1, x_2)\, dt_1 = f(x), \tag{2}$$

где функции $k_1(x_1, x_2) = \frac{\partial \psi(x_1,t_2)}{\partial x_1}$ *и* $k_2(x_1, x_2) = \frac{\partial \varphi(t_1,x_2)}{\partial x_2}$, *а функции* $\varphi(x_1, x_2) = \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\psi(x_1, x_2) = \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ *являются решениями системы частно-интегральных уравнений*

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \frac{\partial \psi(x_1,t_2)}{\partial x_1}\, dt_2 + \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1}, \\ \psi(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{\partial \varphi(t_1,x_2)}{\partial x_2}\, dt_1 + \frac{\partial g(x_2)}{\partial x_2}, \end{cases}$$

правая часть уравнения (2) имеет следующее представление

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

$$f(x) = F(x) - c_{10}(x)\frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} - c_{01}(x)\frac{\partial g(x_2)}{\partial x_2}.$$

Литература

1. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. Калитвин, А.С. Линейные уравнения с частными интегралами C-теория / А.С.Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

3. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. — М.: Издательство Иностранной литературы, 1960. – 299.

УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ МОДЕЛИ КИТАЕВА[1]

А.А. Исмагилова, Т.С. Тинюкова (Ижевск, УдГУ)

ttinyukova@mail.ru

Актуальность исследования сверхпроводящих структур связана с их возможным применением в будущем при создании квантового компьютера. Один из подходов исследования сверхпроводников основан на изучении оператора Боголюбова-де Жена (БдЖ). Частным дискретным случаем оператора БдЖ является оператор Китаева

$$(H\psi)(n) = \begin{pmatrix} -t(\psi_1(n+1) + \psi_1(n-1)) + \Delta(\psi_2(n+1) - \psi_2(n-1)) - \mu\psi_1(n) \\ t(\psi_2(n+1) + \psi_2(n-1)) - \Delta(\psi_1(n+1) - \psi_1(n-1)) + \mu\psi_2(n) \end{pmatrix},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – номер узла в рассматриваемой бесконечной цепочке, функция $\psi_1(n)$ ($\psi_2(n)$) – волновая функция электрона (дырки), $t > 0$ – амплитуда перехода на соседний узел, Δ – вещественный параметр сверхпроводимости, μ – химический потенциал. Функции ψ_1 и ψ_2 принадлежат пространству $\ell_2(\mathbb{Z})$, а константы $t,\ \Delta,\ \mu$ определяются изучаемой системой.

Рассмотрим возмущенный оператор $H + V$, где

$$V = V_0 \begin{pmatrix} \delta_{n0} & 0 \\ 0 & -\delta_{n0} \end{pmatrix} + V_0 \begin{pmatrix} \delta_{n1} & 0 \\ 0 & -\delta_{n1} \end{pmatrix},$$

V_0 – вещественная константа. Уравнение на собственные значения оператора $H + V$ перепишем в виде

$$\psi = -(H - E)^{-1} V\psi. \qquad (1)$$

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).

Резольвента оператора H найдена в [1]. Далее, положим $E = 0$. Тогда (1) примет вид

$$\psi_j(n) = -\frac{\alpha V_0(2t\cos k_+ + \mu)}{2i\sin k_+}\Big(e^{ik_+|n|}\psi_j(0) + e^{ik_+|n-1|}\psi_j(1)\Big) +$$

$$+\frac{\alpha V_0(2t\cos k_- + \mu)}{2i\sin k_-}\Big(e^{ik_-|n|}\psi_j(0) + e^{ik_-|n-1|}\psi_j(1)\Big) -$$

$$-\alpha\Delta V_0\big(sign(n)(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|})\psi_{j'}(0) +$$

$$+sign(n-1)(e^{ik_+|n-1|} - e^{ik_-|n-1|})\psi_{j'}(1)\big), \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

где $j' = j + (-1)^{j-1}$,

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{t^2E^2 + \Delta^2(4(\Delta^2 - t^2) + \mu^2 - E^2)}},$$

$$2\cos k_\pm = \frac{t\mu \pm \sqrt{t^2E^2 + \Delta^2(4(\Delta^2 - t^2) + \mu^2 - E^2)}}{\mu^2 - t^2}.$$

Условие существования ненулевого решения системы (2) является необходимым для существования собственной функции оператора $H + V$, соответствующей нулевому собственному значению.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon = \mu - 2t$. Если $\varepsilon > 0$, то условие существования собственной функции оператора $H + V$, соответствующей нулевому собственному значению, имеет вид*

$$V_0^2 - 2V_0(\Delta + t) + 2\Delta(\Delta + t) + O(\varepsilon) = 0. \tag{3}$$

Если $\varepsilon < 0$, то $E = 0$ не является собственным значением оператора $H + V$.

Литература

1. Tinyukova T.S. Majorana states near an impurity in the Kitaev infinite and semi-infinite model / T.S. Tinyukova, Yu.P. Chuburin // Theoretical and mathematical Physics. — 2019. — 200(1). — P.1043-1052.

ДИФФУЗНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

С.Ю. Итарова (Владикавказ, СОГУ)
svetlana.itarova1991@gmail.com

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках впервые были введены в работе [1]. Интерес к данному классу операторов обусловлен тем фактом, что классические операторы нелинейного анализа, такие как операторы Немыцкого, Гаммерштейна и Урысона ортогонально аддитивны в подходящих функциональных пространствах. В работе [2] был введены регулярные ОАО, там же было установлено, что в случае порядковой полноты векторной решетки образов F пространство $OA_r(E,F)$ регулярных ОАО из E в F является порядково полной векторной решеткой. Этот факт позволил применить к исследованию структуры пространства ОАО хорошо разработанные методы порядкового анализа и теории векторных решеток [3].

Приведем необходимые определения. Стандартным источником для ссылок по теории векторных решеток является монография [4]. Пусть E — векторная решетка и F — векторное пространство над полем действительных чисел. Отображение $T\colon E \to F$ называется *ортогонально аддитивным оператором* (или ОАО для краткости) если $T(x+y) = Tx + Ty$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$.

Ортогонально аддитивный оператор T, действующий из векторной решетки E в векторную решетку F *сохраняет дизъюнктность*, если $Tx \perp Ty$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$. Пусть E, F – векторные решетки, причем решетка F порядкова полна. Полосу в $\mathcal{OA}_r(E,F)$, порожденную всеми сохраняющими дизъюнктность ОАО, обозначим через $\mathcal{OA}_{dpo}(E,F)^{\perp\perp}$. Элементы дополнительной полосы $\mathcal{OA}_{dpo}(E,F)^{\perp}$ называются *диффузными* операторами.

Пусть E — векторная решетка и $x \in E$. Через Θ_x обозначим семейство всех конечных дизъюнктных разбиений элемента x. Для $\theta, \eta \in \Theta_x$ запишем $\theta \leqslant \eta$, если для любого $v \in \theta$ найдется подмножество $\{u_1, \dots, u_l\} \in \eta$ такое что $v = \bigsqcup\limits_{i=1}^{l} u_i$.

Пусть E, F – векторные решетки, причем решетка F порядково полна и $T \in \mathcal{OA}_r(E,F)$. Положим по определению

$$\rho_T(x) = \bigwedge_{\theta \in \Theta_x} \bigvee_{y \in \theta} |T|y, \quad x \in E. \tag{1}$$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. *Пусть E, F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна. Тогда для регулярного ортогонально аддитивного оператора $T\colon E \to F$ эквивалентны следующие условия:*

1. *T — диффузный оператор;*

2. *$\mathfrak{p}_T(x) = 0$ для любого $x \in E$.*

.

Литература

1. Mazón J. M. Order bounded orthogonally additive operators / J. M. Mazón, S. Segura de León // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1990. — T. 35, № 3. —C. 329–353.

2. Pliev M. Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices / M. Pliev, K. Ramdane // Mediter. J. Math. — 2018. — T. 15, № 2.

3. Mykhaylyuk V. The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators / V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov // Positivity. — 2021. — T. 125, № 2. — C. 291–327.

4. Aliprantis C. D. Positive Operators / C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw. — Springer. : 2006. — 376 c.

НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова (Магнитогорск, МГТУа)

sikadchenko@mail.ru

Методы нахождения асимптотических формул собственных значений дискретных полуограниченных операторов в каждом случае индивидуальны. В этом исследовании разработана методика, позволяющая находить асимптотические формулы собственных значений для дискретных полуограниченных операторов заданных на компактных множествах используя одни достаточно простые алгоритмы. Это значительно упрощает методику их нахождения и позволяет написать программы нахождения асимптотических формул, используя ЭВМ.

Рассмотрим дискретный полуограниченный оператор L, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D_L \in H$, порождающий краевую задачу

$$Lu = \mu u, \quad Gu|_\Gamma = 0, \tag{1}$$

где Γ – граница области D_L. Производя дискретизацию области D_L построим последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств, которая полна в H. Пусть ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ пространств $H_n \subseteq H$ удовлетворяет однородным граничным условиям задачи (1). Для нахождения приближенного решения краевой задачи (1) используя метод Галеркина решение (1) ищем в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n)\varphi_k. \tag{2}$$

Теорема 1. *Приближенные собственные значения $\widetilde{\mu}_n$ спектральной задачи (1) находятся по линейным формулам*

$$\widetilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \widetilde{\delta}_n, \ n \in N, \tag{3}$$

где $\widetilde{\delta}_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}[\widetilde{\mu}_k(n-1) - \widetilde{\mu}_k(n)]$, $\widetilde{\mu}_k(n)$ — *n - е приближения по Галеркину к соответствующим собственным значением μ_k спектральной задачи (1).*

Используя теорему 1, нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\delta}_n = 0. \tag{4}$$

Для того чтобы воспользоваться формулами (3) при вычислении приближенных собственных значений краевой задачи (1), надо иметь систему координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая была бы ортонормированным базисом H и удовлетворяла граничным условиям (1). Это можно сделать если оператор L представить в виде $L = T + P$, где T - самосопряженный дифференциальный оператор такого же порядка, что и оператор L с областью определения D_L. В этом случае за систему координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно взять систему собственных функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ спектральной задачи

$$Tv = \lambda v, \quad Gv|_{\Gamma} = 0. \tag{5}$$

Найдя собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T, формулы (3) запишем в виде

$$\widetilde{\mu}_n(n) = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \widetilde{\delta}_n, \quad \forall n \in N. \tag{6}$$

С учетом (4), для очень больших порядковых номеров $\tilde{\mu}_n$, формулы (6) являются асимптотическими. Для проверки данного утверждения рассмотрим спектральные задачи, порожденные дифференциальными операторами произвольного четного порядка, заданные в $L_2[0,\pi]$, вида [1]

$$(T_m + P_m)u_m(s) = \mu_m u_m(s), \quad 0 < s < \pi, \tag{7}$$

$$u_m^{(2\nu-1)}(0) = u_m^{(2\nu-1)}(\pi) = 0, \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{8}$$

где $T_m u_m(s) = (-1)^m \dfrac{d^{2m} u_m(s)}{ds^{2m}}$, $P_m u_m(s) = p_0(s) u_m(s)$, $m \geqslant 1$.

Теорема 2. *Асимптотические формулы для собственных значений μ_m краевых задач (7), (8) имеют вид*

$$\mu_{m_n} = n^{2m} + a_{m_0} + a_{m_{2n}} + O\Big(\frac{1}{n^{2m-1}}\Big), \quad n \to \infty, \tag{9}$$

где

$$a_{m_n} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi p_{m_0}(s) \cos(ns) ds, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{10}$$

Для построения ортонормированной системы функций, являющейся базисом пространства $L_2[0,\pi]$ и удовлетворяющая граничным условиям (8), рассмотрим спектральные задачи

$$T_m v_m(s) = \lambda_m v_m(s), \quad 0 < s < \pi, \tag{11}$$

$$v_m^{(2\nu-1)}(0) = v_m^{(2\nu-1)}(\pi) = 0, \quad \nu = \overline{1,m}. \tag{12}$$

В работе [1] показано, что (11) и (12) являются самосопряженными задачами, собственные значения λ_{m_n} и ортонормированные собственные функции v_n которых имеют вид

$$\lambda_{m_n} = n^{2m}, \quad v_n = \sigma_n cos(ns), \quad \sigma_n = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\pi}}, & n = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, & n > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Запишем формулы (6) используя (13)

$$\widetilde{\mu}_{m_n}(n) = \lambda_{m_n} + (P_m v_n, v_n) + \widetilde{\delta}_{m_n} = n^{2m} + \sigma_n^2 \int\limits_0^\pi \cos^2(ns) p_{m_0}(s) ds +$$

$$+ \widetilde{\delta}_{m_n} = n^{2m} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi [1 + \cos(2ns)] p_{m_0}(s) ds + \widetilde{\delta}_{m_n}.$$

Или используя обозначения (9), (10) имеем

$$\widetilde{\mu}_{m_n}(n) = n^{2m} + a_{m_0} + a_{m_{2n}} + \widetilde{\delta}_{m_n}, \quad \forall n \in N. \tag{14}$$

Если сравнить асимптотические формулы (9) с формулами (14), то они отличаются только порядком погрешностей. Это подтверждает тот факт, что формулы (6) являются при больших значениях порядковых номеров собственных значений являются асимптотическими.

Литература

1. Бехири С.Э. Асимптотическая формула для собственных значений регулярного двухчленного дифференциального оператора произвольного четного порядка / С.Э. Бехири, А.Р. Казарян, И.Г. Хачатрян // Ученные записки Ереванского государственного университета. Естественные науки. 1994. № 1. - С. 3–18.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ[1]

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина (Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского)

avk@mm.unn.ru

В работе исследуются различные постановки краевых задач для периодических по времени решений системы уравнений Максвелла в квазистационарных приближениях [1]. Рассматриваются нерелятивистское магнитное приближение [1-4], нерелятивистское электрическое приближение [1,5] и обобщающее их квазистационарное приближение [6,7], в котором в токе смещения сохраняется потенциальная часть электрического поля. Изучается случай неоднородных сред, содержащих проводящие, непроводящие и слабопроводящие включения [3,4]. Исследуется асимптотическая связь решений задач с непроводящими и слабопроводящими включениями.

Литература

1. Толмачев В.В. Термодинамика и электродинамика сплошной среды / В.В. Толмачев, А.М. Головин, В.С. Потапов. — М. : Изд-во МГУ, 1988. — 230 с.

2. Alonso Rodriguez A. Eddy current approximation of Maxwell equations / A. Alonso Rodriguez, A. Valli. — Springer-Verlag Italia, 2010.

3. Kalinin A.V. Modified Coulomb and Lorenz gauges in the modeling of low-frequency electromagnetic processes / A.V. Kalinin, A.A. Tyukhtina, S.R. Lavrova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — V. 158, № 1. — P. 012046.

4. Калинин А.В. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями / А.В. Калинин, А.А. Тюхтина // Журнал Средневолжского математического общества. — 2016. — Т. 18, № 4. — С. 119–133.

5. Kalinin A.V. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit / A.V. Kalinin, N.N. Slyunyaev //

[1] Работа поддержана научно-образовательным математическим центром «Математика технологий будущего» (Соглашение № 075-02-2022-883).

Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2017. — V. 450, № 1. — P. 112-136.

6. Калинин А.В. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах / А.В. Калинин, А.А. Тюхтина // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 8. — С. 121–134.

7. Kalinin A.V. Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields / A.V. Kalinin, A.A. Tyukhtina // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23 - 27, 2020, Revised Selected Papers. — Springer, 2021. — P. 77–92.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ С ПЕРЕМЕННЫМИ И ПОСТОЯННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В.А. Калитвин (Липецк, ЛГПУ)

kalitvin@mail.ru

К уравнениям с частными интегралами

$$x(t,s) = \int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$
$$+ \int\limits_a^t\int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s) \tag{1}$$

и их частным случаям приводятся различные прикладные задачи [1–3]. Найти решение интегрального уравнения (1) в явном виде сложно. Поэтому важной задачей является создание приближенных и численных схем решения уравнения (1). Применение известных методов решения линейных интегральных уравнений к уравнениям (1) требует осторожности, так как в этом случае часто используется компактность интегральных операторов, которой не обладают частично интегральные операторы, определяемые правой частью уравнения (1) даже в случае ненулевых непрерывных ядер $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$. Рассмотрим частный случай уравнения (1)

$$x(t,s) = \int\limits_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_a^t\int\limits_c^d k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s), \tag{2}$$

где $t \in [a,b], s \in [c,d]$, функции $c(\tau,s), k(\tau,s,\sigma)$, $f(t,s)$ и $f'_t(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Решение уравнения (2) является решением интегро-дифференциального уравнения Барбашина (ИДУБ)

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int\limits_c^d k(t,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f'_t(t,s) \tag{3}$$

с начальным условием

$$x(a,s) = f(a,s). \tag{4}$$

Интегральное уравнение (2) и задача Коши (3)/(4) эквивалентны. Задача Коши (3)/(4) эквивалентна двумерному интегральному уравнению:

$$x(t,s)=\int\limits_a^t\int\limits_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+g(t,s)\equiv(Rx)(t,s)+g(t,s), \quad (5)$$

где $r(t,s,\tau,\sigma)=e^{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi}k(\tau,s,\sigma)$,

$$g(t,s)=\int\limits_a^t e^{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi}f'_t(\tau,s)d\tau+f(a,s)e^{\int\limits_a^t c(\xi,s)d\xi}.$$

Уравнение (5) является линейным интегральным уравнением с непрерывным ядром $r(t,s,\tau,\sigma)$ и непрерывной функцией $g(t,s)$, оно имеет единственное решение в $C(D)$ [2,3]. При численном решении линейного интегрального уравнения (2) с частными интегралами можно перейти к линейному двумерному интегральному уравнению (5) и решать его с помощью известных методов численного решения линейных интегральных уравнений, например, с применением метода механических квадратур. Этот подход можно использовать для решения нелинейных интегральных уравнений с частными интегралами вида

$$x(t,s)=\int\limits_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_a^t\int\limits_c^d k(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma+f(t,s), \quad (6)$$

где $t\in[a,b], s\in[c,d]$, $u\in(-\infty,+\infty)$, заданные функции $c(\tau,s)$, $k(\tau,s,\sigma,u)$, $f(t,s)$ и функция $f'_t(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных, функция $k(\tau,s,\sigma,u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|k(\tau,s,\sigma,u)-k(\tau,s,\sigma,v)|\leqslant N|u-v|,$$

а интегралы понимаются в смысле Лебега. Линейное интегральное уравнение (2) с частными интегралами есть частный случай уравнения (6), оно получается из (6) при $k(\tau,s,\sigma,u)\equiv k(\tau,s,\sigma)u$.

Разработку программ и вычисления удобно проводить с применением языка программирования Python.

Литература

1. Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. – New York-Basel : Marcel Dekker. – 2000. – 560 p.

2. Калитвин, А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Воронеж : ЦЧКИ. – 2000. – 252 с.

3. Калитвин, А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. – Липецк : ЛГПУ. – 2006. – 177 с.

ОБ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ СОДЕРЖАЩЕГО ОПЕРАТОР БЕССЕЛЯ

А.А. Катрахова, В.С. Купцов (Воронеж, ВГТУ)
vckuptsov@rambler.ru

Пусть $R_+^{n+1} = \{x \in R^{n+1} : x = (x_1, x_2, ..., x_n, y), x' \in R^n, y \in R, y > 0\}$,
Ω^+ - произвольная область пространства R_+^{n+1} , ограниченная гиперплоскостью Γ^0; $y = 0$ и произвольной поверхностью типа Ляпунова Γ^+,Q_Γ^+ - цилиндр в пространстве R_+^{n+1};$Q_\Gamma^+ = \Omega^+ \times [0, T]$.

В цилиндре рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Pu = f \tag{1}$$

$$u|_{y=0} = \varphi; \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi; \quad u|_{\Gamma^+ \times [0,T]} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Gamma^0 \times [0,T]} = 0 \tag{2}$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ - данные функции, $f(x,t)$– функция заданная в цилиндре $Q_\Gamma^+ : x \in \Omega^+, t \in [0, T]$.

$$P(D_x; B_y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + bB_y + c; \quad B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, k > 0, c \leqslant 0 \tag{3}$$

Предполагается, что $P(D_x; B_y)$ - оператор B эллиптического типа [1]: существует $\delta > 0$, такое, что для любого $q = (q_1, q_2, ..., q_{n+1}), |q| \neq 0$ имеет место неравенство:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i q_j + bq_{n+1}^2 \geqslant \delta |q|^2; a_{ij} = a_{ji} \tag{4}$$

В работе [2] доказано, что существует неубывающая последовательность собственных значений $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_i \leqslant \cdots$ и последовательность соответствующих им собственных функций $v_j(x)$, четных по переменной y , непрерывно дифференцируемых в Ω^+ сколь угодное число раз. Система функций $v_j(x)$ плотна в пространстве L_2, к Ω^+.

Авторами доказано [3], что билинейный ряд вида

$$\sum_{p=1}^{\infty} v_p^2(x) \lambda_p^{-\left[\frac{a+b+1}{2}\right]-1}; \tag{5}$$

где $[\gamma]$ - целая часть числа γ, сходится равномерно во всей замкнутой области Ω^+. Используя оценки для функций Грина $F(x,\xi)$ задачи

$$Pu = f, x \in \Omega^+, u|_{\Gamma^+} = \varphi, \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Gamma^0} = 0, \tag{6}$$

$F(x,\xi) \leqslant c_1 r^{1-n-k}$ при $y,\eta \geqslant 0$, $F(x,\xi) \leqslant c_1 r^{1-n}$ при $y,\eta > 0$,

где c_1 – некоторая положительная константа, для l – го повторного ядра $F_l(x,z) = \int_{\Omega^+} F_{l-1}(x,\xi)F(\xi,z)\eta^k d\xi$
Получены следующие оценки
$F_l(x,\xi) \leqslant c_1 r_{x\xi}^{2l-n-k-1}$ при $y,\eta \geqslant 0$;$F_l(x,\xi) \leqslant c_2 r_{x\xi}^{2l-n-1} y,\eta > 0$,
где $r_{x\xi} = |x-\xi|$, а положительные константы c_1 и c_2 не зависят от x и ξ, это позволяет сделать заключение, что ядро $F_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}(x,\xi)$ равномерно непрерывно по совокупности переменных x и ξ во всей замкнутой области Ω^+.

Поскольку ядро $F_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}(x,\xi)$ является положительно определенной симметрической функцией, то по теореме Мерсера, это ядро представимо в виде ряда, абсолютно и равномерно сходящегося в области $\overline{\Omega^+}$:

$$F_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\left[\frac{n+k+1}{2}\right]-1} v_j(x)v_j(\xi);$$

При $x = \xi$ отсюда следует равномерная сходимость ряда (5) в области $\overline{\Omega^+}$.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. —Москва: Наука, 1997.

2. Сазонов А.Ю. О функциях Грина задачи Дирихле для B – эллиптического уравнения второго порядка / Дифференциальные уравнения. 1986. —Т.22. №12

3. Катрахова А.А., Сазонов А.Ю., Купцов В.С. О разрешимости некоторых сингулярных краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов, содержащих оператор Бесселя // Сб.трудов VII Международной научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». 2014. Научная книга

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЦИКЛЫ В ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

А.А. Кащенко (Ярославль, ЯрГУ)
a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} + u = \lambda F(u(t-T)), \qquad (1)$$

где u — действительная функция, величина запаздывания T положительная, λ — достаточно большая положительная величина, функция $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} b, \quad x \leqslant p_L, \\ f(x), \quad p_L < x < p_R, \\ d, \quad x \geqslant p_R, \end{cases}$$

где p_L, p_R, b и d — константы, при этом $p_L < 0 < p_R$. Мы предполагаем, что функция $f(x)$ кусочно-гладкая, сохраняет знак на интервалах $(p_L, 0)$ и $(0, p_R)$, и если $f(x_0) = 0$, то $f'(x_0) \neq 0$. Мы рассматриваем положительные, отрицательные и нулевые значения параметров b и d.

Цель исследования состоит в построении асимптотики решений этого уравнения и нахождении условий на знаки параметров b и d, при которых у уравнения (1) будут существовать релаксационные циклы. Мы рассматриваем все возможные случаи комбинаций знаков параметров b и d и находим условия на функцию $f(x)$, при которых у исходного уравнения будут существовать релаксационные циклы, находим асимптотику циклов, амплитуду и период.

МОДЕЛЬ ЛОГИКО-СЕМАНТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ В ОПЕРАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Ш. Каюмов, А.П. Марданов, Т.О. Хаитов (Ташкент, ТГТУ)
kayumovmatemic@gmail.com, apardayevich@mail.ru,
tojiboy.xaitov.77@gmail.ru

В процессе обучения студенты и магистранты должны выполнять следующие работы: расчетно-графические работы (РГР), домашние контрольные работы (ДКР), изучение вопросов для коллоквиума, а также выполнять ряд контрольно-измерительных работ (КИР).

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект № МК-2510.2022.1.1).

Методические рекомендации.

повторное выполнение действия с целью его усвоения. В различных условиях обучения упражнение является единственной процедурой, в которой осуществляются все компоненты процесса учения (научения) — уяснение содержания действия, его закрепление, обобщение и автоматизация, — либо одной из процедур наряду с объяснением и заучиванием, которые предшествуют упражнению и обеспечивают первоначальное уяснение содержание действия и его предварительное закрепление. Упражнение обеспечивает завершение уяснения и закрепления, а также обобщения и автоматизации, что приводит к полному овладению действием и превращению его — в зависимости от достигнутой меры автоматизации — в умение или навык. Упражнение может осуществляться и сразу после объяснения, без предварительного заучивания, при этом закрепление полностью происходит в процессе упражнения [1].

Легко заметить в указанных определениях основная идея «в овладении действием … превращение его в умение и навык». Представим упражнение, целью которого является автоматизм, но автоматизм постановки вопросов, ведущих к знанию, ведущих к поисковым задачам в самообразовании. Понятно, что на первых этапах обучения эти вопросы могут не возникать, особенно в методике алгоритмизации и узнавания по текстам задач алгоритмов решения задач. Исключение задач по математике на вербализацию хода решения задачи приводит к формализации и алгоритмизации процесса их решения, что совершенно противоречит сути смыслов математических задач их учебному потенциалу.

В современном образовании реальность такова, что информационное пространство оказывает значительное влияние на процесс обучения. «О многом ученики узнают из информационного пространства гораздо раньше, чем им об этом сообщит учитель. Зачастую ученики могут воспринимать информацию искаженно, неполно, поэтому их представления о объекте, который изучаются на уроках, могут быть мифологизированными, неточными, а зачастую, и неправильными» [2].

В истории применения математики в инженерном деле, известно: пользовались популярностью методы решения дифференциальных уравнений, где просто использовался вычислительный аппарат и был «прозрачен» для понимания. У инженеров внимание было направленно на символические (операционный) методы интегрирования линейных дифференциальных уравнений и систем. Этот метод был усовершенствован американским инженером – электриком Оливером Хэвисайдом (1850-1925). Сначала этот метод был предложен без строгого математического обоснования. Но в дальнейшем математическое толкование привело к дальнейшему развитию символических методов [3-4].

Применение операционного метода для решения задача Коши позволяет, свести решение дифференциального уравнения для некоторой функции $x(t)$, к решению алгебраического уравнения относительно ее «изображения» — функции $X(p)$. Операции над изображением оказываются более простыми. ЛСС можно описать через следующим образом:

Литература

1. Л.А. Карпенко., Петровский А.В., Ярошевский М.Г. Краткий психологический словарь. — Феникс. 1998 г.

2. Осмоловская И.М. Организация дифференцированного обучения в современной общеобразовательной школе. — Воронеж: [МОД-ЭК], 2005 г. 214 с.

3. Волков И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление: учебник для вузов / И. К. Волков, А. Н. Канатников. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 228 с.

4. Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. Теория функция комплексной переменной и операционное исчисление. Мн.: Тетра Систем, 2002. — 208 с.

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

А.В. Келлер (Воронеж, ВГТУ)

alevtinak@inbox.ru

Задача восстановления динамически искаженного входного сигнала по известному выходному при известных параметрах модели измерительное устройство, является второй обратной задачей теории динамичсеких измерений. Для ее решения А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком предложили использовать методы оптимального управления. В рамках совместной работы инженерной и математической школ при различных условиях разработаны математические модели, численные методы, и это направление исследований стали называть теорией оптимальных динамических измерений [1].

Измерительное устройство (ИУ) моделируется системой леонтьевского типа

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + D\eta, \end{cases} \tag{1}$$

а его начальное состояние — условием Шоуолтера — Сидорова

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \tag{2}$$

при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$. Здесь $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ — вектор- функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $y(t)$ — вектор- функция выходного сигнала; A и L — квадратные матрицы состояний и взаимовлияния скоростей состояния ИУ (причем, $\det L = 0$ [2]); C и D — матрицы, характеризующие связи между состоянием ИУ и наблюдением; $u(t)$ — вектор-функция измерения (или входного сигнала); $\eta(t)$ — вектор-функция помех на выходе ИУ. Кроме того, при решении задачи (1) и (2) важным условием является (L, p)-регулярность матрицы M.

Введя необходимые пространства, зададим функционал штрафа

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| y^{(q)}(u,t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \tag{3}$$

где $y_0(t)$ — выходной сигнал, получаемый в ходе натурного эксперимента, $y(t)$ — моделируемый выходной сигнал, $||\cdot||$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Необходимо найти такую вектор-функцию моделируемого измерения $v \in \mathfrak{U}_\partial$ (на компактном выпуклом множестве допустимых моделируемых измерений), при которой функционал штрафа (3) достигает минимального значения, т.е.

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{4}$$

при этом $x(v) \in \chi$ удовлетворяет системе (1) почти всюду на $(0, \tau)$ и при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$ — условию Шоуолтера–Сидорова (2). Вектор-функцию $v \in \mathfrak{U}_\partial$ называют оптимальным динамическим измерением.

В докладе представлются результаты разработки нового численного алгоритма решения задачи (1) — (4) с использованием цифрового фильтра для выходного сигнала и последующим сведением ее к задаче при $D = 0$ проводится сравнение алгоритма с ранее разработанными [3] —[5].

Литература

1. Shestakov A.L. The optimal measurements theory as a new paradigm in the metrology / A.L. Shestakov, A.V. Keller, A.A. Zamyshlyaeva, N.A. Manakova, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2020. — vol. 7, no. 1. — pp. 3–23.

2. Khudyakov, Yu.V. On mathematical modeling of the measurement transducers / Yu.V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2016. — vol. 3, no. 3. — pp. 68–73.

3. Shestakov, A.L. Numerical investigation of optimal dynamic measurements / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller, Yu.V. Khudyakov, A.A. Zamyshlyaeva // Acta IMEKO. — 2018. — vol. 7, no. 2. — pp. 65–72.

4. Keller, A.V. Optimal Dynamic Measurement Method Using the Savitsky - Golay Digital Filter / A.V. Keller // Differential Equations and Control Processes. — 2021. — vol. 1. — pp. 1–15.

5. Келлер А.В. Одномерный фильтр Калмана в алгоритмах численного решения задачи оптимального динамического измерения / А.В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математическое моделирование и программирование. — 2021. — Т. 14, № 4. — С. 120–125.

ПОВЫШЕНИЕ ПРИКЛАДНОГО ЗНАЧЕНИЯ КУРСА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ» С ПОМОЩЬЮ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

И. С. Козловская (Минск, БГУ)
kozlovskaja@bsu.by

Дифференциальные уравнения с частными производными образуют раздел математики, который теснейшим образом связывает общую математическую теорию с приложениями — например, к математической физике, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, механике, астрономии. Сегодня дифференциальные уравнения находят свое применение и в таких областях человеческой деятельности, которые, на первый взгляд, весьма далеки от математики — например, в медицине, криминалистике, социологии, генетике.

Поэтому при чтении лекций по курсу «Уравнения математической физики» и «Дифференциальные уравнения с частными производными» в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области. Основная задача состоит в том, чтобы научить студента умению применять на практике методы решения задач, возникающих в прикладных вопросах, связанных с математическими модулями, которые описываются дифференциальными уравнениями с частными производными.

Прежде всего для курса Уравнения математической физики создан электронный учебно-методический комплекс на основе мультимедийных технологий, который Белорусским государственным университетом депонирован в депозитарном фонде сигнальных экземпляров депонированных документов и зарегистрирован в нем документ ее научно-методического обеспечения. Библиографическое описание и аннотация настоящего издания размещены опубликованы в «Журнале Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2021, № 2». Копия документа размещена по адресу: https://elib.bsu.by/handle/123456789/257012 в Электронной библиотеке БГУ Этот программный комплекс включает учебные, научные и методические материалы, методику изучения дисциплины средствами информационно-коммуникационных технологий. ЭУМК обеспечивает условия для осуществления эффективной учебной деятельности. Основными элементами ЭУМК являются типовая и учебная программа дисциплины Уравнения математической физики, теоретический раздел, практический раздел и раздел контроля знаний.

Очень своевременным и эффективным в последнее время оказалось внедрение системы дистанционного обучения на базе организованной в БГУ LMS Moodle. Созданный на этом образовательном портале курс «Уравнения математической физики» содержит как общий блок, так и отдельно блок для чтения лекций и блок для ведения практических занятий для каждого преподавателя. Каждый блок прежде всего несет информативный характер, представляя данные о преподавателе и различных методах взаимосвязи со студентами, ссылки на программы и необходимую литературу, различные базы данных, а также позволяет сделать текущие объявления. Широко использованы коммуникационные возможности системы, такие как чат, форум. Во время пандемии активно использовался такой ресурс, как видеоконференция, позволяющий качественно читать лекции по курсу и вести практические занятия. Система позволяет проверить посещаемость, выдать задание и оценить полученные ответы, представить всевозможные презентации и вести активный диалог со студентами. Во время экзаменационной сессии в полном объеме использовался такой элемент курса как тестирование. В целом этот образовательный ресурс позволил поддержать высокий уровень преподавания курса Уравнения математической физики.

С другой стороны, большое внимание уделяется и решению такой проблемы, как помощь современных средств компьютерной математики в более глубоком понимании студентами изучаемых ими классических математических тем. Например, курс «Уравнения математической физики», эффективно дополнен лабораторными занятиями с использованием Wolfram Mathematica, что позволяет студентам ознакомиться с графическими возможностями пакета Mathematica, эффективно проиллюстрировать решение одномерных уравнений и систем уравнений в частных производных, решать двумерные задачи математической физики в режиме графического интерфейса.

О ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ УСЛОВНО КОРРЕКТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ[1]

М.Ю. Кокурин (Йошкар–Ола, МарГУ)
kokurinm@yandex.ru

Изучается класс нелинейных обратных задач, описываемых операторными уравнениями

$$F(x) = f,\ x \in D. \tag{1}$$

Здесь $F : X \to Y$ — оператор прямой задачи, который предполагается инъективным и дифференцируемым по Фреше на выпуклом компакте $D \subset X$; X и Y есть вещественные гильбертовы пространства. Обозначим $x^{\uparrow} = F^{-1}(f)$. Предполагаем, что производная F' удовлетворяет условию Липшица на D. Из–за неизбежных ошибок измерения и моделирования, вместо элемента f и оператора F в (1) обычно доступны их приближения $\widetilde{f} \in Y$ и $\widetilde{F} : X \to Y$. Типичными требованиями к качеству аппроксимации являются следующие:

$$\|\widetilde{f} - f\|_Y \leqslant \delta, \tag{2}$$

приближенный оператор $\widetilde{F}$ дифференцируем по Фреше, и

$$\|\widetilde{F}(x) - F(x)\|_Y \leqslant h\ \forall x \in D. \tag{3}$$

Для решения задачи (1) в условиях (2), (3) рассматривается схема квазирешений В.К.Иванова

$$\widetilde{x}^{\uparrow} = \mathrm{argmin}_{x \in D} \widetilde{J}(x),\ \widetilde{J}(x) = \|\widetilde{F}(x) - \widetilde{f}\|_Y^2 \tag{4}$$

и ее дискретный вариант

$$\widehat{x}^{\uparrow} = \widehat{x}^{\uparrow}_{NM} \in \mathrm{argmin}_{\widehat{x} \in \widehat{D}} \widehat{J}(\widehat{x}),\ \widehat{J}(\widehat{x}) = \|\widehat{F}(\widehat{x}) - \widehat{f}\|^2_{X_N}. \tag{5}$$

При построении (5) вводятся семейства конечномерных пространств $\{X_N\}_{N=1}^{\infty}$ и $\{Y_M\}_{M=1}^{\infty}$, аппроксимирующие исходные пространства

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20–11–20085).

X и Y соответственно. Здесь X_N, Y_M могут не быть подпространствами в X, Y. Далее, $\widehat{D} = \widehat{D}_N \subset X_N$ является конечномерной аппроксимацией множества D. Предполагается, что $\widehat{D}$ являются выпуклыми компактами. Вводятся связывающие линейные отображения $P_N : \mathcal{D}(P_N) \subset X \to X_N$ и $Q_M : \mathcal{D}(Q_M) \subset Y \to Y_M$. Здесь $\mathcal{D}(P_N)$ и $\mathcal{D}(Q_M)$ являются линейными, не обязательно замкнутыми подпространствами в X и Y соответственно, операторы P_N, Q_M не обязательно непрерывны. Кроме того, $\widehat{F} : X_N \to Y_M$ — дифференцируемый оператор, который служит конечномерной аппроксимацией возмущенного оператора $\widetilde{F}$, элемент $\widehat{f} = Q_M \widetilde{f}$.

Устанавливается, что при реализации дискретизированной схемы квазирешений (5) с приближенно заданным оператором F можно избежать нахождения глобального минимума в (5), ограничившись поиском произвольной стационарной точки, не слишком далекой от глобального минимума, без необходимости перебирать все такие точки. Это же верно и для исходной схемы (4). Ключевым условием является требование условной устойчивости задачи (1) в решении $x^{\uparrow}$, выражаемое неравенством [1, 2]

$$\|F(x) - F(x^{\uparrow})\|_Y \geqslant m\|x - x^{\uparrow}\|_X^p \ \forall x \in D \ (m > 0, p \in [1, 2]). \qquad (6)$$

Условие (6) выполняется для многих прикладных коэффициентных обратных задач, связанных с уравнениями математической физики. В докладе приводятся результаты численных экспериментов.

Литература

1. Кокурин М.Ю. О кластеризации стационарных точек функционалов невязки условно-корректных обратных задач // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2018. — Т. 21, № 4. — С. 393–406.

2. Kokurin M.Y. On the global minimization of discretized residual functionals of conditionally well-posed inverse problems // Journal of Global Optimization. — 2022. — https://doi.org/10.1007/s10898-022-01139-x.

УТОЧНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКОГО ДЕЛИТЕЛЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЭТАЛОНА

А.И. Колпаков, А.М. Райцин
Москва, ФГУП «ВНИИОФИ», Москва, МТУСИ
1978fox@mail.ru, arcadiyram@rambler.ru

В оптико-электронных информационно-измерительных системах эталонов с применением лазеров часто используются оптические делители (ОД) мощности излучения, позволяющие по небольшой величине отражённого от него излучения измерить мощность источника [1-2].

При проведения таких измерений необходимо знать коэффициент деления ОД

$$K_{\text{Д}} = \frac{K_{\text{пр}}}{K_{\text{отр}}},$$

где $K_{\text{пр}}$- коэффициент пропускания ОД, $K_{\text{отр}}$- коэффициент отражения излучения от ОД,

Как предложено в [3] для определения коэффициента деления, в проходящем через ОД и отражённом от него лазерном пучке устанавливаются средства измерений (СИ1 и СИ2) мощности, с коэффициентами преобразований $K_{\text{СИ}1}$ и $K_{\text{СИ}2}$ соответственно. Показано [3],что для получения оптимальной оценки коэффициента деления необходимо проводить дополнительную серию из n измерений, меняя местами СИ1 и СИ2, при этом оценка коэффициента деления определяется выражением

$$\hat{K}_{\text{Д}} = \sqrt{K_{\text{Д}1} K_{\text{Д}2}} = \sqrt{\frac{\hat{\hat{U}}_1^*}{\hat{\hat{U}}_2^*} \frac{\hat{\hat{U}}_2}{\hat{\hat{U}}_1}},$$

где $K_{\text{Д}1} = \frac{K_{\text{СИ}1}}{K_{\text{СИ}2}} K_{\text{Д}} = \frac{\hat{\hat{U}}_1^*}{\hat{\hat{U}}_2^*}$, $K_{\text{Д}2} = \frac{K_{\text{СИ}2}}{K_{\text{СИ}1}} K_{\text{Д}} = \frac{\hat{\hat{U}}_2}{\hat{\hat{U}}_1}$, $\hat{\hat{U}}_1 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} U_1(i)$;

$\hat{\hat{U}}_2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} U_2(i)$; $\hat{\hat{U}}_1^* = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{U}_1(i)$; $\hat{\hat{U}}_2^* = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{U}_2(i)$;

$U_1(i)$, $U_2(i)$, $i = 1, 2, ...n$ - результаты измерений мощности СИ1 и СИ2; $\tilde{U}_1(i)$,$\tilde{U}_2(i)$, $i = 1, 2, ...n$ - результаты измерений мощности СИ1 и СИ2 в дополнительной серии измерений.

Для получения достоверных результатов при использовании ОД в схеме передачи единицы мощности излучения от эталона к калибруемому средству измерений, процедура определения коэффициента деления должна производится в каждом цикле калибровки. В этом случае перемена местами упомянутых средств измерений трудоёмка и приводит к дополнительной погрешности. В работе предложен алгоритм, позволяющий производить определение коэффициента деления без последующей перемены местами средств измерений. Тогда перед каждой новой калибровкой производится серия измерений сигналов на выходе СИ2 $U_2^{**}(i)$, $i = 1, 2, ..., n$ и СИ1 $U_1^{**}(i)$, $i = 1, 2, ..., n$, расположенных на пути проходящего и отражённого от ОД излучения. В работе показано,что оценка нового коэффициента деления $\hat{K}_{\text{Д}}^*$ определяется с учётом уточняющего (поправочного) коэффициента

$$\hat{K}_{\text{Д}}^* = \hat{K}_{\text{Д}} K_{\text{П}},$$

где $K_{\text{П}} = \frac{\hat{\bar{U}}_2^{**}}{\hat{\bar{U}}_1^{**}} \frac{\hat{\bar{U}}_1}{\hat{\bar{U}}_2}$ - поправочный коэффициент,

$\hat{\bar{U}}_2^{**} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} U_2^{**}(i)$, $\hat{\bar{U}}_1^{**} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} U_1^{**}(i)$.

Определение уточнённого коэффициента деления ОД в соответствии с приведённым алгоритмом позволяет упростить процесс калибровки без ухудшения точности результатов измерений.

Литература

1. Иванов В.С. Основы оптической радиометрии /Иванов В.С., Золотаревский Ю.М., Котюк А.Ф., Либерман А.А. и др. - М.: Физматлит, 2003. - 544 с.

2. Райцин А.М. Способ калибровки/поверки средств измерений мощности лазерного излучения /Райцин А.М., Улановский М.В. // Патент RU 2687303 C1, опубл. 13.05.2019, бюл. №14.

3. Колпаков А.И. Определение характеристик оптического делителя лазерного излучения в информационно измерительных системах/А.И.Колпаков, А.М.Райцин//Материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения - XXXI (3–9 мая 2020 г.) - Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020 - С.112-113.

ОБ АСИМПТОТИКЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА-КОЛМОГОРОВА

А.Н. Конёнков (Рязань, РГУ)
a.konenkov@365.rsu.edu.ru

Рассматривается задача Коши для уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова [1,2], которое описывает броуновское движение частиц на прямой:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \partial_x^2(a(x)u) & = & 0, \\ u|_{t=0} & = & \mu, \end{array} \right. \tag{1}$$

где μ — вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Измеримая функция a удовлетворяет условию равномерной параболичности

$$0 < \gamma \leqslant a(x) \leqslant \gamma^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и существуют пределы

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^R \frac{dx}{a(x)} = a_1^{-2}, \quad \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_{-R}^0 \frac{dx}{a(x)} = a_2^{-2}, \tag{3}$$

где $a_1, a_2 > 0$.

Теорема 1. *Пусть для коэффициента p выполнены условия (2),(3). Если функция u является решением задачи (1), удовлетворяющим оценке $|u(x,t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ при $t > 0$ и третий абсолютный момент для меры μ конечен, то при $t \to +\infty$ для абсолютного момента первого порядка и момента второго порядка решения задачи Коши (1) имеет место асимптотика*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|u(x,t)\,dx = \frac{4t^{1/2}}{\sqrt{\pi}(a_1+a_2)} + o(t^{1/2}),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 u(x,t)\,dx = \frac{2t}{a_1 a_2} + o(t).$$

Для функций $\psi \in L_\infty(\mathbb{R})$ рассматривается вопрос о стабилизации при $t \to +\infty$ функционалов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\psi(x)\,dx.$$

Теорема 2. *Пусть для коэффициента a выполнены условия (2),(3), функция u является решением задачи (1), удовлетворяющим оценке $|u(x,t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ при $t > 0$. Если для функции $\psi \in L_\infty(\mathbb{R})$ существует весовое предельное среднее*

$$\langle\psi\rangle = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_{-a_2R}^{a_1R} \frac{\psi(x)}{p(x)}\,d\xi,$$

то

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\psi(x)\,dx = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\langle\psi\rangle.$$

В частности, полагая $\psi_1(x)=\chi_{(-\infty,0)}(x)$, $\psi_2(x)=\chi_{[0,\infty)}(x)$, для доли частиц на левой и правой полупрямой получаем

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{0} u(x,t)\,dx = \frac{a_1}{a_1+a_2},$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{\infty} u(x,t)\,dx = \frac{a_2}{a_1+a_2}.$$

Таким образом, если t достаточно велико, то доля частиц будет больше на той полупрямой, где средняя скорость частиц, определяемая коэффициентом a, меньше.

Литература

1. Богачев В.И. Глобальная регулярность и оценки решений параболических уравнений /В.И. Богачев, М. Рёкнер, С.В. Шапошников // Теория вероятн. и ее примен. — 2005. — Т. 50, № 4. — С. 115–150.

2. Bogachev V.I. Fokker–Planck–Kolmogorov Equations / V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Röckner, S.V. Shaposhnikov — Providence (R.I.): Amer. Math. Soc. — 2015. — 479 p.

ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ — РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Н.Н. Конечная (Архангельск, САФУ)
n.konechnaya@narfu.ru

Рассмотрим дифференциальное выражение вида

$$l(y) := y^{(n)}+(a_1+p_1(x))y^{(n-1)}+(a_2+p_2'(x))y^{(n-2)}+\ldots+(a_n+p_n'(x))y,$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ и λ — комплексные числа, $p_1,p_2,\ldots,p_n$ — комплекснозначные измеримые на $R_+(:=[0,+\infty))$ функции, а все производные понимаются в смысле теории распределений. Пусть далее

$$|p_1|+(1+|p_2-p_1|)\sum_{j=2}^{n}|p_j|\in L^1_{loc}(R_+).$$

В докладе будет представлена конструкция, позволяющая при выполнении этого условия определить, в каком смысле следует понимать уравнение $l(y) = \lambda y$. Будет установлено, что главный член асимптотики при $x \to +\infty$ фундаментальной системы решений этого уравнения определяется, как и в классическом случае, по корням многочлена

$$Q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n - \lambda,$$

если функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ удовлетворяют определенным условиям интегрального убывания на бесконечности.

Теорема 1. *Пусть в уравнении $l(y) = \lambda y$ число λ отлично от a_n, а функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что*

$$|p_1| + (1 + |p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^{n} |p_j| \in L^1(R_+).$$

Пусть далее все корни $z_1, z_2, \ldots, z_n$ многочлена $Q(z)$ — простые.

Тогда это уравнение имеет фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, такую, что при $x \to +\infty$ справедливы равенства

$$y_j(x) = e^{z_j x}(1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В частности, формулы остаются справедливыми, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, а $\lambda \neq 0$. При этом $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – различные корни степени n из числа λ.

В докладе также будет рассмотрен случай, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \lambda = 0$, а именно, будет изложено доказательство следующей теоремы:

Теорема 2. *Рассмотрим уравнение*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2'(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_n'(x) y = 0.$$

Пусть функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что

$$|p_1| + (1 + x|p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^{n} x^{j-2} |p_j| \in L^1(R_+).$$

Тогда это уравнение имеет фундаментальную систему решений $\{y_j\}$, $j = 1, 2, \ldots n$, такую, что при $x \to +\infty$ справедливы равенства

$$y_j(x) = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}(1 + o(1)).$$

Доклад основан на совместной с профессором К.А. Мирзоевым работе [1].

Литература

1. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А. Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка / Н.Н. Конечная, К.А. Мирзоев // Математические заметки. — 2019. — Т. 106, № 1. — С. 74–83.

О ПРИМЕНЕНИИ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ В СМЕШАННХ ЗАДАЧАХ, НЕ ИМЕЮЩИХ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

В.В. Корнев (Саратов, СГУ)

kornevvv@sgu.ru

Данная работа основывается на публикациях [1–3]. В ней излагается простой метод решения смешанных задач для волнового уравнения, не имеющих классического решения, с использованием расходящихся рядов.

1. Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q = [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

где

$$\varphi(x) \in L[0,1]. \tag{4}$$

Формальное решение этой задачи по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t, \tag{5}$$

где $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

В силу условия (4) задача (1)–(3), вообще говоря, не имеет классического решения и ряд (5) является расходящимся. Будем называть такие задачи обобщеными смешанными задачами, а формальный ряд по методу Фурье считать их формальным решением.

Наша цель — найти функцию $u(x,t)$, которую естественно называть суммой расходящегося ряда (5) и считать ее решением обобщенной задачи. Будем получать такие суммы, преобразуя расходящиеся ряды с помощью следующих правил:

(A) Если $\sum a_n = s$, то $\alpha \sum a_n = \sum \alpha a_n = \alpha s$;

(Б) Если $\sum a_n = s$ и $\sum b_n = t$, то $\sum(a_n + b_n) = s + t$;

(В) Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$;

(Г) $\int\sum = \sum\int$, где $\int$ — определенный интеграл (аксиомы (А)–(В) содержатся в [4], (Г) введена в [1]).

В силу формулы $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$ и правила (Б) имеем

$$u(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-, \tag{6}$$

где $\Sigma_\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t)$.

Следовательно, для нахождения суммы ряда (5)надо найти сумму ряда

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Пусть сумма ряда (7) при $x \in [0,1]$ есть какая-то функция $g(x) \in L[0,1]$. Тогда на основании правила (Г) имеем

$$\int_0^x g(\eta)\, d\eta = 2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \int_0^x \sin n\pi\eta\, d\eta. \tag{8}$$

Ряд (7) является рядом Фурье функции $\varphi(x)$. Поэтому по теореме 3 ([5, с. 320]) ряд в (8) сходится при любом $x \in [0,1]$ и его сумма есть $\int\limits_0^x \varphi(\eta)\, d\eta$. Таким образом, получаем, что

$$\int_0^x g(\eta)\, d\eta = \int_0^x \varphi(\eta)\, d\eta.$$

Отсюда следует, что $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду, т.е. мы нашли сумму расходящегося ряда (7) при $x \in [0,1]$. Далее, функция $\sin n\pi x$ нечетна и 2-периодична. Следовательно, сумма ряда (7) при $x \in (-\infty, \infty)$ есть $\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с $[0,1]$ на всю ось.

В силу (6) получаем что сумма ряда (5) есть функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]. \tag{9}$$

В итоге получена следующая теорема.

Теорема 1. *Решением обобщенной смешанной задачи* (1)–(3) *является функция* $u(x,t)$ *из формулы* (9).

2. Рассмотрим другую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{10}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{12}$$

где функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию:

$$\forall\, T > 0\ f(x,t) \in L([0,1] \times [0,T]). \tag{13}$$

Формальное решение этой задачи по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Как и в п. 1, найдем суму этого ряда с помощью правил (А)–(Г). Так как

$$\frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau) = \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\, d\eta,$$

то (14) переходит в

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\, d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\, d\eta. \tag{15}$$

Из (15) по правилу (Г) получаем, что

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \sin n\pi\eta\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta, \tag{16}$$

поскольку ряд в (16), как это следует из п. 1, имеет сумму $\frac{1}{2}\tilde{f}(\eta,\tau)$, где $\tilde{f}(\eta,\tau)$ есть нечетное, 2-периодическое продолжение функции $f(\eta,\tau)$ по η на всю ось.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Решение задачи* (10)–(12) *определяется по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta. \tag{17}$$

Замечание. В силу условия (13) задача (10)-(12), вообще говоря, не имеет классического решения.

3. Рассмотрим теперь такую обобенную смешанную задчу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{18}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{19}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{20}$$

где $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют (4) и (13).

Формальное решение этой задачи по методу Фурьес помощью правила (Б) можно представить в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ есть ряд (5), а $u_1(x,t)$ есть ряд (14). На основании п.п. 1, 2 получаем теорему:

Теорема 3. *Обобщенная смешанная задача* (18)–(20) *имеет решение, определяемое по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta. \tag{21}$$

4. Как приложение результатов п.п. 1–3 рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x,t)u(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{22}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{23}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{24}$$

где $\varphi(x) \in L[0,1]$, $q(x,t)$ удовлетворяет условию:

$$\forall\, T > 0 \;\; \forall\, (x,t) \in [0,1]\times[0,T] \;\; |q(x,t)| \leqslant q_T(x), \;\; q_T(x) \in L[0,1]. \tag{25}$$

Для этой задачи нельзя записать формальный ряд. Будем рассматривать функцию $q(x,t)u(x,t)$ как возмущение $f(x,t)$ в задаче (18)–(20), удовлетворяющее условию (13). В этом случае по теореме 3 задача (18)–(20) переходит в интегральное уравнение

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta,\tau)u}(\eta,\tau)\, d\eta, \tag{26}$$

где $\widetilde{qu}$ есть нечетное, 2-периодическое по η продолжение $q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)$ на всю ось.

Теперь естественно под решением задачи (22)–(24) понимать решение уравнения (26).

Рассмотрим уравнение (26). Подставляя формально правую часть в интеграл (26) бесконечное число раз, приходим к ряду

$$A(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,t),\quad (x,t)\in Q,\tag{27}$$

где $a_0(x,t)$ есть правая часть (9),

$$a_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}_{n+1}(\eta,\tau)\,d\eta,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$f_n(x,t)=-q(x,t)a_n(x,t),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Теорема 4. *Ряд* (27) *сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью на любом конечном подмножестве множества* Q *и функция* $A(x,t)$ *является единственным решением интегрального уравннеия* (27).

Учитывая, что функция $q(x,t)A(x,t)$ удовлетворяет условию (13), заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Решением обобщенной задачи* (22)–(24) *при условии* (25) *является функция* $A(x,t)$, *определяемая по формуле* (27).

Данная теорема существенно обобщает результаты из [6].

Замечание. Если в рассмотренных смешанных задачах существуют классические решения, то они совпадают с решениями из теорем 1–3, 5.

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения. — Саратов : Сартовский университет [Издание], 2022. — Вып. 21. — С. 319–324. URL: https://sgu.ru/node/184778 (дата обращения: 17.02.2022).

2. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача / А.П. Хромов // Математика. Механика. — Саратов : Изд-во Сарт. ун-та, 2021. — Вып. 23. — С. 63–67.

3. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача, не допускающая разделение переменных / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. — Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2021. — Т. 60. — С. 325–328.

4. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М. : Изд-во иностр. лит., 1951. — 504 с.

5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1957. — 552 с.

6. Гаршин С.В. Неулучшаемые условия существования и непрерывности производных второго порядка у решения характеристической задачи для гиперболического уравннеия с двумя независимыми переменными / С.В. Гаршин, В.Л. Прядиев // Черноземный альманах научных исследований. Сер. Фундаментальная математика. — 2005. — Вып. 1. — С 83–98.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ.

М.В. Коровина (Москва, МГУ)
betelgeuser@yandex.ru

Целью исследования являются уравнения с голоморфными коэффициентами

$$\begin{gathered} a_n(x)\left(\tfrac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\tfrac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + ... \\ +a_i(x)\left(\tfrac{d}{dx}\right)^i u(x) + ...a_0(x)\,u(x) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $a_i(x), i = 0, ..., n$ — голоморфные функции. Пусть коэффициент $a_n(x)$ обращается в ноль в окрестности некоторой точки, без ограничения общности будем считать что эта точка ноль. Задача состоит в построении равномерных асимптотик решений в орестности этой точки, которая вообще говоря является особой.

В работе [1] показано, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u = 0, \tag{2}$$

где

$$H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right) = \left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1}\tilde{a}_i(r)\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^i.$$

Здесь $k = -1, 0, 1, 2....$, $\tilde{a}_i(r)$ — соответствующие голоморфные функции. В работе [1] найдено минимальное значение k. Будем считать, что именно оно выбрано в представлении (2). Если $k = -1$, то решение уравнения является регулярным, и точка ноль является неособой точкой, если $k=0$, то такое вырождение называется коническим, а уравнение является уравнением фуксова типа, в этом случае асимптотики решений является конормальными, а именно имеют вид $\sum_{j=1}^{m} r^{\sigma_j} \ln^j r \sum_{i=0}^{\infty} a_i^j r^i$. Здесь a_i^j — некоторые числа, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^j r^i$ сходящийся ряд. Подробнее о конормальных асимптотиках можно прочитать в работах [2], [3].

Если $k>0$, то особенность является иррегулярной. Проблема Пуанкаре и заключается в построении равномерных асимптотик в окрестности иррегулярных особых точек.

При $k \in N$ основным символом оператора $H\left(r, -\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr}\right)$ называется полином $H_0(p) = H(0, p)$.

Задача построения асимптотик для частного случая иррегулярных особенностей, а именно для случая, когда корни основного символа $H_0(p)$ являются простыми была рассмотрена в работе [4]. В дальнейшем будем называть уравнения с простыми корнями простыми нефуксовыми, а остальные — кратными нефуксовыми уравнениями. Уравнения с регулярной особенностью, как известно, называются уравнениями фуксова типа.

Примером асимптотик решений соответствующих иррегулярной особой точке является нефуксова асимптотика вида

$$u = \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i / r} r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k, \qquad (3)$$

где α_i, $i = 1, ..., n$ — корни полинома $H_0(p)$, sj, a_i^k — некоторые комплексные числа. Заметим, что каждому из корней α_i, $i = 1, ..., n$, соответствует свой асимптотический член вида $e^{\alpha_i / r} r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k$.

Основным методом построения асимптотик является метод ресургентного анализа, основой которого является интегральное преобразование Лапласа-Бореля [5]. С помощью этого метода были получены результаты, важнейшим из которых является теорема о существовании ресургентного решения. В общем виде она была доказана в работе [6].

ТЕОРЕМА. *Пусть f — k-ресургентная функция, тогда решение уравнения $H\left(-r^{k+1} \frac{d}{dr}, r\right) u = f$ является k-ресургентной функцией в пространстве $E_k(S_R)$.*

Если полином $H_0(p)$ имеет простые корни в точках $p_1, ..., p_m$, а функция f является голоморфной, тогда асимптотики решения в пространстве $E_{\mathrm{k}}(S_R)$, уравнения $H\left(-r^{k+1} \frac{d}{dr}, r\right) u = f(r)$ имеют вид:

При $k=0$

асимптотики решений являются конормальными.

При $k=1$

$$u\left(r\right)\approx\sum_{j=1}^{m}\exp\left(\frac{p_j}{r}\right)r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty}B_i^j r^i,$$

При $k>1,k\in N$

$$u\left(r\right)\approx\sum_{j=1}^{m}\exp\left(\frac{p_j}{r^k}+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_{k-i}^1}{r^{k-i}}\right)r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty}b_i^j r^i$$

При $k=\frac{m}{n},m\in N,n\in N,m>n$

$$u\approx\sum\nolimits_j\exp\left(\frac{p_j}{r^{\frac{m}{k}-1}}+\sum\nolimits_{i=1}^{m-k-1}\frac{\alpha_{m-k-i}^1}{r^{\frac{m-i}{k}-1}}\right)r^{\sigma_j}\sum\nolimits_{i=0}^{\infty}b_i^j r^i$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0\left(p\right)$. *Здесь через* B_i^j,σ_j, $j=1,...,m$ *обозначены некоторые числа.*

Для решения общей задачи Пуанкаре был создан метод повторного квантования [6], [7] с помощью которого был получен ряд результатов для широкого класса уравнений с иррегулярными особенностями с кратными корнями основного символа. Этот метод позволяет строить асимптотические члены разложения отдельно для каждого из корней основного символа, которые вообще говоря являются кратными. И получен общий результат, который позволяет построить регулярные асимптотики решений для произвольных дифференциальныых уравнений с иррегулярными особенностями.

Сформулируем основную теорему.

Обозначим через p_i-корни многочлена $H_0(p)$и через ν_i их кратности.

ТЕОРЕМА. *Асимптотики любого из решений уравнения (1) представимы в виде суммы асимптотичемких членов, каждый из которых соответствует i-му корню основного символа кратности* ν_i

$$u_i\approx\exp\left(P_i\left(r^{\frac{1}{l_i}}\right)\right)\sum_{j=1}^{m_i}r^{\sigma_j^i}\ln^j r\sum_{l=0}^{\infty}a_l^i r^l \qquad (1)$$

Здесь $l_i\leqslant v_i$, $P_i\left(x\right)=M_ix^{k_i}+...+M_1x$ – полином, $k_i\leqslant k$, *через* m_i,σ_j^i,a_i^j *обозначены соответствующие константы,* $\sum_{l=0}^{\infty}a_l^i r^l$ *— степенные ряды, вообще говоря асимптотические.*

Для вычисления констант в асимптотическом представлении (1) применяется метод повторного квантования и методы изложенные в работах [4], [7]

Литература

1. Кац Д.С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов / Д.С. Кац // Дифф. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1612–1617.

2. Kondratev V.A. Boundary-value problems for partial differential equations in non-smooth domains / V.A Kondratev, O.A. Oleinik // Ryssian Math. Surveys. —1983. — Vol.38, no. 2. — P. 1–66.

3. Kondratev V.A. On the uniqueness of the solutions of boundary-value problems in unbounded domains of the system of eiasticity theory and second–order elliptic equations / V.A Kondratev, O.A. Oleinik // Ryssian Math. Surveys. —1987. — Vol.42, no. 4. — P. 143–144.

4. Коровина. М.В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями / М.В. Коровина. //Дифф. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 5. — С. 710–722.

5. Sternin B. Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis / B. Sternin, V. Shatalov. — CRC Press, 1995. — 288 P.

6. Коровина М.В. Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождением / М.В. Коровина // Дифф. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 60–77.

7. Korovina M. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point / M. Korovina // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 12. — P. 2249.

О РЕШЕНИИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ [1]

В.А. Костин, Х. Алкади (Воронеж, ВГУ)
vlkostin@mail.ru, hamsaphd.hassan44@gmail.com

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|.\|_E = \|.\|$ и A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$ плотной в E.

Обозначим через $C_{\mu,(E,\mathbb{R})}$ банахово пространство вектор-функций $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ со значениями в E и нормой

$$\|f\|_\mu = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|e^{-\mu t} f(t)\|, \mu \geqslant 0 \tag{1}$$

Введём дробно-дифференциальное выражение

$$L_n(\bar{a}, \bar{\alpha})u(t) = \sum_{m=1}^{n} a_m \frac{d^{\alpha_m} u(t)}{dt^{\alpha_m}} \tag{2}$$

где $\bar{a} = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$, $a_m \geqslant 0$, $\qquad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in [0, 1]$

$$\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_m)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha_m} u(s) ds \tag{3}$$

[1]

$\Gamma(z)$ — Гамма-функция Эйлера.

Для $f \in C_{\mu,(E,\mathbb{R})}$ рассмотрим уравнения

$$L_n(\bar{a}, \bar{\alpha})u(t) = Au(t) + f(t) \tag{4}$$

Определение 1. Решением уравнения (4) будем называть вектор-функцию $u(t) \in D(A)$ при каждом t, для которой определены дробные производные $\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}}$, и удовлетворяющую уравнению (4).

Ставится задача о нахождении решения уравнения (4) удовлетворяющее условию

$$u \in C_{\mu[E,\mathbb{R}]} \tag{5}$$

Определение 2. Будем говорить, что задача (4)-(5) поставлена корректно, если она имеет единственное решение $u(t)$ и для него выполняется оценка корректности

$$\|u\|_{C_\mu} \leqslant M\|f\|_{C_\mu},$$

где константа $M \geqslant 0$ не зависит от f.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Если оператор A является генератором полугруппы $U(s, A)$ класса C_0 с оценкой*

$$\|U(s, A)\| \leqslant Me^{ws} \qquad (s \geqslant 0)$$

и выполняется условие $w < \sum\limits_{m=1}^{n} a_m \mu^{\alpha_m}$, то задача (4)-(5) корректна и для ее решения выполняется оценка

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{\|f\|_\mu}{\sum_{m=1}^{n} a_m \mu^{\alpha_m} - w}$$

Литература

1. Иосида К. Функциональный анализ: Учебник/ К. Иосида, пер. с анг. В.М. Волосова. — М.: Мир, 1967 — 624 с.

2. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. =– Минск: Наука и техника.

ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ ГАУССА–ВЕЙЕРШТРАССА В ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА

А.В. Костин (Воронеж, ВГУ)
leshakostin@mail.ru

В настоящей работе теорема об операторе Лапласа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ переносится на случай пространств В.В. Степанова $S_p(\mathbb{R}^n)$, которые содержат пространства $C(\mathbb{R}^n)$. Это существенно расширяет область определения этого оператора и класс корректно разрешимых связанных с ними задач.

В частности, показывается, что оператор Лапласа Δ, определенный во введенных здесь пространствах Соболева–Степанова является генератором C_0– полугруппы Гаусса–Вейерштрасса. Результаты применяются к вопросам исследования корректной разрешимости задачи для неоднородного полигармонического уравнения С.Л. Соболева в пространствах В.В. Степанова.

Теорема 1. *Оператор A, заданный дифференциальным выражением $\Delta u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ и областью определения $D(A) = W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ является генератором полугруппы Гаусса–Вейерштрасса в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$.*

Литература

1. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова/ А.В. Костин, В.А. Костин.— Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007.— 259 с.

2. Костин В.А. Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля /В.А. Костин, А.В.Костин, Д.В. Костин// ДАН —2013, Т. 452, С. 367 - 370.

3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике/ С.Л. Соболев.— М.: Наука, 1988.— 393 с.

О РЕШЕНИИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В.А. Костин,Х. Алкади (Воронеж, ВГУ)
vlkostin@mail.ru

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|.\|_E = \|.\|$ и A линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$ плотной в E.

Обозначим через $C_{\mu,(E,\mathbb{R})}$ банахово пространство вектор-функций $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ со значениями в E и нормой

$$\|f\|_\mu = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|e^{-\mu t} f(t)\|, \mu \geqslant 0 \tag{1}$$

Введём дробно-дифференциальное выражение

$$L_n(\bar{a}, \bar{\alpha})u(t) = \sum_{m=1}^{n} a_m \frac{d^{\alpha_m} u(t)}{dt^{\alpha_m}} \tag{2}$$

где

$$\bar{a} = (a_1, a_2 \ldots, a_n),\ a_m \geqslant 0, \qquad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i \in [0, 1]$$

$$\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_m)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha_m} u(s) ds \tag{3}$$

$\Gamma(z)$-гамма функция Эйлера.

Для $f \in C_{\mu,(E,\mathbb{R})}$ рассмотрим уравнения

$$L_n(\bar{a}, \bar{\alpha})u(t) = Au(t) + f(t) \tag{4}$$

Определение.1. *Решением уравнения (4) будем называть вектор-функцию $u(t) \in D(A)$ при каждом t, для которой определены дробные производные $\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}}$, и удовлетворяющую уравнению (4).*

Ставится задача о нахождении решения уравнения (4) удовлетворяющее условию

$$u \in C_{\mu[E,\mathbb{R}]} \tag{5}$$

Определение 2. *Будем говорить, что задача (4)-(5) поставлена корректно, если она имеет единственное решение $u(t)$ и для него выполняется оценка корректности*

$$\|u\|_{C_\mu} \leqslant M \|f\|_{C_\mu},$$

где константа $M \geqslant 0$ не зависит от f.

Основным результатом настоящей заметки является

Теорема 1. *Если оператор A является генератором полугруппы $U(s, A)$ класса C_0 с оценкой*

$$\|U(s, A)\| \leqslant M e^{ws} \qquad (s \geqslant 0)$$

и выполняется условие

$$w < \sum_{m=1}^{n} a_m \mu^{\alpha_m},$$

то задача (4)-(5) корректна и для ее решения выполняется оценка

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{\|f\|_\mu}{\sum_{m=1}^{n} a_m \mu^{\alpha_m} - w}$$

Литература

1.Иосида К. Функциональный анализ: Учебник / К. Иосида, пер. с анг. В.М. Волосова. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

2. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.

АНАЛИЗ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВЕТВЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО[1]

Т.И. Костина (Воронеж, ВГТУ, ВГПУ)

tata_ sti@rambler.ru

Периодические колебания спутника вблизи эллиптической орбиты в модели Белецкого можно изучать на основе нелокальной вариационной версии метода Ляпунова-Шмидта. Уравнение колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты (уравнение Белецкого), выведенное В.В. Белецким в 1956 г. и опубликованное в 1959 г. [1], имеет следующий вид:

$$(1 + e\cos(\nu))\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin(\nu)\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin(\delta) - 4e\sin(\nu) = 0.$$

Здесь e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы спутника, δ — угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника, ν — угловая (полярная) координата центра масс спутника.

После умножения уравнения на $(1+e\cos(\nu))$ получим уравнение, являющееся уравнением Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала $V(q) = \int\limits_0^{2\pi} L(\dot{q}, q)dt$, с лагранжианом $L(\dot{q}, q)$: $\frac{\dot{q}^2}{2}(1+e\cos(\nu))^2 + (1 + e\cos(\nu))4eq\sin(\nu) + (1 + e\cos(\nu))\mu\cos(q)$ (соответствующая теорема доказана в [2]).

Если в уравнении Белецкого положить $e = 0$, то получим уравнение колебаний маятника (без внешнего воздействия) $\ddot{\nu} + \mu\sin(\nu) = 0$,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

Заменив в последнем уравнении q на x, ν на t, e на ε, получим следующий вид функционала действия уравнения Белецкого:
$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big((1+\varepsilon\cos(t))^2\ \frac{\dot{x}^2}{2}+(1+\varepsilon\cos(t))(\mu\cos(x)+4\varepsilon x\sin(t))\Big)\,dt.$

Применяя метод Ляпунова-Шмидта получаем гладкое отображение $\Phi(\xi)$, для которого $V(u(\xi)+\Phi(\xi)) = \inf\limits_{v\in N^{\perp}} V(u+v)$. Ключевой функции представима в виде обобщенной (нелинейной) ритцевской аппроксимации по первым трем модам: $W(\xi) = V(u(\xi)+\Phi(\xi)),\quad u(\xi):=\xi_0e_0+\xi_1e_1+\xi_2e_2$.

Построение приближений $\Phi_k(\xi)$ к функции $\Phi(\xi)$ основан на методе кратчайшего (градиентного) спуска. Последовательность приближений $\Phi_k(\xi)$ приводит к последовательности приближений ключевой функции $W_{(k)}(\xi)=V(u(\xi)+\Phi_k(\xi))$.

Как и в случае маятника можно воспользоваться модами колебаний: $e_0=1,\quad e_1=\sqrt{2}cos(t);\quad e_2=\sqrt{2}sin(t),\quad e_3=\sqrt{2}cos(2t),\quad e_4=\sqrt{2}sin(2t)\ldots$. При $x=\sum_{k=0}^{2n}\xi_ke_k$, получаем систему уравнений $\left\langle f\left(\sum_{k=0}^{2n}\xi_ke_k\right),e_j\right\rangle = 0$, где f — левая часть уравнения Белецкого. В итоге применения данной вычислительной схемы получим сходящийся итерационный процесс, позволяющий осуществить построение ключевой функции с любой точностью. Что позволяет осуществить построение соответствующего приближенного дискриминантного множества (*каустики*) — множества значений параметров (q_0,q_1,q_2), при которых существуют вырожденные критические точки. Каустика определяется системой уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{grad}\,(W_k)(\xi,\lambda,q)=0\,,\quad \xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2)^{\top}\,,\\ \mathrm{hessian}\,(W_k)(\xi,\lambda,q)=0\,,\end{array}\right.$$

$\mathrm{hessian}\,(W_k) := \det(\mathrm{Hess}\,(W_k))\,,\quad W_k(\xi,\lambda,q)) = V\left(u(\xi)+\Phi_k(\xi)\right)+q_0\xi_0+q_1\xi_1+q_2\xi_2$. Получив информацию о геометрическом строении каустики, можно приступить к изучению bif-раскладов экстремалей, соответствующих ячейкам регулярности (компонентам связности дополнения к каустике) в области изменения параметров. Каждой ветви $\xi(\lambda,q)\,,\quad q=(q_0,q_1,q_2)^{\top}$, приближенно вычисленных критических точек ключевой функции $(W_k)(\xi,\lambda,q)$, соответствует ветвь приближенных периодических решений $x(\lambda,q)=u(\xi(\lambda,q))+\Phi_k(\xi(\lambda,q))$ уравнения Белецкого.

Литература

1. Белецкий В.В Движение искусственного спутника относительно центра масс / В.В. Белецкий. — М. : Наука, 1965. — 416 с.

2. Костина Т.И. О ветвлении периодических решений уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого/ Т.И. Костина, Ю.И. Сапронов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2018. №1. - С. 99–114.

ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПЛЕКТОВ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРИБОРОВ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕТРИК

С.Е. Кривобокова, В.А. Родин
(Воронеж, Воронежский институт МВД России)
svetlanafedyaeva20@gmail.com

В данном докладе, используя специальные пространственные метрики, проведена векторная оптимизация выбора комплекта ТСО.

Работу можно представить в виде взаимного влияния четырех пунктов. В первом пункте параметры приборов представлены в виде обобщенных интегральных показателей, которые были получены с помощью шкалы желательности по Харрингтону [1].

Во втором пункте рассматриваются различные алгоритмы сокращения размерности пространства мнений экспертов.

Для этого изначально стохастическими методами [2] проверяется нулевая гипотеза о возможных искажениях тенденции во мнениях экспертов. Далее происходит отсеивание ошибочных и бессистемных суждений, несовпадающих с общей тенденцией, принятой в группе экспертов. Кроме того, задача сокращения размерности пространства рассматривает алгоритм определения существенных параметров множественной линейной регрессии [3]. Данная регрессия моделирует состояние алгоритма выбора комплекта приборов.

Для сокращения числа экспертов и повышения их компетентности рассматривается медиана Кемени [4], которая связанна с бинарными отношениями модели взаимодействия мнений.

В третьем пункте для сокращения размерности пространства параметров в отличии от пространства мнений применяются комбинаторные методы [5]. Рассматривая это пространство как множество точек на плоскости с двумя разнонаправленными факторами векторной оптимизации, выделяется множество Парето. Для получения графического изображения применяется оригинальная авторская программа [6].

В четвертом пункте, опираясь на эмпирические данные, собранные с помощью анкетирования сотрудников филиалов ФГКУ УВО (ОВО) ВНГ России по субъектам Российской Федерации, проверяется состоятельность уже существующего в данный момент на практике метода комплектации объектов набором приборов с помощью частотных характеристик.

Неожиданным для авторов оказалось, что существующее на практике состояние комплектации оказалось неоптимальным. С помощью специального направленного перебора показана возможность улучшения частотных характеристик, приводящая к уменьшению цены с сохранением высокого уровня желательности.

В результате мы произвели сокращение размерности двух пространств: пространства мнений и пространства параметров, предоставили для ЛПР графический инструмент выбора оптимальных альтернатив комплектов приборов, а также продемонстрировали возможность улучшения частотных характеристик, используемые в настоящее время. Полученные результаты рекомендованы в практике для регионов, из которых были получены эмпирические данные. Данное исследование особенно актуально в настоящее время в связи с последними событиями увеличения цены приборов.

Литература

1. Кривобокова С.Е. Оптимальная комплектация объекта специальными средствами охраны на основе обобщенного показателя Харрингтона / С.Е. Кривобокова, В.А. Родин // Вестник Воронежского института МВД России. — 2021. — № 2. — С. 67–78.

2. Гречаный С.А. Стохастическая фильтрация в пространстве мнений экспертов / С.А. Гречаный, С.Е. Кривобокова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. — 2022. — Т. 10, № 1. [Электронный ресурс] : URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1121.

3. Меньших В.В. Правовая статистика: методы и модели : учебное пособие / В.В. Меньших, О.Ю. Данилова, С.В. Синегубов. — Воронеж : Воронежский институт МВД России, 2018. — 302 с.

4. Кривобокова С.Е. Применение медианы Кемени для определения оптимальной выборки: алгоритм и блок-схема / С.Е. Кривобокова, В.А. Родин // Вестник Воронежского института МВД России. — 2021. — № 4. — С. 99–109.

5. Меньших В.В. Дискретная математика : учебник / В.В. Меньших, А.Н. Копылов, В.А. Кучер, С.А. Телкова. — Воронеж : Воронежский институт МВД России, 2016. — 228 с.

6. Кривобокова С.Е. Оптимальная комплектация объекта специальными средствами охраны на основе обобщенного показателя Харрингтона / С.Е. Кривобокова, В.А. Родин // Прикладная математика & Физика. — 2021. — Т. 53, № 2. — С. 125–131.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА[1]

Н.Е. Крымов, А.А. Амосов (Москва, НИУ «МЭИ»)
KrymovNY@mpei.ru, AmosovAA@mpei.ru

Рассматривается задача, описывающая радиационно-кондуктивный теплообмен в системе из n^2 абсолютно черных теплопроводящих стержней квадратного сечения со стороной сечения $\varepsilon = 1/n$, разделенных вакуумом и запакованных в квадратную коробку $\Omega = (0,1)^2$ с границей Γ.

Каждому стержню сопоставим элементарный квадрат
$G_{i,j} = (\varepsilon(i-1), \varepsilon i) \times (\varepsilon(j-1), \varepsilon j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Искомая функция $u_\varepsilon(x)$, имеющая физический смысл абсолютной температуры, определена на множестве $G = \bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n} G_{i,j}$.

Распространение тепла внутри каждого из стержней при отсутствии внутренних источников или стоков тепла описывается уравнением

$$-\mathrm{div}(\lambda \nabla u_\varepsilon) = 0, \quad x \in G_{i,j}, \tag{1}$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

На границе $\partial G_{i,j}$ каждого из стержней происходит теплообмен излучением с соседними стержнями и (в случае, когда $\partial G_{i,j} \cap \Gamma \neq \varnothing$) — с границей Γ коробки, имеющей заданную температуру $u_\Gamma(x)$. Теплообмен излучением описывается краевыми условиями

$$\lambda D_1 u_\varepsilon(i\varepsilon + 0, x_2) = w_{1,i}(x_2), \qquad j\varepsilon < x_2 < (j+1)\varepsilon, \tag{2}$$

$$\lambda D_1 u_\varepsilon((i+1)\varepsilon - 0, x_2) = w_{1,i+1}(x_2), \qquad j\varepsilon < x_2 < (j+1)\varepsilon, \tag{3}$$

$$\lambda D_2 u_\varepsilon(x_1, j\varepsilon + 0) = w_{2,j}(x_1), \qquad i\varepsilon < x_1 < (i+1)\varepsilon, \tag{4}$$

$$\lambda D_2 u_\varepsilon(x_1, (j+1)\varepsilon - 0) = w_{2,j+1}(x_1), \qquad i\varepsilon < x_1 < (i+1)\varepsilon, \tag{5}$$

[1] Результаты первого автора были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022). Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 19-11-00033).

где

$$
\begin{aligned}
&w_{1,i}(x_2) = h(u_\varepsilon(i\varepsilon + 0, x_2)) - h(u_\varepsilon(i\varepsilon - 0, x_2)), \quad 1 \leqslant i < n,\\
&w_{1,0}(x_2) = h(u_\varepsilon(0 + 0, x_2)) - h(u_\Gamma(0, x_2)),\\
&w_{1,n}(x_2) = h(u_\Gamma(1, x_2)) - h(u_\varepsilon(1 - 0, x_2)),\\
&w_{2,j}(x_1) = h(u_\varepsilon(x_1, j\varepsilon + 0)) - h(u_\varepsilon(x_1, j\varepsilon - 0)), \quad 1 \leqslant j < n,\\
&w_{2,0}(x_1) = h(u_\varepsilon(x_1, 0 + 0)) - h(u_\Gamma(x_1, 0)),\\
&w_{2,n}(x_1) = h(u_\Gamma(x_1, 1)) - h(u_\varepsilon(x_1, 1 - 0).
\end{aligned}
$$

Здесь $h(u) = \sigma_0|u|^3u$, $0 < \sigma_0$ — постоянная Стефана-Больцмана.

В [1] была предложена следующая асимптотическая аппроксимация задачи (1)-(5):

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon\Delta h(v_\varepsilon) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon,\\
&\varepsilon D_n h(v_\varepsilon) - \frac{\varepsilon^2}{2}D_s^2 h(v_\varepsilon) + h(v_\varepsilon) = g_\Gamma, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \backslash \gamma_\varepsilon,\\
&\varepsilon \widehat{D}_n h(v_\varepsilon) + h(v_\varepsilon) = \widehat{g}_\Gamma, \quad x \in \gamma_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Здесь $\Omega_\varepsilon = (\varepsilon, 1-\varepsilon)^2$ — квадрат с границей Γ_ε, $\gamma_\varepsilon = \{A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon\}$ — множество его угловых точек; D_n и D_s — производные по внешней нормали и касательному направлению к Γ_ε соответственно,

$$
\begin{aligned}
&\widehat{D}_n|_{x=A_\varepsilon} = -\frac{1}{2}(D_1 + D_2)|_{x=A_\varepsilon}, \quad \widehat{D}_n|_{x=B_\varepsilon} = \frac{1}{2}(-D_1 + D_2)|_{x=B_\varepsilon},\\
&\widehat{D}_n|_{x=C_\varepsilon} = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)|_{x=C_\varepsilon}, \quad \widehat{D}_n|_{x=D_\varepsilon} = \frac{1}{2}(D_1 - D_2)|_{x=D_\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Основным результатом работы является оценка погрешности

$$\|v_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Литература

1. A. A. Amosov, N. E. Krymov. On a nonstandard boundary value problem arising in homogenization of complex heat transfer problem // *J. Math. Sci.*, 2020, **244**, No. 3, pp. 357–376.

О НЕРАВЕНСТВАХ ЛАНДАУ И БЕККЕРА–ПОММЕРЕНКЕ[1]

О.С. Кудрявцева, А.П. Солодов
(Волгоград, ВолгГТУ; Москва, МГУ)
kudryavceva_ os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Пусть $\mathcal{B}$ — класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ в себя. В основе решения задачи о точных областях однолистности на подклассах $\mathcal{B}$ с заданными неподвижными точками лежат неравенства Ландау и Беккера–Поммеренке, дающие оценку общего значения функции в двух различных точках. Мы обобщаем указанные неравенства на случай n различных точек, что может найти применение в теории n-листных функций.

Обозначим через $\mathcal{B}[0]$ класс функций с внутренней неподвижной точкой $z = 0$, а через $\mathcal{B}\{1\}$ — класс функций с граничной неподвижной точкой $z = 1$ и конечной угловой производной $f'(1)$:

$$\mathcal{B}[0] = \big\{f \in \mathcal{B}\colon f(0) = 0\big\},$$
$$\mathcal{B}\{1\} = \big\{f \in \mathcal{B}\colon \angle\lim_{z\to 1} f(z) = 1,\ \angle\lim_{z\to 1} f'(z) = f'(1) < \infty\big\}.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{B}[0]$ и различные точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$|c| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{1}$$

Неравенство (1) при $n = 2$ было получено Ландау [1] и позволило ему найти единый круг однолистности на классе $\mathcal{B}_M[0] = \big\{f \in \mathcal{B}[0]\colon |f'(0)| \geqslant 1/M\big\}$, $M > 1$.

Теорема A. *Пусть $f \in \mathcal{B}_M[0]$, $M > 1$. Тогда f однолистна в круге $|z| < M - \sqrt{M^2-1}$. При этом для любого $R > M - \sqrt{M^2-1}$ найдется функция $f \in \mathcal{B}_M[0]$, не однолистная в круге $|z| < R$.*

Аналогом теоремы 1 на классе $\mathcal{B}\{1\}$ является

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{B}\{1\}$ и различные точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$f'(1)\,\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

Неравенство (2) при $n=2$ было получено Беккером и Поммеренке [2] и применялось ими для нахождения области однолистности для функции $f\in\mathcal{B}\{1\}$.

Теорема B. *Пусть $f\in\mathcal{B}\{1\}$. Тогда f однолистна в области*

$$\left\{z\in\mathbb{D}\colon \frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\,\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}>\frac{f'(1)}{2}\right\}.$$

Уточнением теоремы 2 на классе $\mathcal{B}[0,1]=\mathcal{B}[0]\cap\mathcal{B}\{1\}$ является

Теорема 3. *Пусть $f\in\mathcal{B}[0,1]$ и различные точки $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1)=\ldots=f(a_n)=c$. Тогда*

$$f'(1)\,\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}+\frac{|1-\lambda(c)/\prod_{k=1}^n\lambda(a_k)|^2}{1-|\lambda(c)/\prod_{k=1}^n\lambda(a_k)|^2},\qquad(3)$$

где $\lambda(z)=-z\,(1-\overline{z})/(1-z)$.

Замечание. *В случае $z=1$ считаем, что $|1-z|^2/(1-|z|^2)=0$.*

Неравенство (3) при $n=2$ было получено в [3] и использовалось для нахождения точной области однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[0,1]=\big\{f\in\mathcal{B}[0,1]\colon f'(1)\leqslant\alpha\big\}$, $\alpha\in(1,4]$.

Теорема C. *Пусть $f\in\mathcal{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha\in(1,4]$. Тогда f однолистна в области*

$$\mathcal{Y}=\left\{z\in\mathbb{D}\colon \frac{\big|1-2z+|z|^2\big|}{1-|z|^2}<\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}\subsetneq\mathcal{U}\subset\mathbb{D}$, найдется функция $f\in\mathcal{B}_\alpha[0,1]$, не однолистная в области $\mathcal{U}$.

Замечание. *Неравенства (1)–(3) точные и достигаются на произведениях Бляшке порядка n.*

Литература

1. Landau E. Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante / E. Landau // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. — 1926. — V. 32. — P. 467–474.

2. Becker J. Angular derivatives for holomorphic self-maps of the disk / J. Becker, Ch. Pommerenke // Comput. Methods Funct. Theory. — 2017. — V. 17. — P. 487–497.

3. Солодов А.П. Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками / А.П. Солодов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2021. — Т. 85, № 5. — С. 190–218.

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ, И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВОПРОСАМ ПОЛНОТЫ

А.Ф. Кужаев (Уфа, УГНТУ, БашГУ)
arsenkuzh@outlook.com

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных положительных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty, k \to \infty$.

Положим $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^l e^{\lambda_k z}\}_{k=1,l=0}^{\infty,n_k-1}$. Это система функций назвается системой экспонент (в ряде источников — системой экспоненциальных мономов), которая соответствует последовательности Λ.

Введём ряд геометрических характеристик последовательности Λ. Символом $n(r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0,r)$, и пусть

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Величина $barn(\Lambda)$ называется верхней плотностью последовательности Λ. Положим еще

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{n_k}{\lambda_k}, \quad \sigma_\Lambda(r) = \sum_{\lambda_k<r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Данную величину можно трактовать как относительную кратность точек λ_k.

Помимо указанных выше характеристик, широкое применение в ряде вопроосов, связанных с полнотой системы экспонент или представления рядами, находит своё применение индекс конденсации S_Λ последовательности Λ, введенный в работе [1]:

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to0+} \underline{\lim}_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m} \ln \left| \prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta\lambda_m),k\neq m} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k} \right|.$$

Свойства индекса S_Λ и ряд примеров на его вычисление имеется в работе [2].

Теперь введём в рассмотрение функциональные пространства. Пусть $\rho > 0$. Символом $\Omega_{\Lambda,\rho}$ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|, t \leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)/t = +\infty$, и, кроме того, выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2} dt < +\infty$$

Рассматриваются также весовые пространства комплекснозначных интегрируемых функций на вещественной прямой ($p \geqslant 1$)

$$L_p^\omega := \left\{ f : \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\omega(t)}|^p dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

и непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^\omega := \{ f : \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)e^{-\omega(t)}| < +\infty \}.$$

Символами $W^p(\Lambda, \omega)(p \geqslant 1)$ и $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим соответственно замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^ω и C^ω.

Теорема 1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < \infty$, $\bar{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $L_p^\omega(C^\omega)$.*

Заметим, что требование $\bar{n}(\Lambda) < \infty$ на самом деле является избыточным, так как из условий $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < \infty$ уже следует конечность верхней плотности. Более подробно результаты исследований содержатся в работе [3].

Литература

1. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях// Известия РАН. Серия математическая. –2004. – Т. 68 (2). – С. 71–136.

2. Кривошеева О. А. Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости // Алгебра и анализ. – 2011. –Т. 23 (2). – С. 162–205.

3. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Kuzhaev A. F. The Representation by Series of Exponential Monomials of Functions from Weight Subspaces on a Line// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, No. 6, P. 1183–1200.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ[1]

Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева (Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)
kulaevrch@mail.ru; urtaeva-96@mail.ru

В докладе обсуждаются осцилляционные спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка на графеΓ:

$$L_\lambda u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) - \frac{d}{d\Gamma}\left(q(x)\frac{du}{d\Gamma}\right) = \lambda\rho(x)u, \qquad u|_{\partial\Gamma} = u'|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где $\partial\Gamma$ — множество граничных вершин Γ. При этом, под дифференциальным уравнением в (1) мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = \lambda\rho_i(x)u_i, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \tag{2}$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a), \tag{3}$$

$$\sum_{i\in I(a)} [(p_iu_i'')_\nu'(a) - q_i(a)u_i'(a)] = \lambda\rho(a)u(a), \quad a \in J(\Gamma). \tag{4}$$

Уравнение (2)–(4) моделирует малые деформации стержневой системы с условиями упруго-шарнирного соединения (см.[1]). В этом случае равенства (2)–(4) можно трактовать следующим образом: $u(x)$ обозначает смещение балки при выходе из состояния равновесия; условия (3) описывают классические локальные условия в узлах графа – перемещения всех стержней системы являются непрерывными и имеется упруго-шарнирное сочленение в узловой вершине a (см. [3, § 5.18]). Последнее условие — это условие динамического равновесия.

Всюду далее мы используем терминологию и обозначения работ [1,2]. На протяжении всей статьи $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель, с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством точек ребер графа $E(\Gamma)$. *Ребро* графа – это интервал конечной длины, а *вершина* графа – это концевая точка одного или нескольких ребер. Ребра графа обозначаются γ_i, вершины обозначаются a, b и т.д. Для любой $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов ребер, инцидентных вершине a, и через $|I(a)|$ обозначим количество элементов множества $I(a)$. Элементы множеств

[1] Работа выполнена при финансовой Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-890)

$J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) \,:\, |I(a)| \geqslant 2\}$ и $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) \,:\, |I(a)| = 1\}$ называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Мы предполагаем, что $\Gamma = E(\Gamma) \cup J(\Gamma)$ и $\partial\Gamma \neq \varnothing$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф. *Подграфом* графа Γ называется любое связное подмножество Γ.

Производная функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ (или $u : E(\Gamma) \to \mathbb{R}$) определяется в точках ребер $E(\Gamma)$, как производная по направлению ребра.

Введем функциональные пространства: $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) — пространство функций $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ (или $u : E(\Gamma) \to \mathbb{R}$) равномерно непрерывных вместе с производными на каждом ребре $\gamma_i \subset E(\Gamma)$; $C(\Gamma)$ — пространство функций из $C[\Gamma]$ напрерывных на всем графе; $C^n(\Gamma) = C(\Gamma) \cap C^n[\Gamma]$.

Далее считаем, что выполнены условия плюс-регулярности (см. [1]), обеспечивающие невырожденность дифференциального оператора L_λ при $\lambda = 0$:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf\limits_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$ и $q \in C^1[(\Gamma)]$, $q(x) \geqslant 0$ on $E(\Gamma)$;
- $\rho \in C[\Gamma]$, $\rho(x) > 0$ on Γ;
- $\beta_i(a) \geqslant 0$, $\vartheta_i(a) \geqslant 0$ и $\beta_i(a) + \vartheta_i(a) > 0$ для всех $a \in V(\Gamma)$, $i \in I(a)$;
- для любого ребра $\gamma_i = (a, b)$ положительна по крайней мере одна из величин $\max\limits_{x \in \gamma_i} |q_(x)|$, $\vartheta_i(a)$, $\vartheta_i(b)$.

Изучаются осцилляционные свойства собственных значений и собственных функций спектральной задачи (1): простота и положительность собственных значений, количество нулей собственных функций.

Отметим, что на сегодняшний день хорошо изучены осцилляционные спектральные свойства задачи Штурма-Лиувилля на графе [3]. Стоит также отметить, что изучение свойств решений дифференциальных уравнений четвертого порядка на сети является существенно более сложной задачей, нежели аналогичная задача для уравнения Штурма-Лиувилля. Даже модели физического происхождения оказываются очень трудными для анализа (см., например, [1,2,4]). Наибольшие продвижения в изучении качественных свойств краевых задач четвертого порядка на графах имеются для уравнения с условиями упруго-шарнирного сочленения стержней. Для такой краевой задачи в [1,4] получены условия разрешимости, установлен принцип максимума, на основе которого доказана положительная обратимость краевой задачи и положительность ее функции Грина. В [2] изучались свойства решений уравнения (1) (положительность, колеблемость, распределение нулей, неосцилляция). Как показывают результаты этих работ дифференциальный оператор L_λ задачи (1), порождаемый условиями упруго-шарнирного сочленения, наследует основные качественные свойства оператора Штурма-Лиувилля на сети.

Теорема 1. Дифференциальный оператор L_λ, краевой задачи (1), является самосопряженным. Спектр Λ оператора L_λ дискретен, т.е. существует неограниченная последовательность положительных собственных значений $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \ldots$$

Определение 1. S*–зоной* функции $u(x) \in C(\Gamma)$ назовем подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такой, что $u(x) \neq 0$ на Γ_0; $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0$; $u(x)$ имеет нуль на любом подграфе $\Gamma_1 \supset \Gamma_0$, $\Gamma_1 \neq \Gamma_0$.

Определение 2. S^2*–зоной* функции $u(x) \in C^1(\Gamma)$ будем называть подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такой, что $u(x) \neq 0$ на Γ_0; существует подграф Γ_1 такой, что $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma$ и $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_1$; $u'(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0 \cap \partial\Gamma_1$.

Определение 3. Дифференциальный оператор L_λ называется *неосциллирующим* на графе Γ, если всякое нетривиальное решение уравнения (1) не имеет S^2–зону в Γ.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{D}_L$ - это набор всех положительных чисел $\lambda \in \mathbb{R}_+$ таких, что оператор L_λ не осциллирует на Γ. Тогда $\mathfrak{D}_L \cap \Lambda = \varnothing$ и $\mathfrak{D}_L = (0, \lambda_0)$, где $\lambda_0 = \min \Lambda$.

Определение 4. Дифференциальный оператор L_λ называется *квази неосциллирующим* на графе Γ, если оператор не осциллируе на любом подграфе в Γ, но ое обладает этим свойством на самом графе Γ.

Теорема 3. Пусть дифференциальный оператор L_λ квази не осциллирует на Γ. Если Γ_0 — это S^2-зона некоторого решения уравнения (1), то $\Gamma_0 = \Gamma$.

Следствие 1. Ведущее собственное значение λ_0 дифференциального оператора L_λ является простым, а соответствующие собственные функции не имеют нулей в Γ.

Пусть $J_{3+}(\Gamma) = \{a \in J(\Gamma) : |I(a)| \geqslant 3\}$. Предположим, что граф Γ является деревом. Для любой вершины $a \in J_{3+}(\Gamma)$ обозначим через $\Gamma_i(a)$ ветвь Γ, содержащую ребро γ_i, $i \in I(a)$. Через $\Lambda_i(a)$ мы обозначаем спектр краевой задачи

$$\begin{gathered} L_\lambda u = 0, \quad x \in \Gamma_i(a), \\ u|_{\partial\Gamma_i(a)} = u'|_{\partial\Gamma_i(a)\setminus a} = 0, \quad \beta_i(a) u_i''(a) - \vartheta_i(a) u_{i\nu}'(a) = 0. \end{gathered}$$

Теорема 3. Предположим, что Γ является деревом и для любой вершины $a \in J_{3+}(\Gamma)$ спектры $\Lambda_i(a)$, $i \in I(a)$ попарно не пересекаются. Тогда

1) Все собственные значения оператора L_λ простые;

2) Собственная функция φ_k, соответствующая собственному значению λ_k, имеет ровно k нулей в Γ;

2) Если $x_0 \in \Gamma$ является нулем собственной функции φ_k, то $x_0 \in E(\Gamma)$ и φ_k меняет знак точке x_0.

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. —М.: Физматлит, 2007. — 272 с.

2. Kulaev R.Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph / R.Ch. Kulaev. // Mediterr. J. Math. — 2022. V. 19:73.

3. Timoshenko S.P. Vibration Problems in Engineering / S.P. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Jr. — Wiley, 1990 — 672 p.

4. Покорный Ю.В. О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе / Ю.В. Покорный, Р. Мустафокулов // Изв. вузов. Матем. —1999. — №2. — С. 75–82.

ЛОКАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЕРСИИ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО,// УЧИТЫВАЮЩЕЙ ДИСПЕРСИЮ[1]

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов (Ярославль, ЯрГУ)
kulikov_ d_ a@mail.ru

В работе [1] была рассмотрена периодическая краевая задача для одной из версий уравнения Курамото-Сивашинского (УКС). После нормировок переменных краевая задача (КЗ) может быть записана в следующем виде

$$w_t + w_{xxxx} + bw_{xx} + aw_{xxx} + ww_x = 0, \tag{1}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x). \tag{2}$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}$. При $a = 0$ имеем традиционный вариант КЗ, а при $a \neq 0$ получаем ту версию, которая учитывает дисперсию [1].

КЗ (1), (2) имеет однопараметрическое семейство однородных состояний равновесия $w(t, x) = c\,(c \in \mathbb{R})$. Более того, для решений КЗ (1), (2) справедливо равенство $M_0(w(t,x)) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} w(t,x)dx = c.$

[1] Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

После замены $w = c+u$ $(u = u(t,x))$ для функции $u(t,x)$ получаем вспомогательную КЗ

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - au_{xxx} - cu_x - uu_x, \tag{3}$$

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x),\, M_0(u) = 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $b \leqslant 1$. Тогда при всех c, a нулевое решение КЗ (3), (4) асимптотически устойчиво. Если $b < 1$, то нулевое решение КЗ (3), (4) – глобальный аттрактор в норме $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$.*

Из теоремы 1 вытекает, что при $b < 1$ все решения КЗ (1), (2) с течением времени приближаются к одному из состояний равновесия $w(t,x) = c\,(c \in \mathbb{R})$.

Теорема 2. *Пусть $b = n^2(1+\varepsilon)$. Тогда существует $\varepsilon_n > 0$ такое, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$ КЗ (3), (4) имеет цикл $C_n(\varepsilon)$:*

$$u_n(t,x,\varepsilon,\varphi) = \varepsilon^{1/2}\sqrt{3}n\sqrt{4n^2+a^2}(\exp(i\psi_n + ih) + \exp(-i\psi_n - ih)) +$$
$$+\varepsilon(3n^2(4n^2+a^2)[\eta_n \exp(2i\psi_n + 2ih) + \overline{\eta}_n \exp(-2i\psi_n - 2ih)] + o(\varepsilon),$$

где $\psi_n = \psi_n(t,x,\varepsilon) = (\sigma_n + \varepsilon\omega_n)t + inx, \eta_n = (a - 2ni)/(6n^2(4n^2 + a^2)), \omega_n = -an/2, \sigma_n = n^3a - nc, h \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3\ldots$

При $n = 1$ получаем устойчивый цикл, а остальные $C_n(\varepsilon)$ – неустойчивые (седловые). Циклу $C_n(\varepsilon)$ КЗ (3), (4) соответствует двупараметрическое семейство решений $M_n(\varepsilon, c, h)$ КЗ (1), (2):

$$w_n(t,x,\varepsilon,c,h) = c + u_n(t,x,\varepsilon,h),\, dim(M_n(\varepsilon,c,h) = 2),$$

где $c, h \in \mathbb{R}$, а n – выбранное натуральное число. Отметим, что $M_1(\varepsilon, c, h)$ – локальный аттрактор, сформированный t периодическими решениями, для которых характерно следующее: a) они имеют различные периоды; b) они неустойчивы в смысле определения устойчивости по Ляпунову даже в норме пространства $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$; c) орбитально устойчивы в норме фазового пространства решений изучаемой КЗ (1), (2). Все эти результаты практически не зависят от выбора a. От этого коэффициента зависят относительно второстепенные характеристики: период решений, формирующих $M_n(\varepsilon, c, h)$, амплитуда таких решений, но основные качественные выводы не меняются. Сформулированные утверждения близки к результатам работ [2,3], где изучались иные версии УКС.

Литература

1. Кудряшов Н.А., Рябов П.Н., Петров В.А. Особенности формирования диссипативных структур, описываемых уравнением Курамото – Сивашинского / Н.А. Кудряшов, П.Н. Рябов , В.А. Петров // Модел. и анализ инф. сист. — 2015. — Т. 22, № 1. —С. 105–113.

2. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации в периодической краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов // Автом. и телемех. — 2017. — № 11. —С. 20–33.

3. Kulikov A.N., Kulikov D.A. The Kuramoto-Sivashinsky equation. A local attractor filled with unstable periodic solutions / A.N. Kulikov, D.A. Kulikov // Automatic Control and Computer Sciences — 2018. — Т. 52, № 7. —С. 708–713.

О ПРЕПОДАВАНИИ СОВРЕМЕННЫХ РАЗДЕЛОВ ГЕОМЕТРИИ И АНАЛИЗА

О.В. Кунаковская (Воронеж, ВГУ)
newovk@yandexl.ru

Медленно происходит внедрение в стандартные учебные курсы новых геометрических образов и математических технических приемов, разработанных при их описании, а в эпоху ковидных карантинов такая деятельность во многом перестала быть результативной.

Геометрия — традиционная часть математики, образующая на любом этапе базовую компоненту образования. На основании длительного опыта преподавания учебных дисциплин геометрической направленности автор утверждает, что расширять геометрический кругозор студентов необходимо всеми имеющимися в распоряжении преподавателей способами.

Литература

1. Борисович, Ю.Г. О структуре современных университетских курсов топологии и геометрии / Ю.Г. Борисович, О.В. Кунаковская // Воронежская математическая школа и непрерывное образование : регион. науч.-метод конф., 14-15 дек. 2004 г. — , 2004 .— С. 14-18

2. Кунаковская О.В. Под орлиным крылом. Памяти учителя. // В книге: Борисовичи. – М.: 2020. — С. 83-86.

3. Борисович Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович Ю.Г., В.Г. Звягин В.Г., Ю.И. Сапронов Ю.И. // Успехи матем. наук. — 1977. — Т.32. — N 4. — С.3-54.

4. Кунаковская О.В. Международная школа по геометрии нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных «Diffiety School» в Воронежском государственном университете // А.М. Виноградов, А.Д. Баев, М.И. Каменский, О.В. Кунаковская. - Вестник ВГУ. Серия: Проблемы высшего образования. – 2015, № 4. – С. 38-43.

5. Кунаковская О.В. Проблемы современного преподавания курсов геометрии и топологии в университетах // «Учитель: радость

творчества, радость труда»: Сб. материалов Всеросс. научно-практ. конференции (24-26 марта 2010 г.). – Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2010. – С. 191-192.

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И ОБОБЩЕННАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

В.П. Курдюмов (Саратов, Саратовский государственный университет)
Kurdyumov47@yandex.ru

1. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Далее следуем по тексту [1].

Формальное решение по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\psi(\xi), sin\, n\pi\xi)\, sin\, n\pi x \frac{sin\, n\pi t}{n\pi}, \tag{4}$$

где $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$.

Определение. *Классическим решением смешанной задачи* (1)-(3) *называется функция* $u(x,t)$*, непрерывная вместе с производными* $u'_x(x,t)$,$u'_t(x,t)$*, причем в свою очередь,* $u'_x(x,t)$ $(u'_t(x,t))$ *абсолютно непрерывна по* x *(по* t*), удовлетворяющая условиям* (2), (3) *и почти всюду по* x *и* t *уравнению* (1).

Отсюда следует, что для классического решения необходимо считать, что $\psi(x)$ непрерывна и $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Относительно классического решения справедлива

Теорема 1 [2]. *Если* $u(x,t)$ *есть классическое решение задачи* (1)-(3) *с условием, что* $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ *класса* Q*, то оно единственно и находится по формуле* (4)*, в которой ряд справа при любом фиксированном* $t > 0$ *сходится абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$.

Здесь и в дальнейшем считаем, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ есть функция класса Q, если $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Таким образом, у нас задача (1)-(3) и ряд (4) тесно связаны.

Расширим понятие этой связи. Ряд (4) имеет смысл для любой $\psi(x) \in L0,1]$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является формальным решением задачи (1)-(3), но понимаемой теперь чисто формально. Эту задачу (1)-(3) и будем называть обобщенной смешанной задачей. Найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти «сумму» расходящегося ряда (4) («сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда [3], [4]). Помимо аксиом о расходящихся рядах из [3], с.19, будем пользоваться еще следующим правилом интегрирования расходящегося ряда:

$$\int \sum = \sum \int, \tag{5}$$

где $\int$ — определенный интеграл. Итак, поскольку $\frac{sin\, n\pi t}{n\pi} = \int\limits_0^t cos\, n\pi\eta d\eta$, то из (4) имеем

$$u(x,t) = \int\limits_0^t [\sum_+ + \sum_-] d\eta, \tag{6}$$

где $\sum_\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\psi(\xi), sin\, n\pi\xi)\, sin\, n\pi(x \pm \eta)$. Отсюда следует, что для нахождения «суммы» ряда (4) надо сначала найти «сумму» тригонометрического ряда Фурье функции $\psi(x)$, т.е. ряда

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\psi(\xi), sin\, n\pi\xi)\, sin\, n\pi x. \tag{7}$$

Пусть «сумма» ряда (7) при $x \in [0,1]$ есть какая-то функция $g(x) \in L[0,1]$. Тогда в соответствии с правилом (5) имеем

$$\int\limits_0^x g(\eta) d\eta = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\psi(\xi), sin\, n\pi\xi) \int\limits_0^x sin\, n\pi\eta d\eta. \tag{8}$$

По теореме 3 ([5],с. 320) ряд в (8) сходится при любом $x \in [0,1]$ и его сумма есть $\int\limits_0^x \psi(\eta) d\eta$, т.е.

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\psi(\xi), sin\, n\pi\xi) \int\limits_0^x sin\, n\pi\eta d\eta = \int\limits_0^x \psi(\eta) d\eta.$$

Таким образом, получили, что $\int\limits_0^x g(\eta)d\eta = \int\limits_0^x \psi(\eta)d\eta$. Отсюда $g(x) = \psi(x)$ почти всюду на [0,1], т.е. нашли «сумму» $g(x)$ расходящегося ряда (7). Далее, sin$n\pi x$ нечетна и 2-периодична. Тогда получаем, что «сумма» ряда (7) при $x \in (-\infty, \infty)$ есть $\widetilde{\psi}(x)$, где $\widetilde{\psi}(x)$ — нечетное 2-периодичное продолжение $\psi(x)$ с [0,1] на всю ось. В силу (6) получаем, что «сумма» $u(x,t)$ ряда (4) есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \widetilde{\psi}(\eta)d\eta. \tag{9}$$

Таким образом, получили

Теорема 2. *Решением обобщенной смешанной задачи* (1)-(3) *является функция $u(x,t)$ класса Q, определенная по формуле* (9).

2. Рассмотрим следующую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{12}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q.

Ее формальное решение по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f(\xi,\tau), sin\, n\pi\xi) \frac{1}{n\pi}\, sin\, n\pi x\, sin\, n\pi(t-\tau)d\tau. \tag{13}$$

Так как $\frac{2}{n\pi}\, sin\, n\pi x\, sin\, n\pi(t-\tau) = \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} sin\, n\pi\eta d\eta$, то (13) переходит в

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t d\tau (f(\xi,\tau), sin\, \pi\xi) \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} sin\, n\pi\eta d\eta. \tag{14}$$

Из п.1 получаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f(\xi,\tau), sin\, n\pi\xi)\, sin\, n\pi\eta, \quad \eta \in (-\infty, \infty) \tag{15}$$

имеет «сумму» $\frac{1}{2}\widetilde{f}(\eta,\tau)$, где $\widetilde{f}(\eta,\tau)$ есть нечетное 2-периодическое продолжение по η на всю ось функции $f(\eta,\tau)$. Тогда в силу правила

(5) получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty}(f(\xi,\tau), sin\, n\pi\xi)\sin n\pi\eta d\eta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t d\tau (f(\xi,\tau), sin\, n\pi\xi) \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} sin\, n\pi\eta d\eta = u(x,t).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Решение $u(x,t)$ обобщенной смешанной задачи* (10)-(12) *есть функция класса Q, определяемая по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta. \tag{16}$$

То, что $u(x,t)$ есть функция класса Q дается следующей леммой.
Лемма. *Имеет место оценка*

$$\| u(x,t) \|_{L[Q_T]} \leqslant T(T+2) \| f(x,t) \|_{L[Q_T]} .$$

3. Рассмотрим такую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{17}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x). \tag{19}$$

Здесь $f(x,t)$ класса Q, $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение по методу Фурье [2] есть

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ есть ряд (4), $u_1(x,t)$ есть ряд (13). Поэтому, исходя из п.п. 1, 2 получим

Теорема 4. *Обобщенная смешанная задача* (17)-(19) *имеет решение класса Q, определяемое формулой*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \widetilde{\psi}(\eta)d\eta + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta. \tag{20}$$

4. Наконец, рассмотрим как приложение к п.п. 1—3, следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x,t)u(x,t), \tag{21}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{22}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{23}$$

где $\psi(x) \in L[0,1]$, $q(x,t)$ непрерывна по $(x,t) \in [0,1]\times[0,\infty)$. Случай потенциала смешанной задачи, когда $q(\cdot) = q(x,t)$ рассматривался в [6]. Задача (21)—(23) не есть задача на метод Фурье. Тем не менее, будем рассматривать $q(x,t)u(x,t)$ как возмущение. Тогда из результатов п.3 получаем, что нахождение решения задачи (21)—(23) в классе Q сводится к нахождению в классе Q решения интегрального уравнения

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \widetilde{\psi}(\eta)d\eta - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)}d\eta, \tag{24}$$

где $\widetilde{q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)}$ — нечетное 2-периодическое продолжение по η функции $q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)$ на всю ось.

Интегральное уравнение (24) имеет единственное решение, получаемое методом последовательных подстановок.

Для полноты изложения приводим следующие результаты о классических решениях.

Теорема 5. **[7]** *Если $\psi(x)$ абсолютно непрерывна и $\psi(0) = \psi(1)$, то $u(x,t)$ из* (9) *является классическим решением задачи* (1)—(3), *причем $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ есть функция класса Q.*

Теорема 6. **[8]** *Если $f(x,t)$ — функция класса Q, почти при каждом $x \in [0,1]$ $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t и $f'_t(x,t)$ — класса Q, то $u(x,t)$ из* (16) *является классическим решением задачи* (10)—(12), *причем $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ есть функция класса Q.*

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения /А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Сарат. зим. шк. —Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2022. — С. 319–324.

2. Хромов А.П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А.П. Хромов // Дифференциальные уравнения. —2019. — Т. 55, № 5. —С. 717–731. DOI: 10.1134/S0374064119050121.

3. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. —М. : Л. : ГИТТЛ, 1949. — 580 с.

4. Харди Г. Расходящиеся ряды /Г. Харди. —М. :Изд-во иностр. лит., 1951. — 504 с.

5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной /И.П. Натансон. — М. : Л. : ГИТТЛ, 1957. — 552 с.

6. Гаршин С.В. Черноземный альманах научных исследований. / С.В. Гаршин, В.Л. Прядьев //Серия «Фундаментальная математика». Специальный выпуск: Избранные труды участников «Воронежского семинара по математическому анализу, теории функций и дифференциальным уравнениям». № 1, декабрь 2005. —Изд-во ООО «Альбион», 2005. —117 с.

7. Хромов А.П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового равнения / А.П. Хромов , В.В. Корнев // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, № 2. С. 286–300. DOI: 10.1134/S0044466919020091.

8. Корнев В.В. О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения /В.В. Корнев , А.П. Хромов // Понтрягинские чтения-XXIX : материалы конференции, посвященной 90-летию академика В.А. Ильина (2—6 мая 2018). — М. : ООО«Макс Пресс», 2018. — С. 132–133.

ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С МАЛЫМ ШАГОМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Г.А. Курина, Н.Т. Хоай

(Воронеж, ВГУ,

Москва, ФИЦ «Информатика и управление» РАН,

Ханой, Университет естественных наук,

Ханойский национальный университет)

kurina@math.vsu.ru, nguyenthihoai@hus.edu.vn

В [1] построена асимптотика решения задачи

$$x(t+\varepsilon) = B(t)x(t) + \varepsilon f(x(t), t, \varepsilon), \quad t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, ...(t \leqslant T), \qquad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \qquad (2)$$

где $x(t) = x(t, \varepsilon) \in X$, $dim X = n$, $\varepsilon \geqslant 0$ — малый параметр, матрица $B(t)$ и вектор-функция $f(x, t, \varepsilon)$ достаточно гладкие по своим аргументам. Предполагалось, что собственные значения $\lambda_j(t)$ матрицы $B(t)$ при всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют следующим условиям.

[1] Работа первого автора поддержана РНФ (проект № 21-11-00202).

1. $\lambda_j(t) = 1$ при $j = 1, 2, ..., k$, $k < n$.

2. Собственные векторы матрицы $B(t)$, соответствующие $\lambda_j(t) = 1$, $j = 1, 2, ..., k$, линейно независимы.

В этой заметке для построения нулевого порядка асимптотики решения задачи (1), (2) используются ортогональные проекторы $P(t)$ и $Q(t)$ пространства X на $kerA(t)$ и $kerA(t)'$, где $A(t) = B(t) - I$, а штрих означает транспонирование, соответствующие разложениям $X = kerA(t) \oplus imA(t)' = kerA(t)' \oplus imA(t)$. Такой подход позволяет четко представить алгоритм построения асимптотики.

Следуя [1], асимптотика решения задачи (1), (2) ищется в виде

$$x(t, \varepsilon) = \overline{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(\tau, \varepsilon), \tag{3}$$

где $\overline{x}(t, \varepsilon) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j \overline{x}_j(t)$, $\tau = t/\varepsilon$, $\Pi x(\tau, \varepsilon) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j \Pi_j x(\tau)$ и пограничные функции $\Pi_j x(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Стандартным в теории сингулярных возмущений способом, подставляя (3) в (1), (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t и τ, получаем соотношения для членов разложения (3).

Предположим, что выполнено условие

3. Собственные значения оператора $\widetilde{B}(t) = (I - P(t))B(t)(I - P(t)) : imA(t)' \to imA(t)'$, $t \in [0, T]$, лежат внутри единичного круга.

Из уравнения для $\overline{x}_0(t)$: $A(t)\overline{x}_0(t) = 0$ получаем

$$(I - P(t))\overline{x}_0(t) = 0. \tag{4}$$

В силу (4) из равенства: $\overline{x}_0(0) + \Pi_0 x(0) = x^0$ следует

$$(I - P(0))\Pi_0 x(0) = (I - P(0))x^0. \tag{5}$$

Уравнение для $\Pi_0 x(\tau)$ эквивалентно двум уравнениям

$$(I - P(0))\Pi_0 x(\tau + 1) = \widetilde{B}(0)(I - P(0))\Pi_0 x(\tau), \tag{6}$$

$$P(0)\Pi_0 x(\tau + 1) = P(0)\Pi_0 x(\tau) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_0 x(\tau). \tag{7}$$

Решая задачу (6), (5), получаем пограничную функцию

$$(I - P(0))\Pi_0 x(\tau) = \widetilde{B}(0)^\tau (I - P(0))x^0.$$

Из (7) находим пограничную функцию

$$P(0)\Pi_0 x(\tau) = P(0)B(0)(I - P(0))C\widetilde{B}(0)^\tau (I - P(0))x^0,$$

где C — обратный оператор к $\widetilde{A}(0) = (I - P(0))A(0)(I - P(0)) : imA(t)' \to imA(t)'$. В силу условия 3 такой оператор существует.

Теперь можно определить начальное значение
$$P(0)\overline{x}_0(0) = P(0)(x^0 - \Pi_0 x(0)). \tag{8}$$

Из условия разрешимости уравнения для $\overline{x}_1(t)$: $A(t)\overline{x}_1(t) = -\overline{f}_0(t) + d\overline{x}_0(t)/dt$ имеем
$$\frac{d(P(t)\overline{x}_0(t))}{dt} = (Q(t)P(t))^{-1}Q(t)(-\frac{dP(t)}{dt}P(t)\overline{x}_0(t) + f(P(t)\overline{x}_0(t), t, 0)). \tag{9}$$

Предположим выполнение условия

4. Задача (9), (8) однозначно разрешима на отрезке $[0, T]$.

Теорема 1. *При условиях 1-4 члены асимптотики нулевого порядка для решения задачи (1),(2) находятся путем последовательного определения* $(I - P(t))\overline{x}_0(t)$, $(I - P(0))\Pi_0 x(\tau)$, $P(0)\Pi_0 x(\tau)$, $P(t)\overline{x}_0(t)$.

Литература

1. Бутузов В.Ф. Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущенная (вырожденная) система находится на спектре / В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильева // Дифференц. уравнения — 1970. — Т. 6, № 4. — С. 650–664.

О ЛОКАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ ГРУППЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ ПРОСТРАНСТВА R^4

В.А. Кыров (Горно-Алтайск, ГАГУ)
kyrovVA@yandex.ru

Рассмотрим группу Ли G, причем $\dim G = 8$, локально эффективно действующую в пространстве R^4.

Определение. Эффективное локальное действие $\pi\colon R^4 \times G \to R^4$, являющееся расширением группы параллельных переносов, называется *локально ограниченно точно дважды транзитивным*, если базис ее алгебры Ли L состоит из операторов
$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ X_4 = \partial_w,\ Y_i = A_i\partial_x + B_i\partial_y + C_i\partial_z + D_i\partial_w,$$
пиричём матрица
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_1(a) & B_1(a) & C_1(a) & D_1(a) & A_1(b) & B_1(b) & C_1(b) & D_1(b) \\ A_2(a) & B_2(a) & C_2(a) & D_2(a) & A_2(b) & B_2(b) & C_2(b) & D_2(b) \\ A_3(a) & B_3(a) & C_3(a) & D_3(a) & A_3(b) & B_3(b) & C_3(b) & D_3(b) \\ A_4(a) & B_4(a) & C_4(a) & D_4(a) & A_4(b) & B_4(b) & C_4(b) & D_4(b) \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов базисных операторов алгебры Ли этого действия невырождена для любых точек некоторых окрестностей $U(a'), U(b') \subset R^4$, $A_i = A_i(x,y,z,w)$, $B_i = B_i(x,y,z,w)$, $C_i = C_i(x,y,z,w)$, $D_i = D_i(x,y,z,w)$ — дифференцируемые функции класса гладкости C^1, $i = 1,2,3,4$.

Для поиска компонент выше выписанных операторов решается система уравнений, полученная из требования замкнутости базисных операторов:

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{A}_x = T_1\overrightarrow{A} + \overrightarrow{G}^1,\ \overrightarrow{A}_y = T_2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{P}^1,\\
\overrightarrow{A}_z = T_3\overrightarrow{A} + \overrightarrow{Q}^1,\ \overrightarrow{A}_w = T_4\overrightarrow{A} + \overrightarrow{R}^1,\\
\overrightarrow{B}_x = T_1\overrightarrow{B} + \overrightarrow{G}^2,\ \overrightarrow{B}_y = T_2\overrightarrow{B} + \overrightarrow{P}^2,\\
\overrightarrow{B}_z = T_3\overrightarrow{B} + \overrightarrow{Q}^2,\ \overrightarrow{B}_w = T_4\overrightarrow{B} + \overrightarrow{R}^2,\\
\overrightarrow{C}_x = T_1\overrightarrow{C} + \overrightarrow{G}^3,\ \overrightarrow{C}_y = T_2\overrightarrow{C} + \overrightarrow{P}^3,\\
\overrightarrow{C}_z = T_3\overrightarrow{C} + \overrightarrow{Q}^3,\ \overrightarrow{C}_w = T_4\overrightarrow{C} + \overrightarrow{R}^3,\\
\overrightarrow{D}_x = T_1\overrightarrow{D} + \overrightarrow{G}^4,\ \overrightarrow{D}_y = T_2\overrightarrow{D} + \overrightarrow{P}^4,\\
\overrightarrow{D}_z = T_3\overrightarrow{D} + \overrightarrow{Q}^4,\ \overrightarrow{D}_w = T_4\overrightarrow{D} + \overrightarrow{R}^4,
\end{gathered}$$

где введены матричные обозначения:

$$T_1 = \left(a_i^j\right), \quad T_2 = \left(b_i^j\right), T_3 = \left(c_i^j\right), T_4 = \left(d_i^j\right),$$

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{G}^j = \begin{pmatrix} g_1^j \\ g_2^j \\ g_3^j \\ g_4^j \end{pmatrix}, \overrightarrow{Q}^j = \begin{pmatrix} q_1^j \\ q_2^j \\ q_3^j \\ q_4^j \end{pmatrix}, \overrightarrow{P^j} = \begin{pmatrix} p_1^j \\ p_2^j \\ p_3^j \\ p_4^j \end{pmatrix}, \overrightarrow{R^j} = \begin{pmatrix} r_1^j \\ r_2^j \\ r_3^j \\ r_4^j \end{pmatrix},$$

причем a_i^j, b_i^j, c_i^j, d_i^j, g_i^j, q_i^j, $p_i^j, r_i^j = \text{const}$, $i,j = 1,2,3,4$.

Теорема 1. *Матрицы T_1, T_2, T_3, T_4 взаимно коммутативны.*

Теорема 2. *Матрица T_1 принимает жорданов вид.*

Аналогичная задача ранее решена в трёхмерном случае [1].

Литература

1. Кыров В.А. К вопросу о локальном расширении группв параллельных переносов трёхмерного пространства / В.А. Кыров // Владикавк. матем. журн. — 2021. — Т. 23, № 1. — С. 32–42.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ SEIR РАСПРОСТРАНЕНИЯ COVID-19 [1]

Д.А. Ладыжев (Воронеж, ВГУ)
ladigev@inbox.ru

Целью данного исследования является получение формулы репродуктивного числа через коэффициенты системы, описывающей развитие пандемии. Репродуктивное число — количество индивидов, которое инфицированный заразит за время своей болезни.

Математическая модель SEIR распространения COVID-19 получила свое название из наименований четырех групп, на которые разделяется популяция: S(Susceptible) — восприимчивый, не имеющий иммунитет к болезни; E(Exposed) — подвергнутый, не заразен в течение инкубационного периода; I(Infected) — инфицированный, передает вирус при контакте с восприимчивыми; R(Recovered) — выздоровевший, не может повторно заразиться и не является заразным. Количество индивидов в определенной групе обозначим первой заглавной буквой названия рассматриваемой группы. В основу модели SEIR легла теория Андерсона Кермака и Уильяма Маккендрика.

Коэффициент, равный вероятности заражения при встрече восприимчивых и инфицированных, примем фиксированным для каждого случая заражения и обозначим β. Пусть число подверженных пропорционально произведению восприимчивых, инфицированных и β. Коэффициент, описывающий скорость выхода человека из латентного периода, обозначим ε. Он равен среднему количеству дней с момента заражения до становления человека заразным. Коэффициент, характеризующий скорость выздоровления, обозначим δ. Его можно найти как среднее количество дней с момента становления человека заразным до его выздоровления. Коэффициент смертности в каждой из групп обозначим Ω. Постоянная скорость притока новорожденных в группе восприимчивого населения: α. Коэффициент смертности Ω и число новорожденных α считаются постоянными в любой момент времени. Составим систему дифференциальных уравнений, описывающих развитие эпидемии:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \Omega S; \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - \varepsilon E - \Omega E; \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - \Omega I - \delta I; \\ \frac{dR}{dt} = \delta I - \Omega R. \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ по проекту: Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи (FEGS-2020-0001)

Анализ точек равновесия системы (1) приводит к следующим соотношениям:
$1 \geqslant \frac{\alpha\beta\varepsilon}{(\varepsilon+\Omega)(\Omega+\delta)\Omega}$ — эпидемия затухает;
репродуктивное число — $R_0 = \frac{\alpha\beta\varepsilon}{(\varepsilon+\Omega)(\Omega+\delta)\Omega}$.

Литература

1. Бэйли, Н. Математика в биологии и медицине. — Москва: «Мир», 1970. — 319 с.

2. Kermack W. O, McKendrick A. G. A contribution to the Mathematical Theory of Epidemics.

3. Diekmann O., Heesterbeek J. Mathematical epidemiology of infectious diseases : Model building, analysis, and interpretation. Wiley, 2000.

ОЦЕНКА КРИВИЗНЫ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ ПРОХОЖДЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Ю.А. Лебедева, Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГУ)
yulechkalebedeva24@gmail.com, stenyuhin@mail.ru

Пусть задано прямоугольное тело Ω (для простоты будем называть его кораблём), у которого известны следующие параметры: β — ширина корабля, σ — длина корабля. Пусть в $\mathbf{R}^2$ задана кривая $\gamma(t)$ — гладкая локально спрямляемая кривая — и параллельная ей кривая $\overline{\gamma}(t)$ ($t \in [t_1; t_2]$ нам также известны):

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \qquad \overline{\gamma}(t) = \begin{cases} \overline{x} = x + \dfrac{\alpha y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ \overline{y} = y - \dfrac{\alpha x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{cases}$$

Получаем полосу Γ, ограниченную двумя кривыми с инвариантным значением ширины, равным α ($\alpha > 0$). Внутри полосы Γ будем перемещать тело Ω, то есть для всех возможных Ω: $\Gamma \cap \Omega = \Omega$ **(*)**.

Необходимо оценить «оптимальную кривизну» $k(\gamma)$, при которой тело Ω сможет перемещаться внутри полосы Γ.

Расстояние от корабля до кривой $\gamma(t)$ обозначим $\omega(t)$. Краевые условия, для которых справедливо **(*)**:

$$\begin{cases} \beta + \max\limits_{t \in [t_1; t_2]} |\omega(t)| \leqslant \alpha, \\ \forall (t_1, t_2 \in \{t\}) \exists (M_1, M_2 \in \gamma(t)) \big[||M_1 - M_2|| = \sigma \big]. \end{cases} \tag{1}$$

Сделаем несколько замечаний:

1. Эти две кривые в каком-то смысле имеют пропорциональные кривизны, $\overline{k} = \dfrac{k}{|1 - \alpha k|}$, где k — кривизна $\gamma(t)$, $\overline{k}$ — кривизна $\overline{\gamma}(t)$.

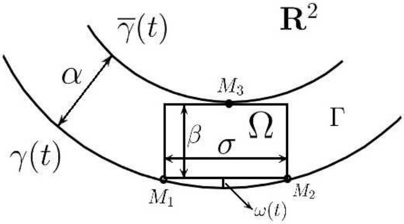


Рис. 1

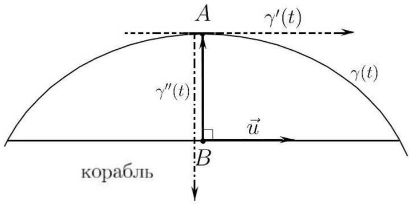


Рис. 2

2. Обратим внимание на то, что $\gamma:\{t\} \longmapsto \mathbf{R}^2$; ω: $t \in [t_1;t_2] \longrightarrow \mathbf{R}^1$, $\gamma(t_1) = M_1$, $\gamma(t_2) = M_2$, $\omega(t_1) = 0$, $\omega(t_2) = 0$.
3. $\gamma(t) \in C^2[t_1;t_2]$, $\gamma'(t)$ и $\gamma''(t)$ ограничены.
4. $\sqrt{\sigma^2+\beta^2} \leqslant \alpha$.

Обратимся к условию $\beta + \max\limits_{t\in[t_1;t_2]} |\omega(t)| \leqslant \alpha$. Нужно найти расстояние $\omega(t)$ от стороны прямоугольника до точки на кривой, где этот максимум достигается (Рис. 2). $\omega(t) = \dfrac{||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{u}||}{||\vec{u}||}$ — расстояние от $\overrightarrow{u}$ до точки A. Рассмотрим случай, когда $\overrightarrow{u} = \gamma'(t)$. В точке A мы можем провести касательную, параллельную $\overrightarrow{u}$. Тогда A — точка, в которой будет достигаться локальный максимум и она существует.

$$\frac{||\overrightarrow{BA} \times \gamma'(t)||}{||\gamma'(t)||}.$$

Для того чтобы найти $\overrightarrow{BA}$ рассмотрим $\gamma''(t)$; $\gamma'(t)$ ортогонален $\gamma''(t)$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ коллинеарен $\gamma''(t)$ и противоположен ему по направлению (может быть и сонаправлен, но в любом случае это устраняется модулем).

$$\omega(t) = \frac{||\dfrac{\gamma''(t)}{\tau(t)} \times \gamma'(t)||}{||\gamma'(t)||} = \frac{||\gamma''(t) \times \gamma'(t)||}{\tau(t)||\gamma'(t)||},$$

где $\tau(t)$ — коэффициент пропорциональности $\overrightarrow{BA}$ и $\gamma''(t)$, который мы используем, так как $\overrightarrow{BA}$ и $\gamma''(t)$ могут не совпадать по длине.

Формулы для кривизны кривой, заданной параметрически:

$$k(t) = \frac{||\gamma'(t) \times \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3} = \frac{||\gamma'(t) \times \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||\ ||\gamma'(t)||^2}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{||\gamma'(t) \times \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||} = \omega(t)\tau(t),$$

следовательно, кривизна равна

$$k(t)=\frac{\omega(t)\tau(t)}{||\gamma'(t)||^2},\qquad \omega(t)=\frac{k(t)||\gamma'(t)||^2}{\tau(t)}.$$

Таким образом, система условий (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases}\beta+\max\limits_{t\in[t_1;t_2]}\left|\dfrac{k(t)||\gamma'(t)||^2}{\tau(t)}\right|\leqslant\alpha,\\ \forall(t_1,t_2\in\{t\})\exists(M_1,M_2\in\gamma(t))\big[||M_1-M_2||=\sigma\big].\end{cases}\tag{2}$$

Рассмотрим $\dfrac{k(t)||\gamma'(t)||^2}{\tau(t)}$; $||\overrightarrow{BA}||=\gamma''(t)\tau(t)$, $||\overrightarrow{BA}||\leqslant\alpha$ (это расстояние не может быть шире полосы), следовательно, $\gamma''(t)\tau(t)\leqslant\alpha$. Отсюда $\tau(t)\leqslant\dfrac{\alpha}{||\gamma''(t)||}$, тогда $\beta+\max\limits_{t\in[t_1;t_2]}\left|\dfrac{k(t)||\gamma'(t)||^2||\gamma''(t)||}{\alpha}\right|\leqslant\alpha$.

$$\beta+\frac{1}{\alpha}\max_{t\in[t_1;t_2]}\big|k(t)||\gamma'(t)||^2||\gamma''(t)||\big|\leqslant\alpha.$$

Перейдём к естественной параметризации. Кривизна k инвариантна относительно параметра. Тогда $k(t)=||\gamma''(s)||=k(s)$. В натуральной параметризации скорость имеет постоянное значение: $s=\int\limits_0^t||\gamma'(t)||dt$, $||\gamma'(s)||=1$, следовательно, $||\gamma'(s)||^2=1$.
Перейдём к натуральному параметру в $||\gamma''(s)||$. $t\in[t_1;t_2]$, $s\in[0,1]$; $t=ks+b$. Из уравнения прямой, проходящей через две точки, найдём $t=(t_2-t_1)s+t_1$. Тогда $\gamma(t)=\gamma((t_2-t_1)s+t_1)=\tilde{\gamma}(s)$, $\gamma'_s=\gamma'_t(t_2-t_1)$, $\gamma''_s=\gamma''_t(t_2-t_1)^2$, следовательно, $||\gamma''(t)||=\dfrac{\gamma''_s}{(t_2-t_1)^2}$.

$$\beta+\frac{1}{\alpha}\max_{t\in[t_1;t_2]}\left|k(s)\frac{||\gamma''(s)||}{(t_2-t_1)^2}\right|\leqslant\alpha,$$

$$\beta+\frac{1}{\alpha(t_2-t_1)^2}\max_{t\in[t_1;t_2]}\big|k(s)||\gamma''(s)||\big|\leqslant\alpha.$$

Обозначим $(t_2-t_1)^2$ константой C. Заметим, что $\gamma(s)\in C^2$, $\gamma''(s)$ — ускорение и оно отлично от нуля. Тогда

$$\max_{s\in[0;1]}\big|k(s)||\gamma''(s)||\big|\leqslant(\alpha-\beta)\alpha C,$$

$$\min_{s\in[0;1]}||\gamma''(s)||\cdot\max_{s\in[0;1]}\big|k(s)\big|\leqslant(\alpha-\beta)\alpha C,$$

откуда и находим итоговую **оценку для кривизны**:

$$\max_{s\in[0;1]}\big|k(s)\big|\leqslant\frac{(\alpha-\beta)\alpha C}{\min\limits_{s\in[0;1]}||\gamma''(s)||}.$$

Литература

1. Gerver J.L. On moving a sofa around a corner. / J.L. Gerver // Geometriae Dedicata. — 1992. — V. 42, № 3. — P. 267–283.

2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 760 с.

3. Гликлих Ю.Е. Топология и дифференциальная геометрия. Учебное пособие по топологии и дифференциальной геометрии для студентов математических специальностей университетов / Ю.Е. Гликлих. — Воронеж : ВГУ, 2010. — 99 с.

4. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 2002. — 472 с.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ РАСТЯНУТОЙ СЕТКИ ИЗ СТРУН

Д.А. Литвинов (Воронеж, ВГУИТ)

d77013378@yandex.ru

Рассматривается система, описывающая малые поперечные колебания растянутой сетки из струн[1], [2], [3].

$$\left\{\begin{array}{c} -m(x)u''_{tt}(x,t) + (p(x)u'_x(x,t))'_\Gamma - u(x,t)q(x) = 0, \\ K(b_w)u(b_w,t) + (-1)^{\nu(b_w)}p(b_w)u'_x(b_w,t)|_{b_w \in d\Gamma} = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x), \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{array}\right. \tag{1}$$

Здесь $q(x)$— плотность упругой реакции внешней среды в точке $x \in \Gamma$, $p(x)$— сила натяжения в точке $x \in \Gamma$, $u(x,t)$—отклонение точки от положения равновесия в заданный момент времени, $K(b_w)$— жесткости пружин, установленных в граничных точках $b_w : w = \overline{1,r}$, $m(x)$ — функция, равная плотности струны в точке $x \in \Gamma \backslash I(\Gamma)$ и массе в точке $x \in I(\Gamma)$, $\psi_0(x)$—отклонение точки от положения равновесия в начальный момент времени, $\psi_1(x)$—начальная скорость точки.

Существование точного решения системы (1), описывается следующей теоремой.

Теорема 1

Пусть $p(x)$—функция конечного на Γ изменения, $q(x)$ и $f(x)$ суммируемы в смысле меры, определенной на графе, и ограничены на нем, $q \geqslant 0$ на Γ и $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, пусть ψ_i — абсолютно непрерывны на $\Gamma \cup \partial\Gamma$, производные ψ'_i имеют конечное на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ изменение, $(p\psi'_i)'$ — Γ-абсолютно непрерывна на $\Gamma \cup \partial\Gamma$; функции $\frac{(L\psi_0)(x)}{m(x)}$ непрерывны на $\Gamma \cup \partial\Gamma$, ее производная абсолютно непрерывна; $(l_i\psi_0)(b)|_{b\in\partial\Gamma} = 0$, $(l_i\psi_1)(b)|_{b\in\partial\Gamma} = 0$, $(l_i(L\psi_0))(b)|_{b\in\partial\Gamma} = 0$. Тогда функция

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)(A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k}t)), \qquad (2)$$

где $\varphi_k(x)$— нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению λ_k,

$$A_k = \int\limits_{\Gamma} m(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)d\Gamma,\ B_k = \int\limits_{\Gamma} m(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)d\Gamma$$

является решением математической модели (1), причем, ряд (2) можно дифференцировать по t дважды : сначала трижды по x, потом по Γ; на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ дважды: по x и по Γ; полученные - таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на множестве $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; T]$.

Литература

1. Шабров, С. А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере / С. А. Шабров //: Дисс. доктора физ. мат наук Воронеж. гос. . ун-т ;— 2017. — 412. с

2. Shabrov, S. A Adaptation of the finite element method for a mathematical model on a geometric graph / S. A. Shabrov, D. A Litvinov // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series vol 1902 012087, doi:10. 1088/1742–6596/1902/1/012087, — 2021.

3. Шабров, С. А. Об адаптации метода конечных элементов для математической модели на геометрическом графе / С. А. Шабров, Д. А. Литвинов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 28 января – 02 2021 года. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, — 2021. — С. 304–308.

ДВА ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

И.С. Ломов (Москва, МГУ)

lomov@cs.msu.ru

Рассмотрим задачу:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \qquad (1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) + u(\alpha,t), \quad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=0,\quad x\in[0,1], \tag{3}$$

где $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$, функция $q(x,t)$ такова, что найдется функция $q_0(x)\in\mathcal{L}(0,1)$, такая, что $|q(x,t)|\leqslant q_0(x)$, функция $q(x,t)u(x,t)$ есть функция класса Q, т.е. $\forall T>0$ функция $q(x,t)u(x,t)\in\mathcal{L}(Q_T)$, где $Q_T=\{(x,t)\in(0,1)\times(0,T)\}$. В условии (2) число $\alpha\in(0,1)$, $\alpha\neq\frac{1}{3}$.

Двумя разными способами строится обобщенное решение задачи (1)–(3). Первый способ основан на секвенциальном методе А.П. Хромова, разработанном в 2014–2021 гг. [1–3]: обобщенное решение определяется как предел классических решений. Решение предъявляется в виде быстро сходящегося ряда — обобщенной формуле Даламбера. Этот подход был применен и в [4].

Второй способ основан на аксиоматическом методе А.П. Хромова, предложенном в 2022 г. [5]. Для построения обобщенного решения не привлекаются классические решения. Использована теория расходящихся рядов Эйлера с дополненной системой аксиом, позволяющей эффективно работать с ними.

Особенность исследуемой задачи (1)–(3) — в наличии нелокального краевого условия. В условии (2) присутствует значение функции во внутренней точке α интервала $(0,1)$. Это приводит к тому, что система функций, биортогонально сопряженная к системе собственных функций оператора Штурма–Лиувилля, связанного с задачей (1)–(3), состоит из функций, имеющих разрывные производные первого порядка. Это накладывает определенные трудности при исследовании задачи.

Примечательно, что оба метода приводят к одному и тому же быстро сходящемуся функциональному ряду для обобщенного решения задачи.

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Резольвентный подход в методе Фурье / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Докл. РАН. — 2014. — Т. 458, № 2. — С. 138–140.

2. Хромов А.П. Расходящиеся ряды вметоде Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Труды ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 215–238.

3. Хромов А.П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А.П. Хромов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 5. — С. 717–731.

4. Ломов И.С. Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения / И.С. Ломов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.

5. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения. —Саратов: Саратовский университет. —2022. — Вып. 21. — С. 319–324.

ОПЕРАТОР ПСЕВДОСДВИГА, КОММУТИРУЮЩИЙ С Δ_B ОПЕРАТОРОМ КИПРИЯНОВА

Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин, Ю.Н. Булатов

(Воронеж, ВГУ, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)

levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru, y.bulatov@bk.ru

Введенный в [1] оператор Киприянова Δ_B имеет следующее определение. Пусть $-\gamma=-(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ мультииндекс с отрицательными дробными координатами: $-1<-\gamma_i<0$.

Δ_B-Оператором Киприянова называется сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^{n} B_{-\gamma_i}\,,\quad B_{-\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{-\gamma_i}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,,\quad x\in\mathbb{R}_n^+=\{x:\ x_i>0\}\,.$$

Для приложения в задачах теории функций и в теории дифференциальных и интегральных операторов необходим оператор (типа обобщенного сдвига Левитана), коммутирующий с Δ_{B_γ}.

Введем оператор:

$$\mathbb{T}^y f(x)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x_i,x')\,,\quad -\gamma_i=-2\mu_i+1,\quad \mu_i=\frac{\gamma_i+1}{2}\,,\qquad (1)$$

где $x=(x_i,x')$, $x'=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$, $\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x_i,x')=$ $=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\gamma_i+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi \frac{(x_i\,y_i)^{\gamma_i+1} f\left(\sqrt{(x_i\overset{\alpha_i}{\to}y_i\,)},x'\right)}{\left((x_i\overset{\alpha_i}{\to}y_i\,)\right)^{\gamma_i+1}}\ \sin^{\gamma_i+1}\alpha_i\,d\alpha_i$, и для удобства записи мы положили $(x_i\overset{\alpha_i}{\to}y_i\,)=\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\,\cos\alpha_i}$.

Сразу отметим, что конструкция (1) не принадлежит классу обобщенных сдвигов Б.М. Левитана, т.к. не выполняются свойства $\mathbb{T}_{x_i}^0 f(x)=f(x_i,x')$ и $\mathbb{T}^y C=C$, весьма необходимые для приложений в теории функций и в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Оператор (1) будем называть $\mathbb{T}$-псевдосдвигом. Свертки функций на основе этого оператора изучались в работах Какичева В.А. и его учеников (см., например, [2]).

Линейно независимыми решениями сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}u+\lambda u=0$ являются функции $\mathbb{J}_{-\mu}(t)=\frac{j_{-\mu}(t)}{\Gamma(1-\mu)}=t^\mu\,J_{-\mu}(t)$,

$\mathbb{J}_\mu(t) = t^{2\mu}\, j_\mu(t)$, где $j_\mu(t) = 2^\mu \Gamma(\mu+1)\frac{J_\mu(t)}{t^\mu}$ — j-функции Бесселя, а J_μ и $J_{-\mu}$ функции Бесселя первого рода.

Введем обозначение $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0,\ i=\overline{1,n}\}$, $x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$ и весовую линейную форму $(u,v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x)\ v(x)\ x^{-\gamma} dx$, в рамках которой сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B_{-\gamma}$ самосопряжен.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \mu \leqslant \frac{1}{2}$. *Имеет место равенство*
$$\int\limits_0^1 \mathbb{J}_\mu(\lambda_k t)\ \mathbb{J}_\mu(\lambda_m t)\, t^{-\gamma}\, dt \ = \begin{cases} 0 & , k \neq m, \\ (\lambda_k \lambda_m)^{\frac{\gamma+1}{2}}\ M \neq 0 & , k = m\,. \end{cases}$$
, *где числа* λ_k *являются корнями функций* J_μ *или корнями функции* $J'\mu$.

Теорема 2. *Для* x, y, $\xi \ \in \mathbb{J}$ *и* $2\mu = \gamma + 1$ *справедлива теорема сложения* $\mathbb{J}_\mu(x\xi)\ \mathbb{J}_\mu(y\xi) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi)$.

Отметим следующие свойства $\mathbb{T}$-псевдосдвига.

1. Перестановочность: если f и g суммируемые с весом $x^{-\gamma}$ $(0 < \gamma < 1)$ функции, то $(\mathbb{T}^y f, g)_{-\gamma} = (f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma}$.

2. Переместительность: если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$-функциям Бесселя, то
$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

3. Ассоциативность: если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$-функциям Бесселя, то
$$\mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

4. Коммутируемость с оператором $B_{-\gamma}$: пусть f четная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, $0 < \gamma < 1$ и $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0,\infty)$. Тогда $B_{-\gamma,x}\, \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^y\, B_{-\gamma,x} f(x)$.

Теорема 3. *Пусть* f *четная по каждой из координат аргумента* x_i, *дважды непрерывно дифференцируемая функция,* $0 < \gamma_i < 1$ *и* $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(\mathbb{R}_n^+)$. *Тогда* $\Delta_{B_{-\gamma,x}}\, \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^y\, \Delta_{B_{-\gamma,x}} f(x)$.

Литература

1. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциалные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1520.

2. Бритвина Л.Е. О некоторых полисвертках, порожденных преобразованием Ханкеля / Л.Е. Бритвина // Математические заметки. — 2004. — Т. 76, выпуск 1. — С. 20-–26.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

Л.Н. Ляхов, Н.И. Трусова (Воронеж, ВГУ, Липецк, ЛГПУ)
levnlya@mail.ru, trusova.nat@gmail.com

Весовым частно-интегральным оператором Вольтерра в $\mathbb{R}_2$ назовем

$$(K_\alpha u)(x) = \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x;t_\alpha)\, u(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha\,, \tag{1}$$

где $x = (x_\alpha, x_{\overline{\alpha}})$, $\gamma_\alpha > -1$ (см. [1]) и α принимает значения 1 или 2, соответственно $\overline{\alpha}$ — 2 или 1.

Частно-интегральное уравнение Вольтерра второго рода с весовым частно-интегральным оператором Вольтерра (1) определяется равенством

$$\varphi(x) - \lambda K_\alpha \varphi(x) = f(x)\,. \tag{2}$$

Положим в (1) все $\gamma_\alpha = 0$, тогда (2) — обычное частно-интегральное уравнение Вольтерра. Такого рода уравнения с непрерывными ядрами и в пространстве непрерывных функций в $\mathbb{R}_2$ изучались в [2], [3].

Весовое анизотропное пространство $L^\gamma_{\mathbf{p}}(D_1 \times D_2 \times D_3)$, $\mathbf{p} = p_i$, $i = 1, 2$, $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ определено нормой

$\|f\|_{L^\gamma_{\mathbf{p}}(D)} =$

$$= \Bigg(\int\limits_{D_3} \Bigg(\int\limits_{D_2} \Bigg[\int\limits_{D_1} |\, f(x)|^{p_1}\, x_1^{\gamma_1}\, dx_1 \Bigg]^{p_2/p_1} x_2^{\gamma_2}\, dx_2 \Bigg)^{p_3/p_2} x_3^{\gamma_3} dx_3 \Bigg)^{1/p_3},$$

где $D_i = (0, b_i)$.

При решении уравнения (2) методом последовательных приближений возникнет необходимость в бесконечных итерациях ядер весовых частно-интегральных операторов Вольтерра. Это приводит к требованию принадлежности ядра по соответствующим переменным пространству существенно ограниченных функций.

Через $L^\gamma_\infty(D)$ обозначим класс функций, для которых

$$\|f\|_{L^\gamma_\infty(D)} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^\gamma_p(D)} = \sup_{x\in D} \text{vrai}\; |x^\gamma f(x)|.$$

Этот предел существует, если функции $x^\gamma f$ существенно ограничены на ограниченном измеримом множестве D.

Теорема 1. *Пусть* $p \geqslant 1$ *и* $r \geqslant 1$ *— произвольное число и* $1/p + 1/p' = 1$, $1/r + 1/r' = 1$.

Частно-интегральное уравнение Вольтерра второго рода (2) с оператором (1) и ядром $k_\alpha \in L^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha, \gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p, pr, \infty)}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})$ *имеет единственное решение в весовом пространстве Лебега* $L^\gamma_{\mathbf{p}}(D)$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} R(x;\, t_\alpha;\, \lambda)\, f(t_\alpha,\, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha\,,$$

где

$$R(x;\, t_\alpha;\, \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell k_\alpha^{(\ell+1)}(x;\, t_\alpha)\,.$$

Доказательство теоремы проведено по схемам, предложенным в [4] и [5].

Литература

1. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Оператор Киприянова— Бельтрами с отрицательными параметрами операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56. № 12. С. 1-11.

2. Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p.

3. Калитвин, А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

4. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. — М.: Из-во иностранной литературы, 1960.

5. Сабитов, К. Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения / К. Б. Сабитов. — М. : Высшая школа, 2005. — 671 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

Е.А. Мазепа, Д.К. Рябошлыкова (Волгоград, ВолГУ)
elena.mazepa@volsu.ru, daria_ryaboshlikova@volsu.ru

В настоящей работе изучаются решения $u \in C^2(M)$ неоднородного уравнения Шредингера:

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = f(x), \tag{1}$$

где $c(x) \geqslant 0$, $c(x), f(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ для любого $G \subset\subset M$, $0 < \alpha < 1$, $f(x) \not\equiv 0$, на некомпактных римановых многообразиях следующего вида.

Пусть M — полное риманово многообразие без края, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт, а D изометрично произведению $[r_0; +\infty) \times S_1 \times S_2$ (где $r_0 > 0$ и S_i — компактные римановы многообразия без края) и имеет метрику

$$ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2.$$

Здесь $g_i(r)$ — положительные, гладкие на $[r_0; +\infty)$ функции, а $d\theta_i^2$ — метрика на S_i. Пусть $\dim S_i = n_i$ и $g(t) = g_1^{n_1}(t)g_2^{n_2}(t)$. Многообразия M обычно называют квазимодельными многообразиями.

Всюду далее будем считать, что на D выполнено $c(r, \theta_1, \theta_2) \equiv c(r)$ и $f(r, \theta_1, \theta_2) \equiv f(r)$. Введем следующие обозначения (где $r_0 > 0$, $i = 1, 2$)

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{g(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} c(z)g(z)dz \right) dt, \quad I_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{g(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} \frac{g(z)}{g_i^2(z)}dz \right) dt,$$

$$I_f = I + \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{g(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} |f(z)|g(z)dz \right) dt.$$

Теорема. *1) Пусть M и правая часть f уравнения* (1) *таковы, что $I_f < \infty$, $I_i < \infty$ для $i = 1, 2$. Тогда для любой функции $\Phi(\theta_1, \theta_2) \in C(S_1 \times S_2)$ на M существует единственное решение уравнения* (1) *такое, что*

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_1, \theta_2) = \Phi(\theta_1, \theta_2) \quad \text{на} \quad D.$$

---

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (правительственное задание № 0633-2020-0003).

2) Пусть M и правая часть f уравнения (1) *таковы, что $I_f < \infty$, $I_1 = \infty$, $I_2 < \infty$. Тогда для любой функции $\Phi(\theta_2) \in C(S_1 \times S_2)$ на M существует единственное решение уравнения* (1) *такое, что*

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_1, \theta_2) = \Phi(\theta_2) \quad \textit{на} \quad D.$$

3) Пусть M и правая часть f уравнения (1) *таковы, что $I_f < \infty$, $I_1 = \infty$, $I_2 = \infty$. Тогда для любой константы C существует единственное решение уравнения* (1) *такое, что*

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_1, \theta_2) = C \quad \textit{на} \quad D.$$

Замечание. Данные результаты являются новыми и обобщают аналогичные результаты, полученные ранее А.Г. Лосевым и Е.А. Мазепой в работах [1]-[3], для неоднородного уравнения Шредингера на квазимодельных римановых многообразиях. При этом было ослаблено условие на гладкость правой части неоднородного уравнения за счет требования ее зависимости только от радиальной координаты на квазимодельном конце.

Литература

1. Лосев А.Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа // Алгебра и анализ, — 2001, — С. 84 -110.

2. Лосев А.Г. О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях / А.Г. Лосев // Дифференциальные уравнения, — 2017, — т. 53, № 12, С. 1643 - 1652.

3. Losev A.G. Asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation on model Riemannian manifolds / A.G. Losev, E.A. Mazepa // Siberian Electronic Mathematical Reports, — 2022, — v. 19, № 1, P. 66-80

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ АДВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ С НЕПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДИФФУЗИИ

Э.И. Махмуд (Москва, РУДН)
ei_ abdelgalil@yahoo.com

В ограниченной области $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, T)$, $0 < l_1, l_2, T \leqslant \infty$, рассмотрим следующее неоднородное двумерное уравнение дробной адвективной диффузии с непостоянными коэффициентами диффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha w(x,y,t)}{\partial t^\alpha} &= -D_x^{\beta_1}(A_1(x)w(x,y,t)) - D_y^{\beta_2}(A_2(y)w(x,y,t)) \\ &\quad + \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2} + g(x,y,t), \qquad (1) \\ &\qquad 0 < \alpha, \beta_1, \beta_2 < 1, \end{aligned}$$

с начальным и граничным условием

$$\begin{aligned} &w(x,y,0) = \Phi(x,y), \qquad (x,y) \in (0,l_1) \times (0,l_2), \\ &w(x,y,t) = 0, \qquad (x,y) \in \partial((0,l_1) \times (0,l_2)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (2) \end{aligned}$$

Где: α, β_1 and β_2 — параметры, описывающие дробный порядок временных и пространственных точечных (x, y) производных соответственно, $A_1(x) \in C^{\beta_1}((l_1, 0), 0)$ and $A_2(y) \in C^{\beta_2}((0, l_1), 0)$-пространственный непостоянный коэффициент диффузии в направлении точки (x,y), соответственно,$\frac{\partial^\alpha w(x,y,t)}{\partial t^\alpha}$-является оператором дробной производной Капуто во временном направлении и $D_{x_i}^{\beta_i}(h(x_1, x_2, t)), i = 1, 2$-оператор дробной производной Римана-Лиувилля в пространственном направлении [1].

В этой тезисе мы проводим подробное обсуждение и развитие метода разделения переменных (метод Фурье) при решении уравнения дробной адвекции-диффузии (1),(2), где справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *ради каждого* $g(x,y,t) \in C^2(l_1, l_2, 0) \cap C^\alpha(0, 0, T)$, $A_1(x) = x^{\beta_1}, A_2(y) = y^{\beta_2} > 0, \Phi(x,y) \in C(l_1, l_2, 0)$. *Тогда регулярное решение* $w(x,y,t) \in C^2(l_1, l_2, 0) \cap C^\alpha(0, 0, T)$ *краевых задач* (1),(2) *представлено в виде*

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(\Phi_{m,n} E_{\alpha,1}(-(\lambda_m + \kappa_n)t^{\alpha})$$
$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_m+\kappa_n)(t-\tau)^{\alpha}) g_{m,n}(\tau)d\tau\Big)*$$
$$\Big(x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^{s} \frac{\Gamma(2k+\beta_1) - \lambda_m \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}\Big)*$$
$$\Big(y + \sum_{s=1}^{\infty} y^{2s+1} \prod_{k=1}^{s} \frac{\Gamma(2k+\beta_2) - \kappa_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}\Big). \qquad (3)$$

Где: $E_{\alpha,\beta}$- функции Миттага-Леффлера [2],$\Phi_{m,n}, g_{m,n}(t)$ - коэффициенты разложения фурье функций $\Phi(x,y), g(x,y,t)$ соответственно в основе базе функций $\{X_m(x), Y_n(y)\}_{m,n=1}^{\infty}$

Литература

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations / Academic Press: New York, NY, USA, 1999.

2. Aleroev T. Solving the Boundary Value Problems for Differential Equations with Fractional Derivatives by the Method of Separation of Variables // Mathematics,8, 2227–7390 (2020).

ЗНАЧЕНИЯ БЕТА-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ В ЧЁТНЫХ ТОЧКАХ И КРАТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ[1]

К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова

(Москва, МГУ; Архангельск, САФУ; Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ)

mirzoev.karahan@mail.ru, t.Safonova@narfu.ru

I. Функция вида

$$\beta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}, \qquad \Re s > 1,$$

называется бета-функцией Дирихле, а число $\beta(2) = G$ принято называть постоянной Каталана.

В работах [1] и [2] нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных самосопряжённых дифференциальных операторов получать формулы для сумм некоторых сходящихся числовых рядов и новые интегральные представления

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

для некоторых специальных функций. В частности, справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\beta(2n)=\frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{x^{2m-1}}{\sin x}dx,\quad m=1,2,\ldots$$

(см. [2, формула 8]), которое также можно извлечь из одного тождества Рамануджана (см. [3, entry 14, p. 261]). Использовав его, можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *При* $m=2,3\ldots$ *справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\beta(2n)=\frac{2^{2(m-1)}}{(2m-1)!}\times$$

$$\times\sum_{n_1,\ldots,n_{m-1},n_m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n_1+\ldots+n_{m-1}+n_m-1}h_{n_1}\ldots h_{n_{m-1}}}{n_1\ldots n_{m-1}(2n_m-1)(2(n_1+\ldots+n_{m-1}+n_m)-1)},$$

где $h_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$.

II. Символами f_n^m и g_n^m обозначим последовательности чисел такие, что $f_n^0=g_n^0=1$ при $n=0,1,\ldots$ и при $n\in\mathcal{N}$ и $m=1,2,\ldots,n$

$$f_n^m=\sum_{0<l_1<l_2<\ldots<l_m\leqslant n}\prod_{n=1}^{m}\frac{1}{l_n^2},\qquad g_n^m=\sum_{0<l_1<l_2<\ldots<l_m\leqslant n}\prod_{n=1}^{m}\frac{1}{(2l_n-1)^2}.$$

Теорема 2. *При* $m=1,2\ldots$ *справедливы равенства*

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\beta(2n)=(-1)^{m-1}\frac{\pi}{4}\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{(C_{2n}^n)^2}{16^n(2n+1)}g_n^{m-1}=$$

$$=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2(m-1)}}\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{4^n}{(2n+1)^2C_{2n}^n}f_n^{m-1}.$$

III. Следствие 1. *Справедливы равенства*

$$\beta(2)=\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(C_{2n}^n)^2}{16^n(2n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{(2n+1)^2C_{2n}^n},$$

$$\beta(4)=\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(C_{2k}^k\right)^2}{16^k(2k+1)}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}\beta(2)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^{n-1}}{(2n+1)^2C_{2n}^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{8}\beta(2)+$$

$$+\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2(n-k+1)}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i-1}\right)\right).$$

Формулы для $\beta(2)$ известны, а формулы для $\beta(4)$, по-видимому, являются новыми.

Литература

1. Мирзоев К.А. Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Труды ММО. — 2019. — Т. 80, вып. 2. — С. 157–177.

2. Мирзоев К.А. Представления $\zeta(2n+1)$ и связанных с ними чисел в виде определённых интегралов и быстро сходящихся числовых рядов / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Доклады РАН. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ. — 2020. — Т. 494. — С. 48–52.

3. Berndt B.C. Ramanujann's Notebooks: Part I / B.C. Berndt. — New York : Springer Verlag, 1985. — 357 p.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РИМАНА К ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л.Б. Миронова (Елабуга, Елабужский институт КФУ)

lbmironova@yandex.ru

В работе [1] предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. Полученные результаты применялись к исследованию граничных задач для гиперболической системы с кратными характеристиками в трехмерном пространстве независимых переменных [2]. Отметим работы [3]–[5], в которых также исследуются различные граничные задачи для гиперболических систем уравнений, в том числе с применением свойств матрицы Римана.

Здесь рассматривается система уравнений с частными производными

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}^1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}a_{ki}^0(x_1,\dots,x_n)u_i+$$

$$+f_k(x_1,\dots,x_n),\quad k=\overline{1,n}. \tag{1}$$

Не нарушая общности, можем считать, что $a_{ii}^1\equiv 0$.

Для системы (1) с достаточно гладкими коэффициентами доказаны существование и единственность регулярного решения задачи

Коши, построено решение в терминах матрицы Римана. Опираясь на полученные результаты исследована задача с условиями, заданными как на свободной поверхности, так и на характеристической части границы рассматриваемой области (смешанная задача).

Литература

1. Миронова Л.Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками / Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 1. — С. 34–39.

2. Миронова Л.Б. Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве / Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Математика. — 2019. — № 6. — С. 48–57.

3. Жегалов В.И. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными / В.И. Жегалов, Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 3. — С. 12–21.

4. Созонтова Е.А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа / Е.А. Созонтова // Изв. вузов. Математика. — 2013. — № 10. — С. 43–54.

5. Андреев А.А. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками / А.А. Андреев, Ю.О. Яковлева // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2017. — Т. 21, № 4. — С. 752–759.

НЕСКЕЙЛИНГ ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ КЛАСТЕРОВ НА НЕРАВНОМЕРНО ВЗВЕШЕННЫХ КУБИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ

П.В. Москалев (Воронеж, ВГТУ)

moskaleff@mail.ru

Макроскопические характеристики перколяционных кластеров, такие как функция их мощности $P_\infty(p)$ или порог протекания p_c в моделях решеточной перколяции в первую очередь зависят от характеристик окрестности единичного узла используемой решетки [1]. В работе [2] показано, что изменение функций распределения $F_S(p)$ случайных величин S, взвешивающих узлы квадратной перколяционной решетки с $(1,0)$-окрестностью (окрестностью фон Неймана), также влияет на эти характеристики самым существенным образом. Обобщение полученных результатов на трехмерные решетки позволяет сформулировать следующие эмпирические гипотезы.

Гипотеза 1. *Порог перколяции p_c в задаче узлов на неограниченной однородной решетке, взвешенной непрерывной случайной величиной S, определяется p_0-квантилем ее функции распределения:*

$$\lim_{x\to\infty} p_c = F_S^{-1}(p_0), \qquad (H_1)$$

где уровень p_0 определяется формой и радиусом окрестности единичного узла решетки; в частности, для кубической решетки с $(1,0)$*-окрестностью этот уровень будет равен* $p_0 = 0.311608\ldots$

Гипотеза 2. *Функция мощности $P_\infty(p)$ в задаче узлов на неограниченной однородной решетке, взвешенной непрерывной случайной величиной S, определяется соотношением:*

$$\lim_{x\to\infty} P_\infty(p) = \begin{cases} 0, & p < p_c \\ F_S(p), & p \geqslant p_c. \end{cases} \qquad (H_2)$$

На рис. 1 (а) показаны статистические оценки функций мощности перколяционных кластеров $P_\infty(p)$ на кубических решетках с размерами $x = 33^3$, 65^3, 129^3 узлов с $(1,0)$-окрестностью, взвешенных бета-распределенными случайными величинами $S \sim B(1,2)$, $B(1,1)$, $B(2,1)$, функции распределения которых показаны штриховыми линиями. Относительные размеры символов соответствуют размеру решеток, а вертикальные штриховые линии — априорным оценкам порога перколяции по (H_1). На рис. 1 (в) показаны статистические оценки функций нормированной информационной энтропии перколяционных кластеров $H_0(p)$ на тех же кубических решетках:

$$H_0(p) = -\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{x} w_i(p)\log_2 w_i(p),$$

где w_i — относительная частота принадлежности узла решетки к стягивающему (перколяционному) кластеру. Для построения статистических моделей была использована библиотека SPSL, выпущенная автором под свободной лицензией GNU GPL-3 [3].

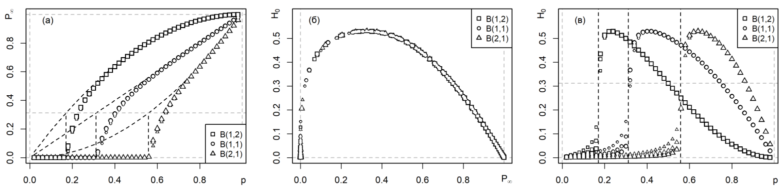


Рис. 1. Статистические оценки функций: а) $P_\infty(p)$; б) $H_0(P_\infty)$; в) $H_0(p)$

При изменении размера перколяционной решетки статистические оценки функций $P_\infty(p)$ и $H_0(p)$ сходятся к своим термодинамическим пределам при $x \to \infty$. В то же время их поведение оказывается согласованным и при конечных размерах решетки, что проявляется при рассмотрении показанной на рис. 1 (в) зависимости $H_0(P_\infty)$, инвариантной и к размеру решетки x, и к виду функции распределения $F_S(p)$, взвешивающей ее случайной величины S.

Литература

1. Москалев П.В. Перколяционное моделирование пористых структур / П.В. Москалев. — М.: URSS, 2018. — 240 с.

2. Moskalev P.V. Convergence of percolation probability functions to cumulative distribution functions on square lattices with (1,0)-neighborhood / P.V. Moskalev // Phys. A: Stat. Mech. Appl. — 2020. — V. 553. — P. 124657. — DOI: 10.1016/j.physa.2020.124657.

3. Moskalev P.V. SPSL: Site percolation on square lattices / P.V. Moskalev. — CRAN, 2019. — R package version 0.1-9. — URL: https://cran.r-project.org/package=SPSL.

ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА[1]

А.Б. Муравник (Москва, РУДН)

amuravnik@mail.ru

Будет представлено современное состояние теории дифференциально-разностных уравнений (т. е. уравнений, содержащих, кроме дифференциальных операторов, операторы сдвига) эллиптического типа в полупространстве. Интерес, проявляемый в настоящее время к указанным *функционально-дифференциальным* уравнениям обусловлен как их многочисленными приложениями (включая те, в которых неприменимы классические модели математической физики), так и принципиально новыми эффектами, порождаемыми *нелокальной* природой таких уравнений.

Задачи в полупространстве для эллиптических уравнений интересны тем, что, несмотря на эллиптичность уравнения, одна из независимых переменных (а именно, переменная, направление которой ортогонально краевой гиперплоскости) приобретает так называемые *временеподобные* свойства — так, разрешающий оператор обладает полугрупповым свойством и имеет место стабилизация решений при стремлении вышеуказанной временеподобной переменной к бесконечности.

Это явление отмечено и в классическом случае *дифференциальных* уравнений. В настоящем докладе будет изложена ситуация для дифференциально-разностного случая и будет показано, как можно классифицировать разнообразные получаемые результаты. А именно, содержательной является классификация по следующим двум направлениям:

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

- разделение случаев, когда уравнение содержит *суперпозиции* дифференциальных операторов и операторов сдвига либо их *суммы* (иными словами, содержит нелокальные потенциалы);
- разделение случаев, когда краевая функция *ограничена* (в частности, постоянные решения возможны только в этом случае) либо *суммируема* (в частности, в этом случае возможны только решения с конечной энергией).

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов (Вологда, ВоГУ)
emuhamadiev@rambler.ru, naimovan@vogu35.ru

В работе исследовано существование периодических и ограниченных решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^4, \tag{1}$$

где ∇v — градиент функции $v \in \mathbb{V}_m$, $f \in \mathcal{R}_m$ или $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$. Здесь $\mathbb{V}_m$ — множество функций $v \in C^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$, положительно однородных порядка $(m+1)$, т. е. $v(\lambda y) \equiv \lambda^{m+1} v(y)$ $\forall \lambda > 0$, и удовлетворяющих условию $\nabla v(y) \neq 0$ при $y \neq 0$. Через $\mathcal{R}_m$ обозначено множество отображений $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4; \mathbb{R}^4)$ таких, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t, y)| < \infty, \quad \lim_{|y| \to \infty} |y|^{-m} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t, y)| = 0.$$

$\mathcal{R}_{m,\omega}$ — подмножество $\mathcal{R}_m$, состоящее из ω-периодических по t отображений. Вещественные числа $m > 1$ и $\omega > 0$ считаются заданными.

Вопрос о существовании периодических решений для системы уравнений (1) ставится следующим образом: каким условиям должна удовлетворять $v \in \mathbb{V}_m$, чтобы при любом $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$ существовало хотя бы одно ω-периодическое решение $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ системы уравнений (1)? Аналогично ставится вопрос о существовании ограниченных решений: при каких условиях на $v \in \mathbb{V}_m$ при любом $f \in \mathcal{R}_m$ существует хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ системы уравнений (1).

Система уравнений (1) отличается от общих систем тем, что при любом $f \in \mathcal{R}_m$ функция v является направляющей функцией для системы уравнений (1) на бесконечности, т. е. правая часть

$\nabla v(y) + f(t, y)$ системы при больших значениях $|y|$ образует острый угол с градиентом $\nabla v(y)$ функции $v(y)$. Данное свойство позволяет исследовать существование периодических и ограниченных решений системы уравнений (1) в терминах свойств функции v.

Для функции $v \in \mathbb{V}_m$ множество

$$N_0(v) := \{y \in \mathbb{R}^4 \colon |y| = 1, v(y) = 0\},$$

если оно не пусто, состоит из конечного числа связных компонент и каждая связная компонента является гладким замкнутым двумерным многообразием. Известно, что всякое гладкое замкнутое двумерное многообразие диффеоморфно сфере с ручками. Обозначим через $p_0(v)$ число связных компонент множества $N_0(v)$, а число ручек связных компонент множества $N_0(v)$ обозначим $k_1(v)$, ..., $k_{p_0}(v)$. Если множество $N_0(v)$ пусто, то эти числа полагаем равными нулю.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для $v \in \mathbb{V}_m$ при любом $f \in \mathcal{R}_{m,\omega}$ существует ω-периодическое решение системы уравнений (1) тогда и только тогда, когда выполнено условие $k_1(v) + \ldots + k_{p_0}(v) \neq p_0(v) - 1$.*

Теорема 2. *Для $v \in \mathbb{V}_m$ при любом $f \in \mathcal{R}_m$ существует ограниченное решение системы уравнений (1) тогда и только тогда, когда выполнено условие $k_1(v) + \ldots + k_{p_0}(v) + |p_0(v) - 1| > 0$.*

Полученные результаты дополняют результаты работ [1 — 4] применительно к системе уравнений (1).

Литература

1. Мухамадиев Э. О построении правильной направляющей функции для системы дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Доклады АН СССР. — 1970. — Т. 190, № 4. — С. 777-779.

2. Мухамадиев Э. Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Доклады РАН. — 1996. — Т. 351, № 5. — С. 596-598.

3. Мухамадиев Э. Число Морса направляющих функций и рекуррентные движения динамических систем / Э. Мухамадиев // Известия РАЕН, серия МММИУ. — 2000. — Т. 4, № 4. — С. 37-66.

4. Мухамадиев Э. Критерии существования периодических и ограниченных решений для трехмерных систем дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 1. — С. 157-172.

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ-ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ КУСОЧНО - ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Дж. Нуров (РФ, Вологда, ВоГУ, Таджикистан, Душанбе, ТНУ)

emuhamadiev@rambler.ru, nid1@mail.ru

Теорема Лиувилля-Остроградского о представлении определителя Вронского для линейных дифференциальных уравнений и представлении фазового объема для нелинейных систем с гладкой правой частью относительно пространственных переменных часто используется в механике, статистической физике и общей теории динамических систем [1-3]. Поэтому представляет интерес установления аналога теоремы Лиувилля-Остроградского для дифференциальных уравнений с негладкой правой частью.

В работе [4] исследовано существование предельного цикла в окрестности состояния равновесия негладкой динамической системы вида

$$y^{''} + ay^{'} + by + c|y^{'} - \lambda| = 0, \tag{1}$$

где a, b, c и λ - постоянные числа.

В настоящей работе изучаются возможности получения аналога теоремы Лиувилля-Остроградского для уравнения (1) в случае $\lambda = 0$, т.е. для уравнения

$$y^{''} + ay^{'} + by + c|y^{'}| = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) «склеивается» из двух линейных уравнений

$$y^{''} + (a+c)y^{'} + by = 0, \text{ если } y' > 0 \tag{3}$$

и

$$y^{''} + (a-c)y^{'} + by = 0, \text{ если } y' \leqslant 0. \tag{4}$$

и эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \\ x_2 = -ax_2 - bx_1 - c|x_2|. \end{cases} \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $4b > (|a|+|c|)^2$. Это означает, что корни $\mu_1^{\pm}$ и $\mu_2^{\pm}$ характеристических уравнений

$$\mu^2 + (a \pm c)\mu + b = 0,$$

соответствующего уравнениям (3) и (4) комплексные, т.е.

$$\mu_1^{\pm} = \alpha^{\pm} + i\beta^{\pm}, \quad \mu_2^{\pm} = \alpha^{\pm} - i\beta^{\pm},$$

$$\alpha^{\pm} = -\frac{1}{2}(a \pm c), \quad \beta^{\pm} = \sqrt{4b - (a \pm c)^2}.$$

В этом случае справедлива следующая

Лемма[4]. *Пусть* $4b > (|a| + |c|)^2$. *Тогда траектории системы (5) совершают бесконечно много оборотов вокруг особой точки* $(0,0)$; *при* $t \to +\infty$ *приближаются к ней, если* $a > 0$; *удаляются от нее, если* $a < 0$; *являются замкнутыми, если* $a = 0$.

Пусть $w_1(t) = (x_{11}(t), x_{21}(t))^T$ и $w_2(t) = (x_{12}(t), x_{22}(t))^T$ - два решения системы (5) удовлетворяющие, соответственно, начальным условиям $x_{11}(0) = -1$, $x_{21}(0) = 0$ и $x_{12}(0) = -1$, $x_{22}(0) = \sigma > 0$. Обозначим через $t_1(\sigma), t_2(\sigma), ...$ последовательные нули функции $x_{22}(t) = \dot{x}_{12}(t)$. Легко видеть, что

$$t_1(0) = \frac{\pi}{\beta^+}, \quad t_1(\sigma) = \frac{\pi}{\beta^+} - \arctan\frac{\sigma\beta^+}{\sigma\alpha^+ + |\mu^+|^2},$$

$$t_2(\sigma) = t_1(\sigma) + \pi/\beta^-, t_3(\sigma) = t_2(\sigma) + \pi/\beta^+, ...$$

Отметим, что функции $t_1(\sigma), t_2(\sigma), ...$ непрерывны при $\sigma \geqslant 0$ и $t_1 = t_1(0), t_2 = t_2(0), ...$ -последовательные нули функции $x_{21}(t) = \dot{x}_{11}(t)$.

Рассмотрим определитель Вронского

$$W(t,\sigma) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}.$$

Геометрическая интерпретация определителя Вронского - это ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы $w_1(t), w_2(t)$.

Теорема. *Предположим, что* $4b > (|a|+|c|)^2$. *Тогда существует предел*

$$\Phi(t) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{W(t,\sigma)}{W(0,\sigma)},$$

равномерно на каждом отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ *и имеют место равенства* $\Phi(t) = e^{-(a+c)t}$, *если* $0 \leqslant t \leqslant t_1$ *и* $\Phi(t) = e^{-(a+c)t_1-(a-c)(t-t_1)}$, *если* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Литература

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / — М. : Наука, 1967. — 472 с.

3. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры / — М. : Физматлит, 2003. —496 с.

4. Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Уфимский математический журнал. : Т. 6, № 1 (2014). С. 84 —93.

О СИСТЕМЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НА НЕЧЕТКИХ СВЯЗЯХ ДЛЯ ОЦЕНКИ УРОВНЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЗАПАСОВ ПРЕДПРИЯТИЯ

С.А. Никитина (Челябинск, ЧелГУ)
nikitina@csu.ru

В работе предлагается способ построения системы показателей на нечетких связях для оценки уровня материальных запасов на предприятии. Выделен ряд существенных факторов, которые были сгруппированы в несколько блоков. Для проведения анализа построено дерево факторов, отражающее нечетко-логическую связь параметров. В этом дереве первый уровень — это комплексный показатель состояния материальных запасов. Второй уровень — это уровень блоков, по которым сгруппированы показатели. Следуя [1] в качестве таких групп возьмем следующие: затраты на хранение, затраты на выполнение заказа (организацию) и затраты на потери от дефицита товара. Третий уровень — это отдельные факторы внутри каждой группы, которые следует упорядочить по уровню значимости. Необходимо также установить предпочтения одного блока по отношению к остальным. Для этих целей можно использовать, например, шкалу Саати [2]. Такие предпочтения необходимо установить для того, чтобы определить весовые коэффициенты как для блоков параметров, так и для самих параметров внутри блоков. В результате получим иерархию показателей на нечетких связях.

По этой иерархии, используя методику, разработанную в [3], можно установить комплексную лингвистическую оценку уровня материальных запасов предприятия. Отметим, что сначала агрегирование данных выполняется внутри каждой группы показателей с учетом установленных весовых коэффициентов. Затем необходимо выполнить свертку оценок блоков второго уровня иерархии. При этом все параметры модели требуется предварительно фаззифицировать. Для этого, например, можно применить систему нечетких чисел треугольного, трапециевидного или (L-R) типа, удовлетворяющую требованиям серой шкалы Поспелова [4].

Литература

1. Шрайбфедер Дж. Эффективное управление запасами /Дж. Шрайбфедер . — М. Альпина Бизнес Букс, 2008. — 304 с.

2. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети /Т.Л. Саати . — М. : Издательство ЛКИ, 2008. — 308 с.

3. Батыршин И.З. Нечеткие гибридные системы. Теория и практика /И.З. Батыршин, А.О. Недосекин, А.А. Стецко и др. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 208 с.

4. Поспелов Д.А. «Серые» и/или «черно-белые» /Д.А. Поспелов // Прикладная эргономика. Специальный выпуск «Рефлексивные процессы». — 1994. — Т. 1. —С. 29–33.

ГЕОМЕТРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИ РАЗДЕЛИМЫХ СИСТЕМ[1]

С.С. Николаенко (Москва, МФТИ)
nikostas@mail.ru

Одним из методов качественного анализа решений вполне интегрируемой гамильтоновой системы является изучение топологии её слоения Лиувилля, то есть слоения фазового пространства на совместные поверхности уровня первых интегралов системы (инвариантные торы Лиувилля и особые слои). А. Т. Фоменко и его школой [1] построена теория топологической классификации интегрируемых систем, одним из основных результатов которой является полное описание топологии слоения Лиувилля на 3-мерном инвариантном подмногообразии невырожденной интегрируемой системы с двумя степенями свободы. Соответствующий классифицирующий инвариант, называемый *меченой молекулой* (или *инвариантом Фоменко–Цишанга*), имеет структуру графа с числовыми метками. Рёбрам этого графа отвечают однопараметрические семейства регулярных слоёв, а вершинам – бифуркации слоения, так называемые *атомы*. Поиск этого инварианта для конкретной интегрируемой системы может оказаться весьма нетривиальной задачей, однако в ряде случаев он может быть выполнен алгоритмически. Одним из таких случаев является класс *алгебраически разделимых систем*. Систематический подход к изучению фазовой топологии таких систем был заложен М. П. Харламовым в [2]. Алгебраическое разделение в типичном случае означает, что гамильтоновы уравнения на каждом слое сводятся к системе уравнений Абеля

$$\dot{u}_i = \frac{\sqrt{P(u_i)}}{u_1 - u_2}, \quad i = 1, 2,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01303).

где P — многочлен с коэффициентами, зависящими от констант первых интегралов. При этом, что особенно важно, предполагается, что все фазовые переменные представляются как рациональные функции от радикалов вида $\sqrt{u_i - \alpha_j}$, где u_i — переменные разделения, α_j — корни многочлена P. Выражение фазовых переменных в таком виде позволяет понять структуру проекции каждого слоя лиувиллева слоения на плоскость разделяющихся переменных $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$ и в явном виде описать топологию слоя и слоения в целом. При этом меченая молекула алгоритмически определяется некоторой $\mathbb{Z}_2$-матрицей, которая, в свою очередь, однозначно задаётся формулами зависимости фазовых переменных от переменных разделения.

В качестве следствия из алгоритма топологической классификации алгебраически разделимых систем приведём список *элементарных* бифуркаций (атомов), которые могут возникать в таких системах (т.е. бифуркаций, отвечающих одному корню кратности 2 многочлена P).

Теорема 1. *Всякая элементарная компактная топологически устойчивая невырожденная 3-мерная бифуркация лиувиллева слоения алгебраически разделимой системы имеет тип одного из атомов* A, B, C_2, P_4, D_1, A^*, A^{**}.

Замечание. Подробное описание перечисленных в теореме атомов можно найти в [1]. Например, атом A соответствует вырождению двумерного тора в окружность, атом B – перестройке двух торов в один.

Литература

1. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск: изд. дом «Удмуртский университет», 1999. — 444 с.

2. Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам / М.П. Харламов // Нелин. динамика. — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 769–805.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С НЕГЛАДКОЙ ПОГРАНСЛОЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ

А.С. Омуралиев, Э.Д. Абылаева

(Бишкек, Кыргызско-Турецкий Университет «Манас»)

asan.omuraliev@manas.edu.kg, ella.abylaeva@manas.edu.kg

В работе строится регуляризованная асимптотика [1] решения задачи изученной в [2]:

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon \partial_t u - \varepsilon^2 a^2(x) \partial_x^2 u + b(x) u = f(x,t),$$

$$(x,t) \in \Omega = (0 < x < +\infty) \times (0 < t \leqslant T),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u(x,t,\varepsilon)|_{x=0} = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Построенная в [2] асимптотика решения с точностью $O(\varepsilon^2)$, содержит пять типов погранслойных функций. Для построения классического решения применяется процедура сглаживания. Здесь, используя метод С.А.Ломова [1], удачным выбором регуляризующей функции построена гладкая регуляризованная асимптотика любого порядка. Введем регуляризующие переменные [1] по формулам:

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \xi = \varphi(x,\tau), \tag{2}$$

и расширенную функцию $\tilde{u}(M,\varepsilon)$, $M = (x,t,\tau,\xi)$ такую, что

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\alpha=\beta(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon), \tag{3}$$

$\alpha = (\tau, \xi)$, $\beta = (\frac{t}{\varepsilon}, \varphi(x,\tau))$.

На основании (2), (3) найдем производные $\partial_t u$, $\partial_x^2 u$. Тогда относительно функции $\tilde{u}(M,\varepsilon)$ получим расширенную регулярную по ε задачу:

$$\tilde{L_\varepsilon}\tilde{u} \equiv \varepsilon\partial_t\tilde{u} + \partial_\tau\tilde{u} + \partial_\tau\varphi\partial_\xi\tilde{u} - \varepsilon^2 a(x)(\partial_x\varphi)^2\partial_\xi^2\tilde{u} -$$

$$\varepsilon^2 a(x)L_\xi\tilde{u} + b(x)\partial_x\varphi\partial_\xi\tilde{u} + b(x)\partial_x\tilde{u} = f(x,t), \quad M \in Q, \tag{4}$$

$$\tilde{u}|_{t=\tau=0} = \tilde{u}|_{x=0,\xi=0} = 0, \tag{5}$$

где $Q = \Omega \times (0,+\infty)^2$, $L_{xi} \equiv 2\partial_x\varphi\partial^2_{x,\xi} + \partial_x^2\varphi\partial_\xi$. При этом имеет место тождество:

$$\left(\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}\right)|_{\alpha=\beta(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon).$$

Регуляризующую функцию $\varphi(x,\tau)$ выберем как решения обобщенной задачи Коши:

$$\partial_\tau\varphi(x,\tau) + b(x)\partial_x\varphi(x,\tau) = 0, \quad x = 0, \ \tau = 0, \varphi = 0,$$

т.е. в виде:

$$\varphi(x,\tau) = \varphi(B(x) - \tau), B(x) = \int_0^x \frac{ds}{b(s)}.$$

Решение задачи (4),(5) будем определять в виде ряда теории возмущения, для коэффициентов которого получим итерационные задачи, которые решаем в классе функций:

$$U = \{u(M) : u(M) = v(x,t) + Z(M)exp(B(x)-\tau) + c(t)exp(B(x)-\tau),$$

$$|Z(M)| < Cexp\left(-\frac{\xi^2}{8\tau}+\tau\right)\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть заданные функции гладкие. Тогда при достаточно малых ε задача (1) имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$ и для любого натурального n справедливо равенство*

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} [v_k(x,t) + Z_k(x,t,\varphi(x,t/\varepsilon))exp(B(x)-t/\varepsilon)+$$

$$c_k(t)exp(B(x)-t/\varepsilon)] + O\left(\varepsilon^{n+1}\right), (x,t)\in\tilde{\Omega}.$$

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. —М. : Наука, 1981.

2. Бутузов В.Ф. Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малыми параметрами при старших производных / В.Ф. Бутузов, А.В. Нестеров //Ж. вычисл. матем. и матем.физ. — 1982. —Т.. 22, № 4, С. 865–870.

ОБ ОДНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ПАМЯТЬЮ [1]

В.П. Орлов (Воронеж, ВГУ)

orlov_vp@mail.ru

В $Q_T = [0,T]\times\Omega$, где $\Omega \in R^N$, $N = 2,3$ — ограниченная область с гладкой границей Γ рассматривается движение вязкоупругой жидкости типа Олдройда, описываемое начально-краевой задачей Z:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \sum_{i=1}^{N} u_i(t,x)\partial u(t,x)/\partial x_i - \mu_0\Delta u(t,x) -$$

$$\mu_1 \mathrm{Div}\int_{\tau(t,x)}^{t} \exp((s-t)/\lambda)\,\mathcal{E}(u)(s,z(s;t,x))\,ds +$$

$$\mathrm{grad}\,p(t,x) = f(t,x),\ (t,x)\in Q_T;$$

$$\mathrm{div}\,u(t,x)=0,\ (t,x)\in Q_T; \int_\Omega p(t,x)\,dx = 0;\ t\in[0,T];$$

$$u(0,x) = u^0(x),\ x\in\Omega_0, u(t,x) = \varphi(x),$$
$$(t,x)\in S_T = \{(t,x): t\in[0,T], x\in\Gamma\}.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00051).

Здесь $u(t,x){=}(u_1(t,x),u_2(t,x))$ и $p(t,x)$ искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t,x)$ плотность внешних сил, $\mathcal{E}(u){=}\{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^N$ тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$. Дивергенция $\mathrm{Div}\,\mathcal{E}(u)$ матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ константы, характеризующие вязкоупругие свойства жидкости, u^0 и φ заданные начальное и граничное значения функции u. Вектор-функция $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau u(s,z(s;t,x))\,ds, \quad \tau,t \in [0,T], \quad x \in \Omega.$$

Функция $\tau(t,x)$ определяется как $\tau(t,x) = \inf\{\tau : z(s;t,x)) \in \Omega, s \in [\tau,t]\}$.

Множество $\gamma(s,x) = \{y : y = z(s;t,x),\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ определяет траекторию движения частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$.

В случае однородного граничного условия ($\varphi = 0$) все точки границы являются стационарными траекториями, а траектория движения частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$ лежит в Ω при всех $s \in [0,T]$, так что $\tau(t,x) = 0$ и интеграл в (1) берется по $[0,T]$.

В случае неоднородного граничного условия ($\varphi \neq 0$) на границе появляются точки втекания и вытекания жидкости, и траектория движения $\gamma(t,x)$ частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$ при $\tau(t,x) > 0$, начинается на границе Γ в момент времени $\tau(t,x) > 0$, так что $\gamma(t,x) = \{y : y = z(s;t,x), \tau(t,x) < s \leqslant t\}$ лежит в Ω, $z(\tau(t,x);t,x) \in \Gamma$, и интеграл (1) в берется по $[\tau(t,x),T]$.

В настоящей работе устанавливается существование слабого решения задачи Z. Исследование предполагает замену поставленной задачи операторным уравнением, регуляризацию уравнения, что позволяет установить существование решений на основе априорных оценок и утверждений о предельных переходах.

Для разрешимости задачи Коши используется теория регулярных лагранжевых потоков.

Результат получен совместно с В.Г. Звягиным.

Литература

1. Орлов В.П. Об одной неоднородной регуляризованной задаче динамики вязкоупругой среды / В.П. Орлов // Известия ВУЗов. Математика. — 2012. — № 8. — С. 58–64.

2. Звягин В.Г. Об априорных оценках слабых решений одной неоднородной задачи динамики вязкоупругой сплошной среды с па-

мятью / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Известия ВУЗов. Математика. — 2021. — № 5. — С. 43–54.

3. Zvyagin V.G. Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with Memory / V.G. Zvyagin, V.P. Orlov // Nonlinear Analysis: TMA. — 2018. — V. 172. — P. 73–98.

БИФУРКАЦИИ ТОРОВ ЛИУВИЛЛЯ В ОДНОЙ ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧЕ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ[1]

Г.П. Пальшин (Долгопрудный, МФТИ)

palshin.gp@phystech.edu

Рассматривается обобщённая модель вихревой динамики, которая включает в себя два особых случая: модель N *магнитных* вихрей в ферромагнетиках [1] и модель N *гидродинамических* вихрей в идеальной жидкости [2]. Точечные вихри находятся на позициях $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, N$. Они характеризуются постоянными интенсивностями Γ_α и полярностями λ_α, которые принимают значения $+1$ или -1 в зависимости от намагниченности, направленной вверх или вниз, соответственно. Случай идеальной жидкости достигается при условии равенства полярностей: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N$.

В данной работе рассматривается *ограниченная* модель трёх магнитных вихрей. Ограничение состоит в фиксации одного из вихрей в точке начала координат. Уравнения движения такой системы могут быть записаны в гамильтоновой форме:

$$H = \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} \ln \ell_1 + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} \ln \ell_2 + \frac{\Gamma_1}{\lambda_1} \frac{\Gamma_2}{\lambda_2} \ln \ell_{12},$$

$$\Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{1}$$

где $\ell_\alpha = |r_\alpha|$ и $\ell_{\alpha\beta} = |r_\alpha - r_\beta|$.

Помимо интеграла энергии H, система (1) обладает интегралом *углового момента завихренности* $F = \Gamma_1 \ell_1^2 + \Gamma_2 \ell_2^2$, что делает её вполне интегрируемой по Лиувиллю с двумя степенями свободы.

Основную роль в исследовании подобных динамических систем играет *бифуркационная диаграмма* Σ интегрального отображения $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = (F(\boldsymbol{x}), H(\boldsymbol{x}))$. В работе рассматривается случай положительных интенсивностей $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0$ и положительных полярностей $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Вводится параметр отношения интенсивностей $\gamma = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$. В случае $\gamma = 1$ бифуркационная диаграмма (рис. 1) содержит бифуркацию вида $3\mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \left(\mathbb{S}^1 \dot\cup \mathbb{S}^1 \dot\cup \mathbb{S}^1\right) \to \mathbb{T}^2$. Здесь $\mathbb{T}^2$ обозначает наличие двумерного тора Лиувилля в прообразе интегрального отображения. Подобная бифуркация также встречалась в другой

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00399).

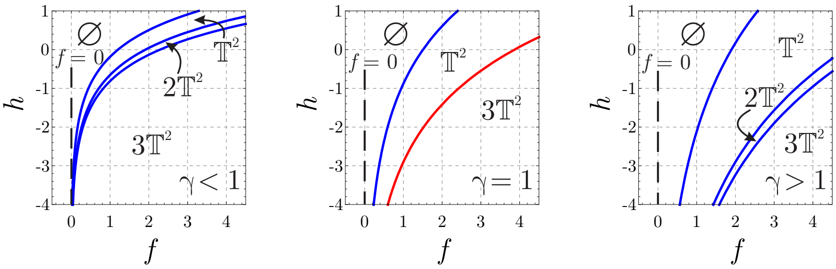


Рис. 1: Бифуркационные диаграммы для различных значений γ.

обобщённой модели вихревой динамики [3] (в случае равных интенсивностей) и при изучении М.П. Харламовым интегрируемого случая Горячева-Чаплыгина-Сретенского [4] в динамике твёрдого тела. При малом возмущении по параметру γ критическая интегральная поверхность оказывается неустойчивой и распадается на два несвязных критических интегральных многообразия $\mathbb{S}^1 \times \left(\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1\right) \cup \mathbb{T}^2$ и $\mathbb{S}^1 \times \left(\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1\right)$. Этот факт подтверждается работой [5], посвящённой расщепляемости седловых особенностей.

Автор выражает свою благодарность профессору П. Е. Рябову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Komineas S. Gröbli solution for three magnetic vortices / S. Komineas, N. Papanicolaou // J. Math. Phys. — 2010. — Т. 51, № 4. — С. 042705.

2. Helmholz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen / H. Helmholz // J. Reine Angew Math. — 1858. — Т. 55. — С. 25–55.

3. Ryabov P.E. Bifurcation diagram of one generalized integrable model of vortex dynamics / P.E. Ryabov, A.A. Shadrin // Regul. Chaotic Dyn. — 2019. — Т. 24, № 4. — С. 418–431.

4. Харламов М.П. Топологический анализ интегируемых задач динамики твердого тела / М.П. Харламов. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1988. — 200 с.

5. Ошемков А.А. Интегрируемые возмущения седловых особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем / А.А. Ошемков, М.А. Тужилин // Матем. сб. — 2018. — Т. 209, № 9. — С. 102–127.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ С КУЛОНОВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ САМОДЕЙСТВИЯ ВБЛИЗИ НИЖНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ ВШЭ, НИУ МЭИ)
pereskokov62@mail.ru

Рассматривается задача на собственные значения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ для нелинейного оператора типа Хартри с кулоновским потенциалом самодействия $|q-q'|^{-1}$:

$$\Big(H-\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{|q-q'|}|\psi(q')|^2dq'\Big)\psi=\lambda\psi, \tag{1}$$

$$||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^2)}=1, \tag{2}$$

где

$$H=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Big)+\frac{q_1^2+q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\varepsilon>0$ — малый параметр. Уравнения самосогласованного поля типа Хартри во внешнем поле играют фундаментальную роль в квантовой теории, в нелинейной оптике, а также при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в молекулах ДНК.

Особенностью данной задачи является то, что она относится к классу резонансных, поскольку обе частоты осциллятора равны 1. Кроме того, потенциал самодействия имеет особенность. Поэтому лучевой метод, а также общая теория комплексного ростка Маслова здесь не применимы. Мы воспользуемся тем, что после перехода к полярным координатам в уравнении (1) переменные разделяются.

Собственные значения задачи (1),(2) при $\varepsilon=0$ равны $\lambda_n=n+1,\ n=0,1,2\dots$. В данной работе показано, что при $\varepsilon\to0$ и n порядка ε^{-1} для $k=0,1,2,\dots$ собственные значения задачи (1),(2) задаются асимптотической формулой

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon)=n+1-\frac{\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{n}}(\ln n+\gamma+8\ln2-\sigma_k)+O\Big(\frac{\ln n}{n^3}\Big),n\to\infty, \tag{3}$$

где γ— постоянная Эйлера, а числа σ_k определяются равенством

$$\sigma_k=\begin{cases}0, & k=0,\\ \sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{j}, & k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

Отметим, что при $k \to \infty$ справедливо разложение

$$\sigma_k = \ln k + \gamma + O\Big(1/k\Big).$$

Разложение (3) описывает спектр оператора типа Хартри с кулоновским потенциалом самодействия вблизи нижних границ спектральных кластеров, а соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружностей [1].

Данная работа продолжает цикл статей, посвященных изучению асимптотики спектра операторов типа Хартри вблизи границ спектральных кластеров. В статьях [2], [3] был рассмотрен случай гладкого потенциала самодействия, когда потенциал задается многочленом второй степени от квадрата расстояния. В [4] была получена формула для асимптотики спектра двумерного оператора Хартри с логарифмическим потенциалом самодействия вблизи верхних границ спектральных кластеров.

Литература

1. Вахрамеева Д.А. Асимптотика спектра двумерного оператора типа Хартри с кулоновским потенциалом самодействия вблизи нижних границ спектральных кластеров / Д.А. Вахрамеева, А.В. Перескоков // ТМФ. — 2019. — Т. 199, № 3. — С. 445–459.

2. Перескоков А.В. Квазиклассическая асимптотика спектра оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // ТМФ. — 2014. — Т. 178, № 1. — С. 88–106.

3. Перескоков А.В. Квазиклассическая асимптотика спектра вблизи нижних границ спектральных кластеров для оператора типа Хартри / А.В. Перескоков // Матем. заметки. — 2017. — Т. 101, вып. 6. — С. 894–910.

4. Перескоков А.В. Квазиклассическая асимптотика спектра двумерного оператора Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // ТМФ. — 2016. — Т. 187, № 1. — С. 74–87.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПОРЯДКА БОЛЬШЕГО ЕДИНИЦЫ[1]

Г.Г. Петросян, О.Ю. Петросян (Воронеж, ВГПУ)
garikpetrosyan@yandex.ru

В сепарабельном банаховом пространстве E рассматривается краевая задача для дифференциальных уравнений с дробными производными порядка $\alpha \in (1,2], \beta \in [0,1]$ следующего вида:

$$ {}^{C}D_0^{\beta}[({}^{C}D_0^{\alpha} + \lambda)x(t)] = f(t, x(t)),\, t \in [0,T], \tag{1}$$

$$ x(0) = x(T),\, x(\tau) = \xi,\, x'(0) = x'(T). \tag{2}$$

Здесь ${}^{C}D_0^{\delta}$ обозначает дробную производную Капуто порядка δ, числа $\lambda > 0$, $\tau \in [0,T]$ и фиксировано, так же как элемент $\xi \in E$. Мы полагаем, что оператор $f : [0,T] \times E \to E$ подчиняется следующим условиям:

$(f1)$ для любого $\xi \in E$ функция $f(\cdot, \xi) : [0,T] \to E$ измерима;

$(f2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ оператор $f(t,\cdot) : E \to E$ непрерывен;

$(f3)$ существует функция $\omega \in L_+^{\infty}([0,T])$ такая, что для каждого $\xi \in E$ мы имеем неравенство $\|f(t,\xi)\|_E \leqslant \omega(t)(1 + \|\xi\|_E)$, для п.в. $t \in [0,T]$;

$(f4)$ существует функция $\mu \in L_+^{\infty}([0,T])$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Omega \subset E$ выполняется неравенство $\chi(f(t,\Omega)) \leqslant \mu(t)\chi(\Omega)$, для п.в. $t \in [0,T]$, где χ – мнк Хаусдорфа в E.

Для данной краевой задачи устанавливаются условия существования решения.

Литература

1. Каменский М.И. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Каменский, О.Ю. Макаренков, П. Нистри // Доклады Академии наук. — 2003. — Т. 388, № 4. — С. 439-442.

2. Каменский М.И. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети / М.И. Каменский, О.М. Пенкин, Ю.В. Покорный // Доклады Академии наук. — 1999. — Т. 368, № 2. — С. 157-159.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства просвещения РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009) и гранта РФФИ (проект № 20-51-15003 НЦНИ_ а.

3. Петросян Г.Г. О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования /Г.Г. Петросян // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, №. 131. — С 284–289.

4. Петросян Г.Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве /Г.Г. Петросян // Уфимский математический журнал. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 71-82.

5. Gurova I.N., Kamenskii M.I. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations / I.N. Gurova, M.I. Kamenskii // Differential Equations. — 1996. — Vol. 32, — № 1. — P. 106-112.

6. Johnson R. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods / R. Johnson, P. Nistri, M. Kamenski // Journal of Differential Equations. — 1997. — Vol. 140, № 1. — P. 186-208.

7. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin — New-York : Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.

8. Kamenskii M.I. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, Is. 2. — P. 136-154.

9. Kamenskii M.I. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space / M.I. Kamenskii, G.G. Petrosyan, C.-F. Wen // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. — 2021. — Vol. 5, № 1. — P. 155-177.

10. Petrosyan G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order / G. Petrosyan // The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics. — 2020. — Vol. 34. — P. 51-66.

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДРОБНОЙ ЗАДАЧИ В ОКРЕСТНОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ[1]

С.И. Пискарев (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
piskarev@gmail.com

Доклад посвящен численному анализу абстрактного полулинейной дробной задачи Коши

$$D_t^{\alpha} u(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad u(0) = u^0,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20085).

в банаховом пространстве E,, где $\mathbf{D}_t^\alpha$ — производная Капуто-Джрбашяна ($0 < \alpha < 1$), оператор A порождает аналитическую и компактную C_0-полугруппу $\exp(\cdot A)$ и функция $f(\cdot)$ достаточно гладкая [1,2].

Мы разрабатываем общий подход для установления существования устойчивого и неустойчивого многообразий для дробного полулинейного уравнения. Доказаны полудискретные аппроксимационные теоремы для устойчивого и неустойчивого многообразий. Фазовое пространство в окрестности гиперболического равновесия можно разложить таким образом, что исходная задача с начальными значениями сводится к системам начальных задач в инвариантных подпространствах [3]. Мы показываем что такое разложение уравнения сохраняет ту же структуру на общей аппроксимационной схеме. Основное предположение наших результатов выполняется, в частности, для операторов с компактными резольвентами и оно может быть проверен как для метода конечных элементов, так и для метода конечных разностей.

Литература

1. Ru Liu. Approximation of semilinear fractional Cauchy problem: II / S. Piskarev //Semigroup Forum. 2020. Vol. 101, P. 751–768.

2. Ru Liu. Approximation of Semilinear Fractional Cauchy Problem / Miao Li and Sergey Piskarev // Comput. Methods Appl. Math. 2015, Vol. 15, Issue 2, P. 203–212.

3. S. Siegmund . Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations / S. Piskarev // Nonlinear Dynamics (NODY), 2019, Vol. 95, Issue 1, P. 685–697.

ГРУППЫ СИММЕТРИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ МОМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

К.С. Платонова (Москва, МГУ)
kseniya-plat@yandex.ru

Проведенный групповой анализ одномерного кинетического уравнения (см. [1])

$$f_t + cf_x + (Ff)_c = 0 \tag{1}$$

(t – время, x — пространственная координата, c — скорость, $F(t, x, c)$ — внешнее силовое поле, $f(t, x, c)$ — фазовая плотность распределения частиц) позволил получить групповую классификацию (1): были выделены классы уравнений, имеющих восьми-, трех-, двух- и одномерные группы симметрий. Представителями этих классов (с точностью до группы эквивалентности — группы диффеоморфизмов пространства t, x) являются функции

$$F = 0, \quad F = A \exp \int \frac{(3kc + a)dc}{kc^2 + bc + g}, \quad F = A/x^3,$$

$$F = A \left(1 - \frac{(t - \lambda c)^2}{t^2 - 2\lambda x} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad F = A \left(\frac{(x - ct)^2 + c^2 + 1}{t^2 + x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Для полученных групп симметрий оказалось возможным перенести действие этих групп на моментные величины. В случае $F = 0$ был найден дифференциальный инвариант и построено замыкание моментной системы:

Теорема. *Замыкание системы моментных величин дифференциальным инвариантом первого порядка группы симметрий уравнения (1) с $F = 0$ приводит к системе*

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + u u_x = 0. \tag{2}$$

Любое решения системы (2) продолжается по формулам $j^{[n]} = u^n \rho$ до решения полной моментной системы.

По решению моментной системы (2) восстанавливается решение $f(t, x, c) = \rho_0(x - ct)\delta(c - u_0(x - ct))$ уравнения (1) с $F = 0$.

Вычисление моментов $f(t, x, c)$ дает решение первого уравнения (2) в виде

$$\rho(t, x) = \frac{\rho_0(x - tu(t, x))}{1 + tu_0'(x - tu(t, x))}.$$

Для трехмерных групп симметрий были найдены дифференциальные и функциональные инварианты.

Литература

1. Платонова К.С., Боровских А.В. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Инварианты и проблема замыкания моментной системы / К.С. Платонова, А.В. Боровских // Теоретическая и математическая физика. — 2021. — Т. 208, № 3. — С. 367–386.

2. Боровских А.В., Платонова К.С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. IV. Полная групповая классификация в общем случае / А.В. Боровских, К.С. Платонова // Теоретическая и математическая физика. — 2019. — Т. 201, № 2. — С. 232–265.

ОБ УЗКИХ ОПЕРАТОРАХ В КОМПЛЕКСНЫХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

М.А. Плиев (Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)
plimarat@yandex.ru

е Узкие линейные операторы в векторных решетках впервые были введены в работе [1]. Позже данный класс операторов изучался в работах [2,3]. Приведем необходимые определения. Стандартным источником для ссылок по теории векторных решеток является монография [4].

Пусть E равномерно полная векторная решетка и $u, v \in E_{\mathbb{C}}$. Элементы u и v называются *дизъюнктными* (обозначение $u \perp v$), если $|u| \wedge |v| = 0$ Элемент $w \in E_{\mathbb{C}}$ называется *осколком* u, если $(u - w) \perp w$. Множество всех осколков элемента u обозначается через $\mathfrak{F}_u$. Два осколка w, v элемента u называются *взаимно дополнительными*, если $w \perp v$ и $u = w + v$.

Пусть E — равномерно полная векторная решетка и X — нормированное пространство. Линейный оператор $\mathcal{T} \colon E_{\mathbb{C}} \to X$ называется:

- *узким*, если для любых $v \in E_{\mathbb{C}}$ и $\varepsilon > 0$ существуют взаимно дополнительные осколки u, w элемента u, такие, что $\|\mathcal{T}(u - w)\| < \varepsilon$;

- *осколочно компактным*, если множество $\mathcal{T}(\mathfrak{F}_v)$ относительно компактно в X для любого $v \in E_{\mathbb{C}}$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, а X — банахово пространство. Тогда каждый осколочно компактный, порядково-по-норме непрерывный линейный оператор $T \colon E_{\mathbb{C}} \to X$ является узким.*

Литература

1. O. V. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, M. M. Popov. A lattice approach to narrow operators /O. V. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, M. M. Popov// Positivity — 2009. — T. 13, № 3. —C. 459–495.

2. M. Pliev. Narrow operators on lattice-normed spaces /M. Pliev// Cent. Eur. J. Math. — 2011. — T. 9, № 6. — C. 1276–1287.

3. M. A. Pliev, F. Polat, M. R. Weber. Narrow and C-compact orthogonally additive operators in lattice-normed spaces / M. A. Pliev, F. Polat, M. R. Weber// Results Math. — 2019. — T. 74, 157.

4. C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw. Positive Operators /C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw. — Springer. : 2006. — 376 c.

ОБ ОПЕРАТОРЕ БОРЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Д.А. Полякова (Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)
forsites1@mail.ru

В работе рассматривается оператор Бореля $\rho : f \mapsto \left(f^{(n)}(0)\right)_{n=0}^{\infty}$, который каждой бесконечно дифференцируемой в окрестности 0 функции f ставит в соответствие последовательность ее производных в нуле. В силу известной теоремы Э. Бореля (1895 г.), оператор ρ сюръективно отображает пространство $C^{\infty}(\mathbb{R})$ на пространство Λ всех последовательностей комплексных чисел. В дальнейшем оператор Бореля исследовался на различных весовых пространствах функций. Одним из частных случаев таких пространств являются пространства ультрадифференцируемых функций (УДФ), которые определяются с помощью весовой функции ω.

Пусть ω — весовая функция, $\varphi_{\omega}^{*}(y) = \sup\{xy - \omega(e^x) : x \geqslant 0\}$. Для $0 < p \leqslant \infty$ введем пространство

$$\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : \forall l \in (0,\infty), \ \ \forall s \in (0,p) \\ |f|_{\omega,s,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp s\varphi_{\omega}^{*}(j/s)} < \infty \Big\},$$

которое называется пространством УДФ Берлинга типа p. Для $0 \leqslant p < \infty$ можно рассмотреть пространство УДФ Румье типа p

$$\mathcal{E}_{\{\omega\}}^{p}(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \,|\, \forall l \in (0,\infty) \ \ \exists s \in (p,\infty) : \ |f|_{\omega,s,l} < \infty \Big\}.$$

Естественным образом вводятся соответствующие пространства числовых последовательностей

$$\Lambda_{(\omega)}^{p} = \Big\{ d = (d_j)_{j\in\mathbb{N}_0} : \forall s \in (0,p) \ \ \widetilde{|d|}_{\omega,s} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \frac{|d_j|}{\exp s\varphi_{\sigma}^{*}(j/s)} < \infty \Big\},$$

$$\Lambda_{\{\omega\}}^{p} = \Big\{ d = (d_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \,|\, \exists s \in (p,\infty) : \ \widetilde{|d|}_{\omega,s} < \infty \Big\}.$$

Тогда оператор Бореля действует из $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(\mathbb{R})$ в $\Lambda_{(\omega)}^{p}$ и из $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^{p}(\mathbb{R})$ в $\Lambda_{\{\omega\}}^{p}$. В случае, если он сюръективен, говорят, что в соответствующем пространстве функций справедлив аналог теоремы Бореля. Известно (см. [1]), что для пространств $\mathcal{E}_{(\omega)}^{\infty}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^{0}(\mathbb{R})$ максимального и минимального типов аналог теоремы Бореля имеет место тогда и только тогда, когда $\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K$ при некотором

$K > 1$. Для пространств нормального типа $p \in (0, \infty)$ необходимым и достаточным условием является медленное изменение веса ω: $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(2t)}{\omega(t)} = 1$ (см. [2]).

В случае, когда оператор ρ не сюръективен, естественным образом возникает вопрос о том, при каких условиях образ $\rho\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)$ содержит в себе некоторое пространство $\Lambda^q_{(\sigma)}$, где σ — какая-то другая весовая функций (аналогично для пространств Румье). Данная задача является одним из вариантов классической проблемы моментов. Для пространств максимального и минимального типов в данном направлении известен следующий результат [3]: включение $\rho\big(\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \Lambda^\infty_{(\sigma)}$ (соответственно, $\rho\big(\mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big) \supset \Lambda^0_{\{\sigma\}}$) выполняется тогда и только тогда, когда $\limsup_{y\to\infty} \frac{2}{\pi\sigma(y)} \int_0^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2+1}\, dt < \infty$.

Основным результатом настоящего исследования является

Теорема 1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \leqslant q\sigma$. Для того чтобы $\rho\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \Lambda^q_{(\sigma)}$ и (или) $\rho\big(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big) \supset \Lambda^q_{\{\sigma\}}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{2}{\pi\sigma(y)} \int\limits_0^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2+1}\, dt \leqslant \frac{q}{p}\,.$$

Литература

1. Bonet J. Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Roumieu type / J. Bonet, R. Meise, B.A. Taylor // Proc. R. Ir. Acad. — 1989. — V. 89A. — P. 53–66.

2. Bonet J., Meise R., Taylor B. A. On the range of the Borel map for classes of non-quasianalytic functions / J. Bonet, R. Meise, B.A. Taylor // North-Holland Math. Stud. — 1992. — V. 170. — P. 97–111.

3. Abanina D. A. On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type / D.A. Abanina // Result. Math. — 2003. — V. 44, № 3-4. — P. 195–213.

4. Полякова Д.А. К проблеме моментов в пространствах ультрадифференцируемых функций нормального типа / Д.А. Полякова // Сиб. мат. журн. — 2022. — Т. 63, № 2. — С. 404–417.

ПРОБЛЕМА ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ РУКОПИСНЫХ ЦИФР

М.И. Попов (Воронеж, ВГУ)

mihail_semilov@mail.ru

Задача распознавания рукописных цифр возникает в различных областях. Например, при идентификации номерных знаков транспортных средств, при распознавании отсканированных документов, для распознавания почтовых адресов. Для рукописных цифр создана большая база данных MNIST, которая содержит 60000 обучающих и 10000 тестовых примеров. Каждый пример представляет из себя изображение размером 28×28 пикселей в оттенках серого. Обилие примеров позволяет провести полноценный качественный анализ нейронной сети. Однако эффективность распознавания существенным образом зависит от архитектуры и конфигурации сети. В связи с этим возникают следующие вопросы. Какое количество слоев и сколько нейронов внутри слоя необходимо для достижения максимальной эффективности. Немаловажным фактором является организация обучения. Как на основе имеющегося тренировочного набора достичь наибольшей эффективности? Какими свойствами должна обладать обучающая выборка для достижения максимального эффекта? Каков оптимальный размер выборки?

Рассмотрим полносвязную нейронную сеть прямого распространения содержащую 3 слоя. Входной слой передает сигнал к нейронам скрытого слоя без изменения. Скрытый и выходной слои имеют нулевое смещение и используют сигмоиду в качестве функции активации. Поскольку размер входного изображения 28×28, входной слой содержит 784 нейрона. Для не допущения насыщения сети входные значения нормируются так, чтобы они попадали в диапазон [0.01,0.99] [1]. Выходной слой содержит 10 нейронов соответствующих цифрам от 0 до 9. Начальные веса скрытого и выходного слоев задаются случайным образом из симметричного диапазона, правый конец которого определяется эмпирической зависимостью $1/\sqrt{n}$, где n – количество входящих связей. В качестве функции потерь (loss function) используется сумма квадратов ошибок. Оптимизатор реализован в виде обычного градиентного спуска.

Анализ обучения нейронной сети позволил сделать следующие выводы:

1. Добавление скрытого слоя повышает эффективность распознавания изображений.

2. Эффективность увеличивается с увеличением размеров скрытого слоя.

3. Эффективность увеличивается с увеличением количества эпох обучения до определенного момента.

4. Для достижения максимальной эффективности увеличивая количество нейронов скрытого слоя необходимо увеличить количество эпох обучения.

5. Для достижения максимальной эффективности скорость обучения необходимо снижать при увеличении количества эпох обучения.

6. Снижение эффективности на нескольких идущих подряд эпохах не означает окончание обучения.

7. Использование случайного порядка обучающих примеров не влияет на эффективность при увеличении размера скрытого слоя.

Литература

1. Рашид Т. Создаем нейронную сеть. : Пер. с англ. — СПб.: ООО “Альфа-книга”, 2017. — 272 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

С.С. Постнов (Москва, ИПУ РАН)
postnov.sergey@inbox.ru

Рассмотрим системы, состояние которых описывается одним из следующих уравнений:

$$ {}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = K\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), \alpha \in (0,1), \quad (1)$$

$$ {}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t) + u(x,t), \alpha \in (1,2), \quad (2)$$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, ${}_0^C D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени, $t \geqslant 0$, $x \in [0,L]$, $(x,t) \in \Omega = [0,L] \times [0,\infty)$. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения Капуто. Предполагается, что распределённое управление $u(x,t)$ является элементом пространства $L_{p_1,p_2}(\Omega)$, $p_{1,2} > 1$. Уравнения (1) и (2) будем далее называть диффузионным и диффузионно-волновым соответственно.

Начальные условия для уравнений (1) и (2) поставим в виде:

$$\frac{\partial^k Q(x,0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0,L], k = 0,\ldots,[\alpha]. \tag{3}$$

Граничные условия для уравнений (1) и (2) ставятся в виде:

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_i Q(x,t)\right]_{x=x^i} = u^i(t), \quad t \geqslant 0, i = 1,2, \tag{4}$$

где a_i и b_i — коэффициенты, $b_1 \leqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$; $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами пространства $L_p[0,T]$, $p > 1$ и могут быть объединены в вектор $U(t) = \big(u^1(t), u^2(t)\big)$.

Целью оптимального управления считается достижение системой заданного состояния $Q^*(x)$ в заданный момент времени $T > 0$:

$$Q(x,T) = Q^*(x), \qquad T > 0, \quad x \in [0,L]. \tag{5}$$

Рассматривается две разновидности задачи оптимального управления, которые формулируются следующим образом [1]. Найти управления $u(x,t)$ и/или $U(t)$ такие, что система, описываемая уравнением (1) или (2) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4) достигнет при $t = T$ состояния (5) и при этом будет выполнено одно из условий:

- норма управлений $u(x,t)$ и/или $U(t)$ будет минимальной при заданном T (задача А);
- время перехода в заданное состояние (5) будет минимальным при заданном ограничении на норму управлений $\|u(x,t)\| \leqslant l$, $\|U(t)\| \leqslant l$ ($l > 0$ — заданное число) (задача Б).

Ранее было показано, что поставленная задача оптимального управления для обоих уравнений (1) и (2) сводится к l-проблеме моментов [2, 3]. В настоящей работе исследованы условия, при которых получаемая проблема моментов является корректной и разрешимой, а также рассмотрено поведение нормы оптимального управления в зависимости от времени управления и продемонстрировано, что при определённых условиях решение задачи Б оптимального управления может не существовать (при том, что решение задачи А существует).

Литература

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами /А.Г. Бутковский. — М. : Наука, 1965. — 475 с.

2. Kubyshkin V.A. The Optimal Control Problem for Linear Systems of Non-integer Order with Lumped and Distributed Parameters /

V.A. Kubyshkin, S.S. Postnov // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. — 2015. — V. 4, No. 4. — P. 429–443.

3. Кубышкин В.А. Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка / В.А. Кубышкин, С.С. Постнов // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 5. — С. 137–152.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА–ЧЕПМЕНА С ОПЕРАТОРОМ ФОККЕРА–ПЛАНКА

Д.Б. Прокопьева, Н.И. Головко,
Ю.И. Коробецкая (Владивосток, ДВФУ)
Prokopievad@yandex.ru, golovko.ni@dvfu.ru, korobetskaya.yui@dvfu.ru

Исследуется система массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность $\lambda(t)$ которого изменяется на промежутке $[\alpha, \beta]$ с упругими границами и представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$ и коэффициентом диффузии b. Такие СМО используются при моделировании web-узлов Интернет.

Обозначим интенсивность входного потока в нестационарном режиме через $\lambda(t)$, в стационарном через $\hat{\lambda}$. Пусть $Q_k(t, x)dx = \mathsf{P}\{\nu(t) = k, x \leqslant \lambda(t) < x + dx\}$, где $\nu(t)$ — число заявок в СМО в момент t, $q_k(x)dx = \mathsf{P}\{\hat{\nu} = k, x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}$, где $\hat{\nu}$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $Q_k(t, x)$, $q_k(x)$ — нестационарные и стационарные характеристики числа заявок, $k \geqslant 0$; $f(t, x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant \lambda(t) < x + dx\}$, $\hat{f}(x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}$, $f(t, x), \hat{f}(x)$ — плотности интенсивности входного потока, $x \in [\alpha, \beta]$.

В [1] представлен вывод уравнений типа Колмогорова — Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера — Планка относительно нестационарных и стационарных вероятностных характеристик числа заявок $Q_k(t, x), q_k(x)$.

В данной работе разработан численный метод расчета характеристик числа заявок, названный методом Эйлера — Лорана, для наблюдения за установлением стационарного режима в зависимости от значений входных параметров. Для применения метода Эйлера — Лорана показано выполнение необходимого условия $\bar{\lambda} = (\alpha + \beta)/2 < \mu$ существования и единственности стационарного режима в СМО, где $\bar{\lambda}$ — среднее значение $\hat{\lambda}$.

Значения производящей функции $R(t,x,z)=\sum\limits_{k\geqslant 0} Q_k(t,x)\,z^k, |z|\leqslant 1$, для сеточных значений $t\in[0;T]$, $x\in[\alpha;\beta], z\in\{\xi\in\mathbb{C}, |\xi|=r\}$ вычисляются последовательно в моменты времени $\triangle t, 2\triangle t, 3\triangle t,\dots$

В начальный момент времени $t=0$ производящая функция вычисляется с учетом начальных условий: $R(0,x,z)=\sum\limits_{k\geqslant 0} Q_k(0,x)z^k$.

На каждом фиксированном шаге по t значения функции $R(t+\triangle t,x,z)$ вычисляются во внутренних точках по x по формуле Эйлера

$$R(t+\triangle t,x,z)=R(t,x,z)+\Bigg[R(t,x,z)[xz^2-(x+\mu)z+\mu]+$$

$$+\frac{b}{2}zR''_{xx}(t,x,z)-(1-z)\mu Q_0(t,x)\Bigg]\triangle t/z.$$

В крайних точках по x значения функции $R(t,x,z)$ находятся с учетом краевых условий

$$R(t,\alpha,z)=R(t,\alpha+\Delta x,z),\ \ R(t,\beta,z)=R(t,\beta-\Delta x,z).$$

Плотности $Q_k(t,x)$ вычисляются по формуле обратного преобразования Лорана

$$Q_k(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r}\frac{R(t,x,\xi)}{\xi^{k+1}}\,d\xi,\ k\geqslant 0, r=1,$$

где i — мнимая единица.

Распределения числа заявок $P_k(t)$, $q_k(x), p_k$, $k\geqslant 0$, вычисляются по формулам

$$P_k(t)=\int_\alpha^\beta Q_k(t,x)dx,\ \ q_k(x)=\lim_{t\to\infty}Q_k(t,x), p_k=\lim_{t\to\infty}P_k(t).$$

Численный анализ нестационарного распределения числа заявок с применением метода Эйлера — Лорана проводился при различных начальных распределениях. Стабилизация вероятностей $P_k(t)$ при заданных начальных распределениях наступает достаточно быстро при $T\leqslant 15$.

Результаты численных расчетов подтверждают свойства всех наблюдаемых вероятностных характеристик исследуемой СМО.

Литература

1. Прокопьева, Д.Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Известия КГТУ. — 2017. — № 46. — С. 184–193.

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

А.Б. Расулов, Ю.С. Федоров, А.М. Сергеева
(Москва, НИУ МЭИ)
rasulzoda55@gmail.com; fedorovys@mpei.ru;hmelevs@yandex.ru

Пусть область D содержит точку $z = 0$ и ограничена простым гладким контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $D_0 = D \setminus \{0\}$.

В области D_0 рассмотрим следующую сингулярно возмущенную систем уравнений Коши-Римана с сингулярным младшем коэффициентом:

$$\varepsilon \rho u_{\bar{z}} - au = 0, \tag{1}$$

$$\rho(z) = \bar{z}|z|^{n-1} = (x - iy)(x^2 + y^2)^{\frac{n-1}{2}},\ n > 1.$$

где $a \in \mathbb{R}^+$.

При рассмотрении задачи Римана-Гильберта важное значение имеет ее индекс:

$$æ = \frac{1}{\pi} \arg(\alpha + i\beta)\big|_{\Gamma}.$$

Переходя к исследованию уравнения (1), уточним для него задачу:

Задача типа Римана–Гильберта: найти решение $u(z, \varepsilon) \in C(\overline{D}) \cap C^\infty(D_0)$ уравнения (1), удовлетворяющее на контуре Γ граничному условию

$$\begin{cases} \operatorname{Re}((\alpha + i\beta)u)(t) = e^{-\frac{c^2}{\varepsilon^2}} g(t),\ t \in \Gamma, \\ u(z_j) = 0,\ \ j = 1, 2, ..., -2æ + 1,\ \ z_j \in D_0,\ æ \leqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $g(t) \in C(\Gamma)$ — заданная функция, $c-$ положительная постоянная, z_j — произвольные фиксированные точки области D_0.

Для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных типа Коши– Римана (1) рассматривается задача Римана–Гильберта (2). С помощью метода регуляризации Ломова получены достаточные условия, при выполнении которых её асимптотические решения сходятся в обычном смысле.

ВОКРУГ РЕЗУЛЬТАТА Ж. ПИЗЬЕ О СВЕРТКАХ НА КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

О.И. Рейнов (Санкт-Петербург, СПбГУ)
orein51@mail.ru

Речь идет о следующем результате Ж. Пизье (см. [1], с. 49): оператор свертки $\star f : M(G) \to C(G)$, где G — компактная абелева группа, $M(G) = C^*(G)$, $f \in C(G)$, факторизуется через гильбертово пространство тогда и только тогда, когда семейство коэффициентов Фурье функции f абсолютно суммируемо. Два возможных обобщения этого результата на векторнозначный случай были приведены в работе [2, Theorem 3.1 and Theorem 4.4]:

Теорема А. *Пусть G — компактная абелева группа, X — банахово пространство и $f \in C(G)$. Оператор свертки $U_f : M(G, X) \to C(G, X)$, ассоциированный с f, факторизуется через гильбертово пространство тогда и только тогда, когда пространство X изоморфно гильбертову пространству.*

Теорема Б. *Пусть G — компактная абелева группа, X — банахово пространство. Следующие утверждения о пространстве X равносильны: 1) X конечномерно; 2) для каждой функции $\psi :\in C(G, X)$ такой, что оператор свертки $U_\psi : M(G) \to C(G, X)$ факторизуется через гильбертово пространство, семейство $\hat{\psi}$ коэффициентов Фурье функции ψ абсолютно суммируемо: $\hat{\psi} \in l_1$.*

Следующие теоремы обобщают приведенные результаты Пизье и Сааб.

Теорема 1. *Пусть $f \in C(G)$, $0 < s \leqslant 1$ и $1/r = 1/s - 1$. Рассмотрим оператор свертки $\star f : M(G) \to C(G)$. Семейство $\hat{f}$ коэффициентов Фурье функции f абсолютно s-суммируемо (т. е. лежит в l_s) тогда и только тогда, когда оператор $\star f$ факторизуется через некоторый оператор из класса Шаттена–фон Ноймана S_r в гильбертовом пространстве.*

Теорема 2. *Пусть X, Y — банаховы пространства и T — линейный непрерывный оператор. Рассмотрим утверждения*

1. Для каждой функции $f \in C(G, X)$ такой, что оператор $\star f : M(G) \to C(G, X)$ факторизуется через гильбертово пространство, семейство $T(\hat{f})$ абсолютно суммируемо.

2. T — абсолютно 2-суммирующий оператор (см. [3]).

3. T — абсолютно 1-суммирующий оператор (см. [3]).

Из утверждения 1 следует утверждение 2 и из утверждения 3 следует утверждение 1 (и 3 влечет 2).

Теорема 3. *Пусть $f \in C(G)$, $0 < r, s < \infty$. Рассмотрим оператор свертки $\star f : M(G) \to C(G)$ и оператор $T : X \to Y$. Если* *оператор*

$$T_f : M(G,X) \to C(G,Y),$$

ассоциированный с $\star f$ *и* T*, факторизуется через некоторый оператор из класса Лоренца–Шаттена* $S_{r,s}$ *в гильбертовом пространстве, то операторы* $\star f$ *и* T *обладают тем же свойством. Обратное верно при* $s \leqslant r$*. То же справедливо и в случае* $r = s = \infty$*.*

Будут приведены также и другие теоремы о факторизации операторов через операторы из классов Лоренца–Шаттена в гильбертовых пространствах и другие обобщения на векторнозначные случаи результата Пизье..

Литература

1. Pisier G. Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces / G. Pisier. — volume 60 of CBMS. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1985. — 154 p.

2. Saab P. Convolution Operators that Factor Through a Hilbert Space / P. Saab // Quaestiones Mathematicae, — 2008. — V. 31, № 1. — P. 79–87.

3. Pietsch A. Operator ideals / A. Pietsch. — North–Holland, Berlin, 1978. – 451 p.

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)

RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим начально-граничную задачу

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные, $\varphi, \psi \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in L_1(Q_T)$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ при любом $T > 0$.

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1), то есть выполняется условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$. В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического многочлена вещественны. Предположим, что они удовлетворяют неравенствам

$$\omega_1 < 0 < \omega_2. \tag{4}$$

При рассмотрении этой задачи используется метод из статьи [1]. В этой же статье дается история вопроса. Все необходимые для дальнейшего изложения понятия и определения заимствованы из книги [2].

Аналогично [1] под *классическим решением* (или классическим решением почти всюду (п.в.), или более кратко решением п.в.) понимается функция $u(x,t)$, которая непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$ и при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$) абсолютно непрерывны по x и t, причем $u_{xt}(x,t) = u_{tx}(x,t)$ (в случае, когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [3]), удовлетворяющая условиям (2)–(3) и п.в. уравнению (1).

В случае классического решения задачи (1)–(3) по необходимости должны выполняться
1) условия гладкости: $\varphi(x), \varphi'(x), \psi(x)$ — абсолютно непрерывны;
2) условия согласования: $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$.

Обозначим через $L(\lambda)$ оператор-функцию (о.ф.), порождённую дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y$$

и краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Пусть R_λ есть резольвента этой о.ф., $G(x,\xi,\lambda)$ — функция Грина, а $R_{1\lambda}$ — интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

Собственные значения $L(\lambda)$ простые и выражаются по формулам

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному с.з.

Теорема 1. *Пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с дополнительным условием (4). Если $u_{tt} \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \Bigg(\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)\, d\tau -$$

$$- p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda}\varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi \Bigg) d\lambda, \tag{5}$$

в которой ряд справа сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Из теоремы 1 видно, что формальный ряд (5) и начально-граничная задача (1)–(3) тесно связаны. Аналогично [1] расширим понятие этой связи.

Ряд справа в формуле (5) имеет смысл для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ и функции $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, хотя он может быть и расходящимся. В этом случае естественно говорить, что (5) также является формальным решением начально-граничной задачи (1)–(3), понимаемой чисто формально. Так же, как и в [1], будем называть эту задачу *обобщенной начально-граничной задачей.*

Введем следующие обозначения для функции $f(x) \in L_1[0,1]$:

$$f^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in \Big[0, \dfrac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\Big], \\ f\Big(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1}(\xi - 1)\Big), & \xi \in \Big[\dfrac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, 1\Big]; \end{cases}$$

$$f_*(\xi) = \begin{cases} f\Big(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2}\xi\Big), & \xi \in \Big[0, \dfrac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\Big], \\ 0, & \xi \in \Big[\dfrac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, 1\Big]. \end{cases}$$

Через $\tilde{f}(x)$ будем обозначать 1-периодическое продолжение функции $f(x)$, $x \in [0,1]$, то есть $\tilde{f}(x) := f(\{x\})$, $x \in \mathbb{R}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть x.

Определим функцию

$$u_1(x,t) = \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\left(\tilde{\varphi}^*\Big(\frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}\Big) - \tilde{\varphi}^*\Big(\frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}\Big)\right) +$$
$$+ \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\left(\tilde{\varphi}_*\Big(\frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}\Big) - \tilde{\varphi}_*\Big(\frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}\Big)\right). \tag{6}$$

Справедлива теорема

Теорема 2. *Пусть выполняется условие (4), функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi''(x) \in L_1[0,1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Тогда функция $u_1(x,t)$, определяемая формулой (6), является классическим решением задачи (1)–(3) в случае $\psi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ и для нее выполняется условие $u_{1,tt} \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$.*

По определению считаем, что (6) есть *решение обобщенной начально-граничной задачи* (1)–(3) в случае $\psi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$. Теорема 2 является обоснованием правильности такого определения.

Обозначим

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(\xi)\, d\xi$$

и определим функцию

$$u_2(x,t) = -\frac{p_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\tilde{\Psi}^*\Big(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) - \tilde{\Psi}^*\Big(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) + \right.$$

$$\left. + \tilde{\Psi}_*\Big(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) - \tilde{\Psi}_*\Big(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)\right). \tag{7}$$

Справедлива теорема

Теорема 3. *Пусть выполняется условие (4), функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, $\psi'(x) \in L_1[0,1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Тогда функция $u_2(x,t)$, определяемая формулой (7), является классическим решением задачи (1)–(3) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ и для нее выполняется условие $u_{2,tt} \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$.*

По определению считаем, что (7) есть *решение обобщенной начально-граничной задачи* (1)–(3) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$. Теорема 3 является обоснованием правильности такого определения.

Обозначим

$$F(x,t) = \int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi$$

и определим функцию

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int_0^t \left(\tilde{F}^*\Big(\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1},\tau\Big) - \tilde{F}^*\Big(\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1},\tau\Big) + \right.$$

$$\left. + \tilde{F}_*\Big(\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1},\tau\Big) - \tilde{F}_*\Big(\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1},\tau\Big)\right) d\tau. \tag{8}$$

Справедлива теорема

Теорема 4. *Пусть выполняется условие (4), функция $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по $t > 0$ при п.в. $x \in [0,1]$ и $f'_t(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$. Тогда функция $u_3(x,t)$, определяемая формулой (8), является классическим решением задачи (1)–(3) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ и выполняется условие $u_{3,tt} \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$.*

По определению считаем, что (7) есть *решение обобщенной начально-граничной задачи* (1)–(3) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$. Теорема 4 является обоснованием правильности такого определения.

Литература

1. Хромов А.П., Корнев В.В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 215–238.

2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

3. Толстов Г.П. О второй смешанной производной / Г.П. Толстов // Матем. сб. — 1949. — Т. 24(66), № 1. — С. 27–51.

БИФУРКАЦИИ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА[1]

П.Е. Рябов, С.В. Соколов

(Москва, Финансовый университет, ИМАШ РАН, МФТИ)

PERyabov@fa.ru, sokolov.sv@phystech.edu

Доклад посвящен бифуркационному анализу механической модели динамически симметричного твердого тела в однородном поле силы тяжести. Одна из точек тела, лежащая на оси симметрии (точка подвеса), совершает высокочастотные периодические или условно-периодические колебания (вибрации) малой амплитуды. Из-за наличия вибраций точки подвеса дифференциальные уравнения движения твердого тела, описывающие его ориентацию относительно системы координат, явно зависят от времени. В работах А.П.Маркеева и О.В.Холостовой [1], [2], [3], [4], [5] указано преобразование, приводящее исходные уравнения движения, записанные в форме уравнений Эйлера-Пуассона, к приближенной системе относительно новых переменных, которая также имеет форму уравнений Эйлера–Пуассона, но не зависит явно от времени. Оказывается, что полученная система дифференциальных уравнений является вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Такую систему можно подвергнуть бифуркационному анализу и наглядно продемонстрировать проблемы исследования устойчивости на основе анализа типа особенностей, а именно, эллиптическим невырожденным особенностям отвечают устойчивые решения, а гиперболическим невырожденным – неустойчивые [6].

В докладе представлены аналитические результаты бифуркационного анализа: получена явно бифуркационная диаграмма интегрального отображения как часть дискриминанта многочлена четвертой степени. Как оказалось, такой многочлен участвует в явном интегрировании. Все фазовые переменные выражены в терминах эллиптических функций Якоби. Найдены все разделяющие кривые, которые формируют атлас бифуркационных диаграмм. Оказалось, что существует только пять типов бифуркационных диаграмм, три из которых являются новыми по сравнению с классическим случаем волчка Лагранжа (без вибрационного потенциала). Наглядно представлены результаты исследования устойчивости положений равновесия и регулярных прецессий. Как оказалось, оба положения равновесия при наличии вибрирующей точки подвеса могут быть неустойчивыми, что соответствует существованию фокусных особенностей в ука-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00399).

занной модели [7]. Также представлены все бифуркации торов Лиувилля. Уникальным является появление двойного «pinched» тора в рассматриваемой механической системе. Бифуркационная диаграмма интегрального отображения наглядно демонстрирует исследование устойчивости положений равновесий и регулярных прецессий, полученные ранее другими методами в работах Маркеева и Холостовой [1]–[5].

Литература

1. Маркеев А.П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 427, № 6. — С. 771–775.

2. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. — 2011. — Т. 75, № 2. — С. 193–203.

3. Маркеев А.П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2012. № 4. — С. 3–10.

4. Холостова О.В. О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 785–796.

5. Холостова О.В. О периодических движениях волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Известия Академии наук. Механика твердого тела. — 2002. — № 1. — С. 34–48.

6. Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН. —2010. — Т. 65, № 2(392). — С. 71–132.

7. Борисов А.В., Рябов П.Е, Соколов С.В. О существовании фокусных особенностей в одной модели волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 26–30.

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

К.Б. Сабитов

(Уфа, ИСИ-РБ, Стерлитамак, Стерлитамакский филиал БашГУ)

sabitov_fmf@mail.ru

Поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины h, при этом толщина ее полагается малой по сравнению с другими размерами, со сторонами p и q описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка [1, с. 394]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$, EJ — жесткость пластинки, ρ — масса на единицу площади пластинки, E — модуль упругости материала, J — момент инерции, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $F(x, y, t)$ — непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки, $u(x, y, t)$ — смещение точки (x, y) пластинки в момент времени.

Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок имеют важное прикладное значение в строительной механике, которые изучены в известных работах [2, с. 444 – 449], [3, с. 132 – 133], [4, с. 35 – 69].

Для определения колебания (смещения) $u(x, y, t)$ точек (x, y) пластинки нужно задать граничные условия на краях $x = 0, x = p, y = 0$ и $y = q$. Вид граничных условий зависит от способа закрепления соответствующих краев. Если все стороны подвижно заделаны, то граничные условия принимают вид

$$\begin{gathered} u_x(0, y, t) = u_{xxx}(0, y, t) = u_x(p, y, t) = u_{xxx}(p, y, t) = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u_y(x, 0, t) = u_{yyy}(x, 0, t) = u_y(x, q, t) = u_{yyy}(x, q, t) = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{2}$$

Если два края из одной точки шарнирно закреплены, а на остальных краях подвижная заделка, то граничные условия следующие:

$$\begin{gathered} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u_x(p, y, t) = u_{xxx}(p, y, t) = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x, 0, t) = u_{yy}(x, 0, t) = u_y(x, q, t) = u_{yyy}(x, q, t) = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{3}$$

Если противоположные стороны соответственно шарнирно закреплены и подвижно заделаны, то граничные условия таковы:

$$\begin{gathered} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u(p, y, t) = u_{xx}(p, y, t) = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u_y(x, 0, t) = u_{yyy}(x, 0, t) = u_y(x, q, t) = u_{yyy}(x, q, t) = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{4}$$

Возможны и другие случаи задания граничных условий [4, с. 35 – 69].

Начальные условия такие же, как и в случае колебаний мембраны:

$$u(x,y,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,t)\Big|_{t=0} = \psi(x,y), \tag{5}$$

где $\quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant q.$

Уравнение (1) зададим в области

$$Q = \Big\{(x,y,t)\Big|(x,y) \in D, \quad 0 < t < T\Big\},$$

$$D = \Big\{(x,y)\Big|0 < x < p, \quad 0 < y < q\Big\},$$

где p, q и T — заданные положительные числа, и поставим следующие задачи.

Начально-граничные задачи. *Найти определенную в области Q функцию $u(x,y,t)$ со свойствами:*

$$u(x,y,t) \in C^{4,2}_{xy,t}\Big(\overline{Q}\Big); \tag{6}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv F(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q, \tag{7}$$

удовлетворяет начальным условиям (5) *и одному из граничных условий* (2) — (4), *где $F(x,y,t), \varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции.*

Отметим, что в работе [2, с. 444 — 449] путем представления решения в виде двойного ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}(t) \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}$$

и используя интегралы энергий найдены собственные частоты и форма собственных колебаний прямоугольной пластины в случае шарнирного закрепления на краях. Здесь указаны работы других авторов [5] — [8], посвященных приближенным методам определения собственных частот и амплитуд колебаний. В работе [3, с. 132 – 133] предлагается вариационный метод нахождения собственных частот колебаний.

В книге [4, с. 35 — 69] используется метод асимптотических разложений по малому параметру для нахождения приближенных значений собственных частот и формы собственных колебаний пластины с различными режимами на краях. Но вопросы по построению решений в явной форме и обосновании корректности поставленных нами задач не изучены. В работах [9] – [13] нами изучены начально-граничные и обратные задачи для одномерного уравнения балки. В работе [14] в случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщенных решений.

В данной работе исследуются задачи с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины с тремя разными граничными условиями (2) – (4). Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных начально-граничных задач. Для каждой из трех начально-граничных задач доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщенных решений. При этом решения построены в явном виде.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с. (изд. 3).

2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. — М. : Физматлит, 1967. — 444 с.

3. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна / С. Гулд. — М. : Мир, 1970. — 328 с.

4. Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин / И.В. Андрианов, В.В. Данишевский, А.О. Иванков. — Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры. — 2010. — 216 с.

5. Voigt W. Problem der transversalen Schwingungen rechteckigen Platten / W. Voigt // Nachrichten von der Koniglichen Gesselschaft der Wissenschaften zu Gottingen. — 1893. — №6. — S. 225 – 230.

6. Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratishen Plate mit freien Randrern / W. Ritz // Annalen der Physik. — 1909. — B.28. №4. — S. 737 — 786.

7. Weinstein A., Chien W.Z. On the vibrations of clamped plate under tension / A. Weinstein, W.Z. Chien // Quart. Appl. Math. — 1943. — V.1. №1. — P. 61 — 68.

8. Young P. Vibration of rectangular plate by Ritz method / P. Young // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1950. — V.17. №4. — P. 448 — 453.

9. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами / К.Б. Сабитов // Вестн. Сам. гос. техн.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2015. — Т. 19, № 2. — С. 311 — 324.

10. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 1. С. 89 — 100.

11. Сабитов К.Б Начальная задача для уравнения колебаний балок / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 665 — 671.

12. Сабитов К.Б., Акимов А.А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки / К.Б. Сабитов, А.А. Акимов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56. № 5. — С. 632 — 645.

13. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56. № 6. С. 773 — 785.

14. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины / К.Б. Сабитов // Известия Вузов. Математика. — 2021. — № 10. С. 60 — 70.

ЛОКАЛЬНАЯ ЭКВИВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛА ИНДЕКСА ДЛЯ МЕТАПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ[1]

А.Ю. Савин (Москва, РУДН)

a.yu.savin@gmail.com

Мы рассматриваем алгебру A ограниченных операторов в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$, порожденную квантованием изометрических аффинных канонических преобразований. Мы определяем спектральную тройку (A, H, D) в смысле Конна, где в качестве модуля над алгеброй A берётся гильбертово пространство $H = L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda(\mathbb{R}^n))$, а в качестве оператора D берётся оператор Эйлера — специальный дифференциальный оператор первого порядка индекса 1. Показывается, что эта спектральная тройка имеет простой спектр размерностей: а именно, для каждого оператора B в алгебре, порожденной псевдодифференциальными операторами типа Шубина и элементами из A, дзета-функция $\zeta_B(z) = \operatorname{Tr}(B|D|^{-2z})$ имеет мероморфное продолжение на $\mathbb{C}$ с не более чем простыми полюсами. Наш основной результат — явное алгебраическое выражение для характера Конна-Московичи указанной спектральной тройки. Как следствие, мы получаем локальные формулы индекса для некоммутативных торов и торических орбифолдов.

Результаты получены в совместной работе с Э. Шроэ (Ганновер).

Литература

1. Connes A. The local index formula in noncommutative geometry / A. Connes, H. Moscovici. // Geom. Funct. Anal. — 1995. — V. 5(2) — P. 174–243.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-12006).

2. Savin A. Local index formulae on noncommutative orbifolds and equivariant zeta functions for the affine metaplectic group / A. Savin, E.Schrohe // arXiv:2008.11075 — 2020. — P. 1–26.

АНАЛИЗ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФУНКЦИИ ПРИ РАЗРУШЕНИИ БИКРУГОВОЙ СИММЕТРИИ

Т.Ю. Сапронова, О.В. Швырева (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)
tsapr@mail.ru

1. Экстремали возмущенных функционалов при разрушении непрерывной симметрии.

Рассмотрим $V(x,\varepsilon)$ — гладкое семейство гладких фредгольмовых индекса ноль функционалов на банаховом пространстве E, $\varepsilon \in \mathbf{R}^q$, E непрерывно вложено в гильбертово пространство H.

Пусть на пространстве H задано ортогональное действие группы Ли G, причем пространство E и «невозмущенный» функционал $V_0(x) = V(x,0)$ инвариантны относительно этого действия, а «возмущенный» функционал $V_\varepsilon(x) = V(x,\varepsilon)$ (при $\varepsilon \neq 0$) не является инвариантным (происходит *разрушение непрерывной симметрии*).

И пусть L — компактная морсовская критическая орбита инвариантного функционала V_0 с индексом Морса m. Рассмотрим функцию $\tilde{W}(\xi,\sigma^0) = \sum\limits_{i=1}^{q} \sigma^0{}_i V_i(\xi)$, где $V_i = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}(\cdot,0)$, σ^0 — некоторая фиксированная точка из $\mathbf{R}^q \backslash \{0\}$, $\xi \in L$.

Теорема. *Пусть $a_0 \in L$ — морсовская критическая точка индекса l функции $\tilde{W}(\xi,\sigma^0)$, $\xi \in L$. Тогда при всех достаточно малых $\delta \in \mathbf{R}$ функционал $V_{\delta\sigma^0}$ имеет изолированную морсовскую критическую точку $a(\delta) = a_0 + O(\delta) \in L_{\delta\sigma^0}$ индекса $l+m$.*

Замечание. Функция $\tilde{W}(\xi,\sigma^0)$ называется *порождающей.*

Таким образом, при несимметричных возмущениях функционала V_0 *от морсовских критических точек порождающей функции отходят ветви изолированных экстремалей возмущенного функционала $V_{\delta\sigma^0}$.*

2. Разрушение бикруговой симметрии. Рассмотрим «возмущенную» функцию

$$V(x,\varepsilon) = V_0(x) + \varepsilon_1 x_1^2 x_3^2 + \varepsilon_2 x_1^2 x_4^2 + \varepsilon_3 x_2^2 x_3^2 + \varepsilon_4 x_2^2 x_4^2 + \varepsilon_5 x_3^2 x_4^2,$$

где «невозмущенная» функция

$$V_0(x) = (x_1^2+x_2^2)^2+(x_3^2+x_4^2)^2+a(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2)-b(x_1^2+x_2^2)-c(x_3^2+x_4^2)$$

инвариантна относительно действия группы $G = S^1 \times S^1$ на пространстве $H = \mathbf{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E = \mathbf{R}^4$.

Ортогональное действие $G \times H \longrightarrow H$ порождено гладким гомоморфизмом $\mathcal{T} : G \longrightarrow \mathbf{O}(H)$, который каждый элемент $g = (u, v) = (\cos\alpha + i\sin\alpha, \cos\beta + i\sin\beta) \in G$ переводит в оператор $\mathcal{T}_g$ (ортогональное преобразование пространства $H = \mathbf{R}^4$), задаваемый ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $V_0(\mathcal{T}_g x) = V_0(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}^4, \forall g \in G$.

Орбиты группы $G = S^1 \times S^1$ имеют вид

$$orb(x_0) = \{\, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = R_1^2,\ x_3^2 + x_4^2 = R_2^2 \,\}.$$

Рассмотрим морсовскую критическую орбиту невозмущенной функции $V_0(x)$ с ненулевыми радиусами R_1 и R_2.

В случае возмущения по ε_1 (считая все остальные «возмущающие» слагаемые равными нулю), получаем четыре точки ветвления на данной орбите: $(R_1, 0, \pm R_2, 0)$, $(-R_1, 0, \pm R_2, 0)$. От каждой из этих точек отходит ветвь изолированных экстремалей функции $V(x, \delta) = V_0(x) + \delta x_1^2 x_3^2$.

Далее, рассматривая последовательно возмущения по ε_k, $2 \leqslant k \leqslant 5$, находим точки ветвления для каждого из этих случаев.

Литература

1. Сапронова Т.Ю. Использование разрушения сферических симметрий и краевых особенностей функций в вариационных задачах / Т.Ю. Сапронова, О.В. Швырева // Матем. модели и операторные уравнения. — Воронеж. гос. ун-т. — 2011. — Т. 7. — С. 178–192.

2. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

О НАИМЕНЬШЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ НУЛЕ СИНУС-РЯДА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Т.Ю. Семенова (Москва, МГУ)
station@list.ru

Оценке интервалов знакопостоянства и оценке корней сумм синус-рядов посвящено большое число работ (см., например, обзор [1]).

В работах Л. Вьеториса [2], А.С. Белова [3] и А.Ю. Попова [4] получены результаты для рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$, коэффициенты b_k которых удовлетворяют условиям: $b_1 > 0$, $b_{k+1} \leqslant b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$.

Автором рассматриваются ряды

$$S(x,\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \rho^k \sin(kx).$$

Пусть $\rho \in (0,1)$ — фиксированный параметр, $\xi(\rho, \{b_k\}) \in (0,\pi]$ — наименьший положительный корень $S(x,\rho)$. Решена задача о нахождении величины $\xi(\rho) = \inf\limits_{\{b_k\}} \xi(\rho, \{b_k\})$, где нижняя грань берётся по всем неотрицательным монотонным последовательностям $\{b_k\}$.

В качестве важного практического приложения можно отметить задачу об определении области на плоскости, где гармоническая в круге функция будет принимать положительные значения. При этом на границе круга эта функция представима в виде ряда по синусам с монотонными коэффициентами.

Литература

1. Пак И.Н. О суммах тригонометрических рядов / И.Н. Пак // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 2 (212). — С. 91–144.

2. Vietoris L. Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen/ L. Vietoris // Österr. Acad. Wiss. Math.-Natur. Kl., S.-Ber., Abt. II. —1958. — Т. 167. — С. 125–135.

3. Белов А.С. О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами / А.С. Белов // Математический сборник. — 1995. — Т. 186, № 4. — С. 21–46.

4. Попов А.Ю. Оценки наименьшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами / А.Ю. Попов // Математические заметки. — 2014. — Т. 96, № 5. — С. 747–761.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С.М. Ситник, Абдул Ахад Ариан, Ал-Кархи Хаитхам, Абдул Мохаммад Кудоси (Белгород, БелГУ)
sitnik@bsu.edu.ru

В докладе будут изложены некоторые современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Рассматриваются определённые типы дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, основное внимание уделяется дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2}u(x) + \frac{\nu}{x}\frac{d}{dx}u(x).$$

В докладе современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям рассматриваются на основе ряда последних публикаций по этой тематике, см. [1]–[7]. Среди них особо отметим опубликованный в 2020 г. в издательстве Springer в серии *Trends in Mathematics* сборник работ [5] под редакцией В.В. Кравченко и С.М. Ситника по современной теории операторов преобразования, а также организованную В.В. Кравченко в октябре 2020 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования [7], получившую сладко звучащее по–русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков.

Таким образом, теория операторов преобразования и их многочисленных приложений является живой и активной ветвью современной математики. Операторам преобразования и их различным применениям посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся монографий и сборников.

Литература

1. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / С.М. Ситник, В.В. Катрахов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 211–426.

2. Шишкина Э.Л. Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и гиперболические B–потенциалы / Э.Л. Шишкина // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2019. — Т. 65, № 2. — С. 157–338.

3. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. — М. : Физматлит, 2019. — 224 с.

4. Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. / In the Series: Mathematics in Science and Engineering. / E.L. Shishkina, S.M. Sitnik. — Elsevier, Academic Press, 2020. — 565 pp.

5. Ed. Kravchenko V.V., Sitnik S.M. Transmutation Operators and Applications. / In the Series: Trends in Mathematics. / V.V. Kravchenko, S.M. Sitnik. — Springer, Birkhäuser, 2020. — 687 pp.

6. Kravchenko V.V. Forward and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution. / In the Series: Frontiers in Mathematics. / V.V. Kravchenko . — Springer, 2020. — 163 pp.

7. International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics — I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. 2019.
https : //www.math.cinvestav.mx/IWTOR

РЕСУРСНЫЕ СЕТИ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ПРОХОЖДЕНИЯ ПО ДУГАМ

В.А. Скороходов, Я.М. Ерусалимский,
Х. Абдулрахман (Ростов-на-Дону, ЮФУ, РГУПС)
vaskorohodov@sfedu.ru, ymerusalimskiy@sfedu.ru,
abdulrahm.haidar@gmail.com

Пусть $G(X, U, f)$ — ресурсная сеть [1]. С каждой дугой u такой сети связана величина её пропускной способности r_u, а с каждой вершиной x — величина $q_x(t)$, которая называется количеством ресурса в вершине x в момент времени $t \in Z_+$. Вектор $\mathbf{Q}(t) = (q_{x_1}(t), \ldots, q_{x_n}(t))$ называется состоянием сети G в момент t. Также в данной работе полагаем, что для каждой дуги u сети G указан вес $d(u)$ – длительность (количество тактов) прохождения по ней. Такие сети называются сетями с динамическими длительностями прохождения по дугам. При этом полагаем, что длительность прохождения каждой дуги u может меняться со временем и описывается периодической по времени функцией с общим для всех дуг периодом D, т.е. $d(u, t + D) = d(u, t)$ для любого $t \in Z_+$. Для рассматриваемых сетей длительность прохождения по дуге может быть больше единицы. Кроме того, прохождение потока по некоторым дугам в определённые моменты может менять пропускные способности этих дуг в последующие моменты времени до полной их блокировки. Таким образом, естественным образом получается зависимость пропускной способности каждой дуги $u \in U$ от времени t и величин потоков, выходящих по этой дуге в предыдущие моменты времени:

$$r_u(t) = r_u - \sum_{\substack{t_0 \in [0;t-1]_Z \\ t_0 + d(u,t_0) \geqslant t}} F(u, t_0),$$

где r_u – номинальная пропускная способность дуги u.

Вместе с переопределением пропускных способностей дуг ресурсной сети появляется необходимость в переопледелении правил функционирования сети с учётом меняющихся пропускных способностей: для каждой вершины $x \in X$

$$q_x(t+1) = q_x(t) - \sum_{u \in [x]^+} F(u, t) + \sum_{u \in [x]^-} \sum_{\substack{t_0 \in [0;t-1]_Z \\ t_0 + d(u,t_0) = t}} F(u, t_0),$$

а величины $F(u,t)$ определяются следующим образом:

$$F(u,t) = \begin{cases} r_u(t), & q_x(t) > \sum\limits_{v \in [x]^+} r_v(t); \\ \dfrac{r_u(t)}{\sum\limits_{v \in [x]^+} r_v(t)} \cdot q_x(t), & q_x(t) \leqslant \sum\limits_{v \in [x]^+}^{n} r_v \end{cases}.$$

При этом, $[x]^+$ – множество всех дуг, входящих в вершину x, а $[x]^-$ – множество всех дуг, выходящих в вершину x.

Рассмотрена задача нахождения порогового значения и предельного состояния [1] в сети G с динамическими длительностями прохождения по дугам. Для её исследования рассмотрен процесс перераспределения ресурса между вершинами вспомогательной сети (временной развёртки) G', соответствующий аналогичному процессу на исходной сети G.

Правила построения графа G':

- каждой вершине x исходного графа G ставится в соответствие D вершин $\{x_0, \ldots, x_{D-1}\}$ на вспомогательном графе G'.

- каждой дуге u (для определённости полагаем $f(u) = (x,y)$) исходного графа G ставится в соответствие D дуг $\{u_0, \ldots, u_{D-1}\}$ на вспомогательном графе G' таких, что $f'(u_t) = (x_t, y_{t+d(u,t) (\mathrm{mod}\, D)})$. Дуге u_t присваивается вес, равный значению $d(u,t)$.

Предложен подход нахождения порогового значения и предельного состояния. Показано, что пороговое значение в сети G с динамическими длительностями прохождения по дугам не превосходит порогового значения в сети G_1, где сеть G_1 — это сеть G, в которой у каждой дуги u величина $d(u,t) = 1$ для любого $t \in Z+$.

Литература

1. Kuznetsov, O.P. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states / O.P. Kuznetsov, L.Yu. Zhilyakova // Management and Production Engineering Review. — 2011. — Vol. 2, No. 3. — pp. 33–39

2. Кузьминова, М.В. Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке / М.В. Кузьминова // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2008. — № 5. — С. 16–20.

3. Skorokhodov, V.A. The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution / V.A. Skorokhodov, A.S. Chebotareva // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2015. — Vol. 9, No. 3. — pp. 435–446.

К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)
su1951@mail.ru

Рассмотрим особый интеграл

$$A_q f = A_q(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^q}dt, \quad q = 1,2,3,\ldots,$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши ($q = 1$) или в смысле конечного значения по Адамару ($q > 1$), где $f(x)$ — плотность интеграла, ограниченная на вещественной оси функция.

Будем придерживаться обозначений работы [1].

Для $f \in B_{p,\sigma}$ введем интерполяционный оператор типа Джексона по узлам $\frac{k\pi}{\sigma}(k \in \mathbb{Z})$:

$$D_\sigma f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) sinc^2\, \sigma\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right), \quad sinc\, x = \frac{sin\, x}{x},\ \sigma > 0.$$

Аппроксимируя плотность интеграла $f(x)$ выражением $D_\sigma f$, получим квадратурную формулу

$$A_q f = A_q(D_\sigma f;x) + R_\sigma^{(q)} f, \tag{1}$$

где $R_\sigma^{(q)} f = R_\sigma^{(q)}(f;x)$ — остаточный член. Приведем некоторые частные случаи квадратурной формулы (1):

$$A_1 f = A_1(D_\sigma f;x) + R_\sigma^{(1)} f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\frac{sinc\, 2(\sigma x - k\pi) - 1}{\sigma x - k\pi} + R_\sigma^{(1)} f,$$

$$A_2 f = A_2(D_\sigma f;x) + R_\sigma^{(2)} f = 2\sigma\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(\frac{1 - sinc\, 2(\sigma x - k\pi)}{(\sigma x - k\pi)^2} - \right.$$
$$\left. - sinc^2\,(\sigma x - k\pi)\right) + R_\sigma^{(2)} f,$$

$$A_3 f = A_3(D_\sigma f; x) + R_\sigma^{(3)} f = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{3(sinc\, 2(\sigma x - k\pi) - 1)}{(\sigma x - k\pi)^3} +$$

$$+ \frac{2}{\sigma x - k\pi}(2sinc^2\,(\sigma x - k\pi) - sinc\, 2(\sigma x - k\pi)))f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) + R_\sigma^{(3)} f.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p^r(R) \cap B_{p,\sigma}$, $r = 1, 2, \ldots,$ $1 < p < \infty$, $\sigma > 1$, $\omega_k(f, \delta)_p = 0(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ *и* $f(x) = O\left((|x| + 1)^{-d}\right)$, $dp > 1$, $x \in \mathbb{R}$. *Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (1) справедлива оценка*

$$\left|\left|R_\sigma^{(q)} f\right|\right|_p = O(\sigma^{-r-\alpha+q}), \quad r + \alpha > q.$$

Следствие. *В условиях теоремы 1 справедлива равномерная оценка*

$$\left|\left|R_\sigma^{(q)} f\right|\right|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+q+\frac{1}{p}}\right), \quad r + \alpha > q + \frac{1}{p}.$$

Аналогично строятся квадратурные формулы с кратными узлами. Для $f \in B_{p,\sigma}$ введем интерполяционный оператор типа Эрмита по узлам $\frac{k\pi}{\sigma}$ $(k \in \mathbb{Z})$:

$$Q_\sigma f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc^2\, \sigma\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) + \left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right) f'\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right).$$

Заменяя плотность интеграла выражением $Q_\sigma f$, получим квадратурную формулу

$$A_q f = A_q(Q_\sigma f; x) + \widetilde{R}_\sigma^{(q)} f, \tag{2}$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка*

$$\left|\left|\widetilde{R}_\sigma^{(q)} f\right|\right|_p = O(\sigma^{-r-\alpha+q-1}), \quad r + \alpha + 1 > q.$$

Следствие. *В условиях теоремы 1 справедлива равномерная оценка*

$$\left|\left|\widetilde{R}_\sigma^{(q)} f\right|\right|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+q+\frac{1}{p}-1}\right), \quad r + \alpha + 1 > q + \frac{1}{p}.$$

Приведем некоторые частные случаи квадратурной формулы (2):

$$A_1 f = A_1(Q_\sigma f; x) + \widetilde{R}_\sigma^{(1)} f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{sinc\, 2(\sigma x - k\pi) - 1}{\sigma x - k\pi} f \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma} sinc\, 2(\sigma x - k\pi) f' \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right) \right) + \widetilde{R}_\sigma^{(1)} f,$$

$$A_2 f = A_2(Q_\sigma f; x) + \widetilde{R}_\sigma^{(2)} f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2\sigma \left(\frac{1 - sinc\, 2(\sigma x - k\pi)}{(\sigma x - k\pi)^2} - \right.$$

$$\left. - sinc^2 \, (\sigma x - k\pi) \right) f \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right) + \left(\frac{1 - sinc\, 2(\sigma x - k\pi)}{\sigma x - k\pi} - \right.$$

$$\left. - 2(\sigma x - k\pi) sinc^2 \, (\sigma x - k\pi) \right) f' \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right)) + \widetilde{R}_\sigma^{(2)} f,$$

$$A_3 f = A_3(D_\sigma f; x) + \widetilde{R}_\sigma^{(3)} f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\sigma^2 \left(\frac{3(sinc\, 2(\sigma x - k\pi) - 1)}{(\sigma x - k\pi)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sigma x - k\pi} (2 sinc^2 \, (\sigma x - k\pi) - sinc\, 2(\sigma x - k\pi)) \right) f \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right) +$$

$$+ (\sigma(\frac{sinc\, 2(\sigma x - k\pi) - 1}{(\sigma x - k\pi)^2} + 2 sinc^2 \, (\sigma x - k\pi) -$$

$$- 2 sinc\, 2(\sigma x - k\pi)) f' \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right)) + \widetilde{R}_\sigma^{(3)} f.$$

Литература

1. Солиев Ю.С. Об аппроксимации преобразования Гильберта / Ю.С. Солиев // Материалы Международной конф. «Воронежская зимняя матем. школа С.Г. Крейна — 2022» — Воронеж : ВГУ — 2022 — С. 202–207.

=

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ КАЧЕСТВЕННЫХ ОЦЕНОК КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ[1]

М.А. Степович, Д.В. Туртин, В.В. Калманович
(Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского, Иваново, ИвГУ и ИФ РЭУ им. Г.В. Плеханова)
m.stepovich@rambler.ru, turtin@mail.ru, v572264@yandex.ru

Использование катодолюминесцентного (КЛ) сигнала, возникающего при взаимодействии электронных пучков средних энергий с полупроводником, является одним из наиболее информативных методов исследования материалов полупроводниковой оптоэлектроники [1]. При этом, как правило, математически корректный анализ рассматриваемых моделей ранее не проводился. В качестве исключения укажем работы, в которых проводился качественный анализ процессов, возникающих при использовании остро сфокусированных пучков электронов: процессов диффузии и последующей излучательной рекомбинации неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) с выходом КЛ излучения [2-5].

Использование широкого электронного пучка позволяет снизить радиационную нагрузку на исследуемый образец и при математическом моделировании использовать одномерные модели. Для однородных полупроводников отметим т.н. модель коллективной диффузии [6, 7] и модель независимых источников [8]. Однако для таких моделей ранее качественный анализ не проводился, за исключением процесса диффузии ННЗ и, отчасти, КЛ в однородных полупроводниковых мишенях: в полубесконечных мишенях (модель коллективной диффузии, а также модель независимых источников и опирающаяся на неё модель КЛ [9]) и при рассмотрении модели коллективной диффузии в мишени конечной толщины [10].

В настоящей работе продолжено изучение математической модели КЛ на основе модели коллективной диффузии неравновесных ННЗ в мишени конечной толщины. Зависимость интенсивности КЛ от энергии электронов пучка E_0 и параметров полупроводниковой мишени $\mathbf{\Theta}$ с учётом самопоглощения задавалась в виде

$$I(E_0, \mathbf{\Theta}) \sim \int_{l_S}^{\infty} \Delta p(z) \exp(-\alpha z)\, dz,$$

где $\Delta p(z)$ — распределение неравновесных ННЗ после их диффузии в объёме полупроводника, находимое согласно модели коллективной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271).

диффузии, а $l_S = \mathrm{const}$ — ширина приповерхностной области, обеднённой основными носителями заряда [11].

Если по какой–то причине характер внешнего возбуждения изменится (например, вследствие какого–либо случайного воздействия), то это приведёт к изменению распределений ННЗ после их диффузии в полупроводниковой структуре. При математическом моделировании это отвечает изменению правой части дифференциального уравнения диффузии $\rho(z)$ и, соответственно, изменению решения уравнения $\Delta p(z)$ и изменению интенсивности КЛ $I(E_0, \mathbf{\Theta})$.

С использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений для математической модели КЛ получены оценки, позволяющие по изменению правой части дифференциального уравнения диффузии оценить изменение интенсивности КЛ. Получено, что если $\forall z \in [0,\ \infty)$ выполняется неравенство

$$|\rho_2(z) - \rho_1(z)| \leqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \mathrm{const}$, то

$$|I_2(E_0, \mathbf{\Theta}) - I_1(E_0, \mathbf{\Theta})| \leqslant C\varepsilon\tau.$$

Здесь $C = \mathrm{const}$, а $\tau = \mathrm{const}$ — время жизни ННЗ.

Литература

1. Yacobi B.G. Cathodoluminescence microscopy of inorganic solids / B.G. Yacobi, D.B. Holt. — New York: Plenum Press, 1990. — 354 p.

2. Polyakov A.N. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material / A.N. Polyakov, A.N. Smirnova, M.A. Stepovich, D.V. Turtin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, No. 2. — pp. 259–262.

3. Stepovich Mikhail A. On the correctness of mathematical models of time–of–flight cathodoluminescence of direct–gap semiconductors / Mikhail A. Stepovich, Dmitry V. Turtin, Elena V. Seregina, Veronika V. Kalmanovich // ITM Web of Conferences. — 2019. — Vol. 30. — Art. No. 07014.

4. Turtin D.V. Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material / D.V. Turtin, E.V. Seregina, M.A. Stepovich // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 250, Issue 1. — P. 166–174.

5. Степович М.А. О корректности математических моделей диффузии, обусловленной остро сфокусированным электронным зондом в однородном полупроводниковом материале / М.А. Степович, Д.В. Туртин, Е.В. Серегина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2021. — Т. 193. — С. 122–129.

6. Wittry D.B. Measurements of diffusion lengths in direct–gap semiconductors by electron beam excitation / D.B. Wittry, D.F. Kyser // Journal Appl. Phys. — 1967. — Vol. 38, No. 1. — P. 375–382.

7. Rao–Sahib T.S. Measurements of diffusion lengths in p–tipe gallium arsenide by electron beam excitation / T.S. Rao–Sahib, D.B. Wittry // Journal Appl. Phys. — 1969. — Vol. 40, No. 9. — P. 3745–3750.

8. Белов А.А. Использование модели независимых источников для расчета распределений неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком / А.А. Белов, В.И. Петров, М.А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. — 2002. — Т. 66, № 9. — С. 1317–1322.

9. Туртин Д.В. О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции / Д.В. Туртин, М.А. Степович, В.В. Калманович, А.А. Картанов // Таврический вестник информатики и математики. - 2021. - № 1 (50). - С. 81-100.

10. Степович М.А. О корректности математической модели коллективной диффузии неосновных носителей заряда в однородной полупроводниковой мишени конечной толщины / М.А. Степович, Д.В. Туртин, В.В. Калманович // Научные труды Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского. Естественные и технические науки. — Калуга: КГУ им. К.Э. Циолковского, 2021. — С. 219–225.

11. Бонч–Бруевич В.Л. Физика полупроводников : Учебное пособие для вузов / В.Л. Бонч–Бруевич, С.Г. Калашников. — М.: Наука, 1990. — 685 с.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ КОВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА $\mathbb{R}^3$

А.В. Субботин (Белгород, БГТУ, БелГУ)
subbotin@mail.ru

Рассматриваются системы трансляционно инвариантных квазилинейных уравнений первого порядка

$$\dot{u}_j(\boldsymbol{x}, t) = \Big(A_{jk;l}(\mathbf{u})\nabla_k u_l + H_j(\mathsf{u})\Big)(\boldsymbol{x}, t)\,, \quad j = 1, 2, 3\,. \tag{1}$$

для наборов $\mathbf{u} = \langle u_j(\boldsymbol{x}, t); j = 1, 2, 3\rangle$ непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $\mathbb{R}^3$, ∇ — векторный дифференциальный оператор градиента в $\mathbb{R}^3$. Эти наборы представляют компоненты полярных векторных полей на $\mathbb{R}^3$, то есть, при преобразованиях пространства $\mathbb{R}^3$ посредством любой ортогональной матрицы $\mathsf{V} \in \mathbb{O}_3$, они преобразуются как $(\mathsf{V}\mathsf{u})_j = V_{jk}u_k$.

Определение. *Система уравнений (1) называется ковариантной, если*

$$A^{j,k;l}(\mathsf{V}\,\mathbf{u}) = V_{j,j'}V_{k,k'}V_{l,l'}A_{j',k;l'}(\mathbf{u})\,, \quad H_j(\mathsf{V}\,\mathbf{u}) = V_{j,j'}H_{j'}(\mathbf{u})\,.$$

Установлено, что:

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) была ковариантной при преобразованиях группы $\mathbb{O}_3$, необходимо и достаточно чтобы она имела следующий вид*

$$\dot{u}_j = a^{(1)}(\mathbf{u})\big(\mathbf{u}, \nabla_j\mathbf{u}\big) + a^{(2)}(\mathbf{u})\big(\mathbf{u}, \nabla\big)u_j + a^{(3)}(\mathbf{u})u_j\big(\nabla, \mathbf{u}\big) + u_j H(\mathbf{u})\,, \tag{2}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $a^{(r)}(\cdot)$, $r = 1, 2, 3$; $H(\cdot)$ — непрерывные функции от инварианта $\mathbf{u}^2$.

В частности, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) имела дивергентный тип и была ковариантной при преобразованиях группы $\mathbb{O}_3$, необходимо и достаточно чтобы она она была представима в виде*

$$\dot{u}_j(\boldsymbol{x}, t) = \Big(\nabla_j b^{(1)} + \big(\nabla, b^{(2)}u_j\mathbf{u}\big)\Big)(\boldsymbol{x}, t)\,, \quad j = 1, 2, 3\,. \tag{3}$$

где $b^{(r)}(\cdot), r = 1, 2$ — непрерывно дифференцируемые функции от инварианта $\mathbf{u}^2$.

Следствием этих теорем являются

Теорема 3. *Система (1) оставляет инвариантным линейное многообразие соленоидальных полей на $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда генератор $\mathsf{G}_j(\mathbf{u})$ эволюции в (1) имеет вид*

$$G_j(\mathbf{u}) = a^{(3)}(\mathbf{u})u_j\big(\nabla, \mathbf{u}\big)\,.$$

Теорема 4. *Система (1) оставляет инвариантным многообразие унимодальных полей $\{\mathbf{u}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{u}^2(\boldsymbol{x}) = \mathrm{const}\}$ на $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда генератор $\mathsf{G}_j(\mathbf{u})$ эволюции в (1) имеет вид*

$$G_j(\mathbf{u}) = a^{(1)}(\mathbf{u})\big(\mathbf{u}, \nabla_j\mathbf{u}\big) + a^{(2)}(\mathbf{u})\big(\mathbf{u}, \nabla\big)u_j\,.$$

Теорема 5. *Система (2) оставляет инвариантным линейное многообразие потенциальных полей на $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда генератор $\mathsf{G}_j(\mathbf{u})$ эволюции в (2) имеет вид $G_j(\mathbf{u}) = \nabla_j b^{(1)}(\mathbf{u})$.*

Литература

1. Virchenko Yu.P. Subbotin A.V. The class of evolutionary ferrodynamic equations / Yu.P. Virchenko. — Mathematical methods in Applied Sciences.— 2021.– 44.– 15.— P.11913-11922.

ОДНА НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ВОЗНИКАЮЩАЯ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН [1]

С.В. Тихов, Д.В. Валовик (Пенза, ПГУ)
tik.stanislav2015@yandex.ru, dvalovik@mail.ru

Пусть $\varepsilon \equiv \varepsilon(x) > 0$ есть вещественная функция, определенная на отрезке $x \in [0,1]$, где $\varepsilon'(x) \geqslant 0$ и $\varepsilon \in C^1(\bar{\mathrm{I}})$, и $\alpha, \gamma > 0$ есть вещественные параметры.

Рассмотрим нелинейную задачу на собственные значения для следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} -Z'' + \gamma X' &= \big(\varepsilon + \alpha(X^2+Z^2)\big)Z, \\ -Z' + \gamma X &= \gamma^{-1}\big(\varepsilon + \alpha(X^2+Z^2)\big)X, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in [0,1]$, $X \equiv X(x;\gamma)$, $Z \equiv Z(x;\gamma)$ — вещественные функции, такие, что $X \in C^1[0,1]$ и $Z \in C^2[0,1]$, с краевыми условиями

$$Z(0) = Z(1) = 0 \tag{2}$$

и дополнительным условием

$$X(0) = X_0, \tag{3}$$

где X_0 — вещественная постоянная, которая выбирается специальным образом, см. подробности в [1, 2].

Задачу (1)–(3) назовем *задачей Q*. Отметим, что задача Q описывает распространение монохроматических электромагнитных ТМ-поляризованных волн в плоском экранированном диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой.

Определение 1. *Число $\gamma = \widehat{\gamma}$ такое, что существуют функции $X \equiv X(x;\widehat{\gamma})$, $Z \equiv Z(x;\widehat{\gamma})$, удовлетворяющие системе* (1) *и условиям* (2)—(3), *назовем собственным значением задачи Q, и функции $X(x;\widehat{\gamma}), Z(x;\widehat{\gamma})$, отвечающие данному собственному значению, назовем собственными функциями задачи Q.*

Если в системе (1) положить $\alpha = 0$, то задача Q вырождается в линейную задачу, которую назовем задачей Q_0. Из теории [3] известно, что задача Q_0 имеет бесконечно много отрицательных и лишь конечное число (возможно ни одного) положительных собственных значений.

Методы теории возмущений широко применяют для решения нелинейных задач; их использование основывается на естественном

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10015).

предположении, что при малых значениях «коэффициента нелинейности» решения нелинейной задачи можно найти вблизи решений соответствующей линейной задачи. Такой подход справедлив и для задачи Q. При достаточно малых значениях α некоторое (конечное) число (положительных) решений задачи Q можно найти вблизи решений линейной задачи Q_0.

В данной работе для решения задачи Q применяется *метод интегрального характеристического уравнения*. Такой подход позволил доказать, что при любом $\alpha > 0$ задача Q имеет бесконечно много положительных собственных значений с точкой накопления на бесконечности.

Схожие задачи рассмотрены в [1, 2].

Литература

1. Валовик Д.В. О существовании бесконечного числа собственных значений в одной нелинейной задаче теории волноводов. / Д.В. Валовик, С.В. Тихов // Жур. выч. мат. и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 10. — С. 1658–1667.

2. Валовик Д.В. Асимптотический анализ нелинейной задачи на собственные значения, возникающей в теории волноводов. / Д.В. Валовик, С.В. Тихов // Обыкновенные дифференциальные уравнения — 2019. — Т. 55, № 12. — С. 1610–1624.

3. Курант Р. Методы математической физики, том первый / Р. Курант, Д. Гильберт. — Москва—Ленинград : ГИТТЛ, 1951. — 525 с.

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ю.А. Тихонов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
yurytik@yandex.ru

В данной работе изучается вопрос о корректной разрешимости следующего абстрактного интегро-дифференциального уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \alpha A\frac{du}{dt}(t) + (A+B)u(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0, \qquad (1)$$

$$u(0) = u_0,\ \frac{du}{dt}(0) = u_1. \qquad (2)$$

Оператор A — самосопряжённый, положительно-определённый оператор в H, причём A^{-1} компактен, а оператор B — симметрический, компактный относительно A. Функция $K(t)$ задаётся интегралом:

$$K(t) = \int_{d_0}^{+\infty} e^{-\tau t} d\mu(\tau),$$

где $d_0 > 0$, $\mu(\tau)$ — неубывающая, непрерывная справа функция. Пусть выполнено условия

$$\int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1 \tag{3}$$

и

$$\|Bh\| < \left(1 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right) \|Ah\| \tag{4}$$

для каждого $h \in \mathrm{Dom}(A)$. Обозначим $C^n(X, H)$ — множество вектор-функций, действующих из множества $X \subset \mathbb{R}$ в H, имеющих непрерывные производные вплоть до n-го порядка. Разрешимость задачи (1) – (3) будем понимать в следующем смысле [1]:

Определение 1. Функция $u(t) \in C^2([0, +\infty], H)$ называется классическим решением задачи (1) – (2), если для $t \geqslant 0$, $u(t)$, $\dot{u}(t) \in \mathrm{Dom}(A)$, $A\dot{u}(t) \in C([0, +\infty], H)$, кроме этого, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $t \geqslant 0$, а также начальным условиям (2).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (4), *тогда для любых* $u_0, u_1 \in Dom(A)$ *и задача* (1) - (2) — *корректно разрешима в смысле определения 1. Более того, существует* $\theta \in (0, \pi/2)$, *что в области* $\{|\arg z| < \theta\}$ *функция* $u(z)$ *является аналитической, причём найдутся* $M > 0$, $m > 0$, $q \in (0, 1)$ *и* $\gamma > 0$, *такие что справедлива следующая оценка:*

$$\|u(t + i\tau)\|_H^2 < Me^{-2\gamma t} \ln\left(e + \frac{1}{t - \frac{m}{q}|\tau|}\right) (\|A^{1/2}u_0\|_H^2 + \|u_1\|_H^2).$$

Ключевым вопросом, возникающим при изучении разрешимости задачи (1)–(2), является вопрос о расположении спектра оператор-функции $L(\lambda)$:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A + B - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda} A, \tag{5}$$

являющейся символом уравнения (1). Приведём результат о локализации спектра этой опреатор-функции:

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (3), *тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *содержится в области*

$$D_{\gamma,p,q} = \left\{\lambda \in \mathcal{S} : \mathrm{Re}\ \lambda < -\gamma,\ |\mathrm{Im}\ \lambda| < p\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} + q\right\},$$

где γ, p и q — положительные константы. При этом невещественные точки спектра являются собственными числами оператор-функции $L(\lambda)$ конечной алгебраической кратности.

Уравнение (1) возникает в различных задачах теории вязкоупругости, в частности, при изучении малых поперечных колебаний вязкоупругого стержня [2], [3]. Отметим, что при $\alpha = 0$, это уравнение является уравнением типа Гуртина-Пипкина. Уравнения подобного типа в случае, когда $B = 0$, подробно изучены на предмет корректной разрешимости в весовых пространствах Соболева в работах В.В. Власова и соавторов. Основные результаты опубликованы в монографии [4] (гл. 3) и цитированных в ней статьях автора.
Система уравнений типа (1) - (3) с нулевым α и ядром $K(t)$, представимым в виде конечной суммы экспонент, изучалась также в работе [5], в которой ипользовался подход к изучению разрешимости и экспоненциальной устойчивости задачи (1) - (3) с позиции теории полугрупп.

Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. / С.Г. Крейн. — М.:Наука., 1967. — 464 с.

2. Милославский А.И. О спектре неустойчивости операторного пучка. / А.И. Милославский// Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 4. — С. 88–94

3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости /А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. — М. : Наука, 1970. —279 с.

4. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений /В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М. : Макс Пресс, 2016. —488 с.

5. Закора Д.А. Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения. / Д.А. Закора// Мат. заметки. — 2018. — Т. 103, № 5. — С. 702–719

О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ КОЛИЧЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПРЯМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ n-ОЙ СТЕПЕНИ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо (Майкоп, АГУ)
tlyachev@adygnet.ru

В работе [1] была дана оценка максимального числа $\alpha(n)$ инвариантных прямых системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, a_{rs}, $b_{rs} \in \mathbb{R}$, $(P,Q) = 1$, $deg(P^2+Q^2) = 2n$. Это число удовлетворяет двойному неравенству

$$2n + 1 + \frac{1-(-1)^n}{2} \leqslant \alpha(n) \leqslant 3n - 1.$$

Данный результат был использован в [2] при анализе первых интегралов и фазовых портретов кубических дифференциальных систем на плоскости.

Тем не менее, вопрос о более точной оценке сверху числа действительных инвариантных прямых для систем вида (1) остается открытым и поэтому представляет определенный интерес.

Введение нового понятия — инвариантного множества позволяет улучшить оценку максимального количества инвариантных прямых системы (1).

В данной работе доказывается, что векторное поле n-ой степени (1), имеющее два инвариантных множества, каждое из которых состоит из $n-1$ параллельных между собой действительных инвариантных прямых, имеет не более $2n+4$ инвариантных прямых при n — нечетном и $n \geqslant 3$.

При этом под инвариантным множеством понимается множество, состоящее из s параллельных между собой действительных инвариантных прямых системы (1), имеющих угловой коэффициент k. Такие множества обозначаем символом $M_s^k(k)$.

Литература

1. Artes I., Grünbaum B., Llibre I. On the number of invariant straight lines for polinomial differential systems / I. Artes, B. Grünbaum,

I. Llibre // Pacific Journal of Mathematics. — 1998. — Vol. 184. — No. 2. — P. 207-230.

2. Bujac C., Llibre J., Vulpe N. First integrals and phase portraits of planar polynomial differential cubic systems with the maximum number of invariant traight lines / C. Bujac, J. Llibre, N. Vulpe // Qual. Theory Dyn. Syst. — 2016. — Vol. 15. — № 2. — P. 327–348.

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Т.С. Точко, Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)
taniablesser@gmail.com, lomovcev@bsu.by

Установлена глобальная теорема корректности задачи:

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ a>0,\ (x,t)\in\dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\ \ u_t(x,t)|_{t=0}=\psi(x),\ x>0, \tag{2}$$

$$[\beta(t)u_t(x,t)+a\beta(t)u_x(x,t)+a\gamma(t)u(x,t)]|_{x=0}=a\mu(t),\ t>0. \tag{3}$$

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве Ω плоскости R^2, $C^0(\Omega)=C(\Omega)$ и $\dot{G}_\infty\ =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Характеристика $x=at$ делит первую четверть плоскости $G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ на два множества $G_-=\{(x,t)\in G_\infty: x>at>0\}$, $G_+=\{(x,t)\in G_\infty: 0\leqslant x\leqslant at\}$.

Определение 1. *Критериальными значениями* старших производных порядка $m-1$ от правой части f в условии согласования (6) для целых $m\geqslant 2$ называются значения $K_m(0)$ функции

$$K_m(x)\equiv\beta(0)\sum_{j=0}^{m-1}a^j\ \frac{\partial^{m-1}f(x,t)}{\partial x^j\partial t^{m-j-1}}\bigg|_{t=0},\ m\geqslant 2,$$

при $f(x,t)=f_0(x,t)$ и $x=0$ для пределов $f_0(x,t)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x,t)$ функций $f_n(x,t)\in C^m(G_\infty)$ по норме пространства $\widehat{C}^{m-2}(G^T)$ из [1] функций $f_0(x,t)\in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющих (4) и

$$\beta(t)\left[\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\int\limits_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau\right)\right]\in C[0,+\infty).$$

Следующая глобальная теорема корректности смешанной задачи (1)–(3) эквивалентна теореме 1 из [1], но не содержит отдельно условий согласования для чётных и нечётных целых чисел $m\geqslant 2$.

Теорема. *Пусть* $\beta, \gamma \in C^m(R_+)$, $m \geqslant 2$, $t \in R_+ = [0, +\infty)$. *Смешанная задача (1)—(3) в* G_∞ *имеет единственное и устойчивое по* φ, ψ, f, μ *гладкое решение* $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geqslant 2$, *тогда и только тогда, когда верны требования гладкости и условия согласования:*

$$\varphi \in C^m(R_+),\ \psi \in C^{m-1}(R_+),\ f \in C^{m-2}(G_\infty),\ \mu \in C^m(R_+),$$

$$F_p(x,t) \equiv \int\limits_0^t f\left(\left|x + (-1)^p a(t-\tau)\right|, \tau\right) d\tau \in C^{m-1}(C_\infty),\ p = 1,\ 2, \quad (4)$$

$$\beta(t)\varphi^{(m+1)}(at),\ \beta(t)\psi^{(m)}(at) \in C(R_+),$$

$$\sum_{j=0}^{l} \frac{l!}{j!(l-j)!} \left\{ \beta^{(l-j)}(0) \left[\sum_{i=0}^{j-1} a^i \frac{\partial^{j-1} f(0,0)}{\partial x^i \partial t^{j-1-i}} + a^{j+1}\varphi^{(j+1)}(0) + a^j \psi^{(j)}(0) \right] + \right.$$

$$+ a\gamma^{(l-j)}(0) \left[\sum_{i=0}^{j-2} \frac{1+(-1)^i}{2} a^i \frac{\partial^{j-2} f(0,0)}{\partial x^i \partial t^{j-2-i}} + \frac{1+(-1)^j}{2} a^j \varphi^{(j)}(0) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-(-1)^j}{2} a^{j-1}\psi^{(j-1)}(0) \right] \right\} = a\mu^{(l)}(0),\ l = \overline{0, m-1}, \qquad (5)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{m!}{j!(m-j)!} \left\{ \beta^{(m-j)}(0) \left[\sum_{i=0}^{j-1} a^i \left. \frac{\partial^{j-1} f(x,t)}{\partial x^i \partial t^{j-1-i}} \right|_{t=0} + \right.\right.$$

$$\left. + a^{j+1}\varphi^{(j+1)}(0) + a^j \psi^{(j)}(0) \right] +$$

$$+ a\gamma^{(m-j)}(0) \left[\sum_{i=0}^{j-2} \frac{1+(-1)^i}{2} a^i \frac{\partial^{j-2} f(0,0)}{\partial x^i \partial t^{j-2-i}} + \frac{1+(-1)^j}{2} a^j \varphi^{(j)}(0) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-(-1)^j}{2} a^{j-1}\psi^{(j-1)}(0) \right] \right\} +$$

$$+ K_m(0) + \beta(0) \left[a^{m+1}\varphi^{(m+1)}(0) + a^m \psi^{(m)}(0) \right] +$$

$$+ a\gamma(0) \left[\sum_{i=0}^{j-2} \frac{1+(-1)^i}{2} a^i \frac{\partial^{j-2} f(0,0)}{\partial x^i \partial t^{j-2-i}} + \frac{1+(-1)^j}{2} a^j \varphi^{(j)}(0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1-(-1)^j}{2} a^{j-1}\psi^{(j-1)}(0) \right] = a\mu^{(m)}(0),\ m \geqslant 2. \qquad (6)$$

Гладким решением $u \in C^m(G_\infty)$ смешанной задачи (1)—(3) в G_∞ соответственно на G_- и G_+ является функция [1]:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds\ ,d\tau,$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)ds\,d\tau +$$

$$+\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\Big\{a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\left[a\varphi'(at-x)+\psi(at-x)\right]-$$

$$-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_0^{t-x/a} f(a(t-\tau)-x,\tau)d\tau\Bigg\} - \frac{1}{a}\int\limits_0^{t-x/a}\int\limits_0^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)ds\,d\tau.$$

Следствие 1. *Если правая часть f уравнения (1) зависит только от x или t и $f \in C^{m-2}(R_+)$ по t или x, то теорема верна без интегральных требований гладкости (4) на f.*

Следствие 2. *Теорема при $\alpha = \beta = 0$ даёт формулу решения и критерий корректности первой смешанной задачи для уравнения (1) в классе гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geqslant 2$.*

Замечание. В (4) теоремы принадлежность интегралов множеству $C^{m-1}(C_\infty)$ от функции $f \in C^{m-2}(C_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(m-1,0)}(C_\infty)$ или $C^{(0,m-1)}(C_\infty)$, где $C^{(m-1,0)}(C_\infty)$ и $C^{(0,m-1)}(C_\infty)$ — множества непрерывно дифференцируемых $m-1$ раз по x, непрерывных по t и непрерывных по x, непрерывно дифференцируемых $m-1$ раз по t функций на C_∞.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Гладкие решения начально-граничной задачи для уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косой производной / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Материалы Международной Воронеж. зимн. мат. конференции. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 195–198.

О ВЛОЖИМОСТИ 4-ВАЛЕНТНЫХ ГРАФОВ В ПЛОСКОСТЬ[1]

В.А. Трифонова (г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
trifonovaviktoriya2012@yandex.ru

Определение 1. *Крестовым графом* называется конечный связный 4-валентный граф, в каждой вершине которого фиксировано произвольное разбиение четырех исходящих из нее полуребер на две пары.

Определение 2. Крестовый граф называется *X-планарным*, если его можно изобразить без самопересечений на плоскости так, что при обходе вокруг каждой вершины полуребра из первой пары и полуребра из второй пары чередуются (т.е. проходятся в порядке 1212, а не 1122).

Пример X-планарного крестового графа показан на рис. 1, а графы «восьмерка» (рис. 2) и «трилистник» (рис. 3) планарны, но не X-планарны.

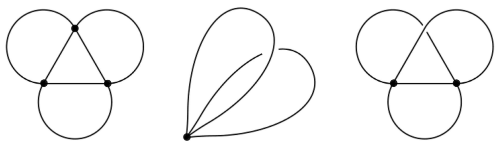


Рис. 1 *Рис.* 2 *Рис.* 3

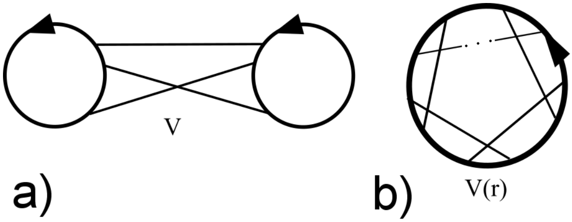
Определение 3. Общая вершина двух путей на крестовом графе, не имеющих общих ребер, называется *вершиной перекрестья*, если один из этих путей последовательно проходит по полуребрам из одной пары, выходящим из этой вершины, а второй путь последовательно проходит по полуребрам из другой пары.

Следующая теорема была предложена В.А. Васильевым в качестве гипотезы, впервые она была доказана В.О. Мантуровым. Нами получено новое доказательство этой теоремы с помощью первого критерия высотности атома (Теорема 2, подробнее см. В.А. Трифонова [1]).

Теорема 1. *Крестовый граф X-планарен тогда и только тогда, когда он не содержит двух несамопересекающихся циклов без общих ребер, имеющих ровно одну вершину перекрестья.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

Теорема 2. *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии V (r),r $\geqslant$ 1 (см. Рис. a), b))*



Литература

1. Трифонова В.А. Критерии высотности атома / В.А. Трифонова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2020. — № 3. — С. 12–24.

2. Мантуров В.О. Доказательство гипотезы В.А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений / В.О. Мантуров // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 5. — С. 169–178.

3. Ошемков А.А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей / А.А. Ошемков // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Сборник статей, Тр. МИАН : Наука, М. — 1994. — Т. 205. — С. 131–140.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ЛЕС – БИОМАССА»

Э.Е. Тусупбекова (Москва, МГУ)
elmira.tussupbekova@gmail.com

Лес — важнейший компонент биосферы, основной источник экологической безопасности человека. В лесах содержится около 60-70 процентов всего атмосферного запаса углекислоты — 400-500 млрд.т. Помимо биологической пользы леса приносят огромный вклад в развитие экономики многих промышленно развитых стран мира.

В данной работе проводится исследование и анализ динамической модели для сохранения лесного хозяйства, которое истощается из-за вырубки лесов, роста лесной промышленности, климатических факторов. Рассматривается возрастная структура лесной биомассы через деление на молодые и зрелые популяции. Для промышленных предприятий накладывается ограничение на вырубку молодых популяций. В качестве альтернативных ресурсов для промышленных предприятий вводится модифицированная функция Лесли–Гоуэра.

В работе изучается система нелинейных дифференциальных уравнений, исследуется устойчивость решений системы, допускающей линеаризацию в окрестности положений равновесия. Теория дифференциальных неравенств используется для получения достаточных условий существования предельных значений введенных переменных. Качественная теория дифференциальных уравнений применяется для исследования устойчивости положений равновесия системы. Фазовые портреты строятся при помощи веб-приложения PhaPl.

В результате исследования было построено трехмерное поле направлений динамической системы и фазовые портреты в проекции по двум переменным. Были получены условия биоэкономического равновесия. В результате численного моделирования были построены графики, соответствующие полученным в работе результатам.

Литература

1. Асташова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков / И.В. Асташова — Москва. : Современная математика и ее приложения, 2003. — Т. 8. — С. 3–33.

2. Черепанов А.А. Программный комплекс PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости / А.А. Черепанов // Открытое образование, 2017. — № 41 — 52 с.

3. Chen F. On a nonlinear nonautonomous predator - prey model with diffusion and distributed delay / F. Chen // Comput Appl Math, 2014. — № 33. — 49 p.

4. Leslie P.H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics / P.H. Leslie // Oxford University Press, 1948. — № 213. — 245 p.

5. Manisha C., Joydip D.,Om P. M. A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction / C. Manisha , D. Joydip , P.M. Om // Springer International Publishing Switzerland, 2015. — p. 1–10.

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

А.А. Уртаева (Владикавказ, СОГУ)

urtaeva-96@mail.ru

В докладе обсуждается вопрос изучаем вопрос о кратности собственных значений задачи

$$L_\lambda u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) = \lambda\rho(x)u, \qquad u|_{\partial\Gamma} = u'|_{\partial\Gamma} = 0, \qquad (1)$$

и даем точную оценку кратности собственных значений этой задачи, где $\partial\Gamma$ – множество граничных вершин Γ.Оператор L_λ пораждается совокупностью дифференциальным уравнением на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - r_i(x)u = \lambda\rho(x)u, \quad x_i \in E(\Gamma),$$

и набором условий согласования в каждой внутренней вершине графа $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a),$$

$$\sum_{i\in I(a)} (p_i u_i'')_\nu'(a) - r(a)u(a) = \lambda\rho(a)u(a), \quad a \in J(\Gamma).$$

Давно замечено, что оценка кратности собственных значений краевых задач на графах существенно зависит от топологии графа. На сегодняшний день хорошо изучены спектральные свойства задачи Штурма-Лиувилля на графе с различными условиями стыковки в узловых вершинах графа [2].

Отметим, что изучение свойств решений дифференциальных уравнений четвертого порядка на сети является существенно более сложной, нежели аналогичная задача для уравнения Штурма-Лиувилля. Даже модели физического происхождения оказываются очень трудными для анализа (см., например, [1],[3]).

Прежде, чем сформулировать основной результат, введем обозначения.

Пусть Γ – произвольный граф. Вершину $a \in J(\Gamma)$, лежащую на каком-либо цикле, назовем *разбивающей*, если $\Gamma \setminus a$ не связно. Пусть $\Gamma_i(a)$ – одна из компонент связности множества $\Gamma \setminus a$. Множество $\Gamma_i = \Gamma_i(a) \cup a$ является подграфом графа Γ, который также может иметь циклы. Он также может разбиваться на связные компоненты некоторыми вершинами, лежащими на его циклах. Во избежание недоразумений подчеркнем, что выбрасываются только вершины, лежащие на циклах. После такого разбиения снова образуем подграфы типа Γ_i, присоединяя к ним вершины, с помощью которых они разбивались. Продолжая этот процесс и далее, мы получим некоторое количество подграфов. Каждый из них является либо деревом, либо является связным объединением циклов, не допускающим дальнейшего разбиения описанного выше типа. Такое объединение циклов назовем *гнездом*.

Обозначим через $|\partial\Gamma|$ – число граничных вершин, $\zeta(\Gamma)$ – количество гнезд графа, содержащих ровно по одной разбивающей вершине,и $\eta(\Gamma)$ – цикломатическое число графа Γ.

Теорема 1. Кратность любого собственного значения краевой задачи (1) не превосходит

$$|\partial\Gamma| + \zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) - 1.$$

Литература

1. Покорный Ю.В., Мустафокулов Р. О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе / Изв. вузов. Матем., 1999,С. — 75–82.

2. Диаб А.Т. Калдыбекова Б.К., Пенкин О.М. О кратности собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля на графах / Матем. заметки 99 :4. 2016. — С. 489–501.

3. Кулаев Р.Ч. Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина для уравнения четвертого порядка на графе / Дифференц. уравнения 51:3. 2015. —С. 302—316.

4. Боровских А.В., Мустафокулов Р., Лазарев К.П., Покорный Ю.В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети / Докл. РАН, 345:6. 1995 — С. 730–732.

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ)

vum1@yandex.ru

Рассматривается линейное рекуррентное соотношение (далее, ЛРС)

$$\sum_{i=0}^{p} a_i u_{n+i} = f_n, \qquad (1)$$

где заданы постоянные a_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, $a_p \neq 0$, и последовательность f_n, определенная при каждом $n > 0$.

Под решением ЛРС (1) подразумевается последовательность u_n, удовлетворяющая (1) при каждом $n > 0$.

Рекуррентные формулы используются для описания времени работы алгоритма, рекурсивно обращающегося к самому себе. В такой формуле время, требуемое для решения задачи объемом ввода n, выражается через время решения вспомогательных задач [1].

Известно решение ЛРС (1) со специальными неоднородностями вида $f_n = \alpha^n P_m(n)$, где $P_m(n)$ — многочлен от n [2]; но в случае произвольных неоднородностей общего решения, по-видимому, нет. Цель работы: получить это общее решение в виде аналитического выражения от n.

В частном случае $p = 2$ результат был апробирован на конференции ВЗМШ–2022 [3]. Он использовался автором при решении задачи, моделирующей работу шнекового рабочего органа лесопожарной грунтометательной машины [4].

Для решения поставленной задачи используется вспомогательное линейное дифференциальное уравнение (ВДУ) порядка p. Показано, что решение u_n ЛРС (1) связывается с решением $y(x)$ ВДУ с помощью функционала $u_n = \delta^n\{y\} = y^{(n)}(0)$. Приводится иллюстрирующий пример.

Автор настоящей работы пришел к такому способу решения, сопоставив решение ЛРС $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ — последовательность Фибоначчи — с решением ВДУ $y^{(2)} = y^{(1)} + y$. Решение ЛРС описывается формулой Бине, в которой участвует число $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, называемое золотым сечением. Это число также является собственным числом ВДУ.

Литература

1. Кормен Т. Алгоритмы. Построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — Изд. дом «Вильямс», 2005. — 1296 с.

2. Воронин В.П. Дополнительные главы дискретной математики / В.П. Воронин, А.Д. Поспелов. — М. : МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002. — 129 с.

3. Усков В.И. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка // В.И. Усков, В.А. Анохина, В.С. Московская, П.В. Трофименко // Материалы Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2022». — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2022. — С. 217–220.

4. Попиков П.И. Теоретическое исследование кинематических и динамических характеристик шнекового рабочего органа лесопожарной грунтометательной машины / П.И. Попиков, А.К. Поздняков, В.И. Усков, М.Н. Лысыч, М.А. Гнусов // Лесотехнический журнал. — 2021. — Т. 11, № 3 (43). — С. 140–151.

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

О.Ф. Ускова, Н.А. Каплиева (Воронеж, ВГУ)

sunny.uskova@list.ru

Правительство Российской Федерации приняло концепцию модернизации образования. Ее реализация будет способствовать подготовке квалифицированных специалистов, востребованных на рынке труда.

Факультет прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета (ПММ ВГУ) образован в нашей стране в 1969 году, одним из первых факультетов подобного профиля и успешно осуществляет подготовку специалистов в области информатики, программирования, информационных систем и технологий, баз данных, программного обеспечения.

«Информатика и программирование» — одна из основных дисциплин в учебном плане всех направлений первого курса факультета ПММ.

До 2010 года первокурсники факультета ПММ в рамках дисциплины «Информатика и программирование» изучали язык программирования Паскаль, который был создан в 1971 году для обучения программированию как систематической дисциплины и считался вычислительным языком высокого уровня.

Язык Паскаль разработал Никласу Вирт — профессор, директор института информатики Швейцарской высшей политехнической школы в Цюрихе.

Язык был назван в честь выдающегося французского ученого (математика и философа) Блеза Паскаля (1623–1662 гг).

Никлаус Вирт, признавая тесную связь математики и программирования, считает [1]:

«Ключ к тайнам компьютеров в гармонии математики, инженерии и программирования».

Преподаватели кафедры математического обеспечения ЭВМ факультета ПММ ВГУ разработали задачник по программированию на языке Паскаль, который опубликован в 10 городах [2].

Начиная с 2010 года в дисциплине «Информатика и программирование» первокурсники факультета ПММ изучают язык программирования C++. Этот язык разработал Бьёрн Страуструп в начале 80-х годов прошлого века.

Популярность C++ очень высока. Существует множество различных платформ и версий C++.

Для практических занятий и лабораторных работ сотрудниками кафедры МО ЭВМ факультета ПММ разработан задачник-практикум по структурному программированию на языке C++. Основная цель этого учебного пособия придать курсу «Информатика и программирование» научно-обоснованный базис, посвятить большую часть занятий не столько синтаксическим особенностям языка, сколько методам программирования, международным связям с математическими алгоритмами.

Приведем несколько примеров таких заданий.

1. Составить программу для вычисления полинома

$$y = 2x^8 - x^6 + 4x^5 - 5x^2 + 6x = 1,$$

используя формулу Горнера.

2. Использовать перегрузку функций для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ разными методами: методов деления отрезка пополам, методом хорд и методом Ньютона.

3. Вычислите интегралы:

$$\int\limits_a^b \sin^2 x \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \operatorname{ctg}(x^2+4) dx.$$

Для этого напишите функцию, вычисляющую интеграл по формуле наименьших прямоугольников для заданного интервала, количества разбиений и функции, передаваемой как параметр.

Литература

1. Ускова О.Ф. Ключ к тайнам компьютеров / О.Ф. Ускова, Н.А. Каплиева, Н.Б. Ускова // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна, 13–19 ноября 2017 г. : сборник материалов. — Воронеж, 2017. — С. 183–184.

2. Программирование на языке Паскаль: задачник / О.Ф. Ускова [и др.]; под ред. О.Ф. Усковой. — М.; СПб.; Н. Новгород; Воронеж; Ростов н/Д.; Екатеринбург; Самара; Киев; Харьков; Минск : Питер, 2005. — 336 с.

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

К.Д. Федоров (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова)

konstantin-dubna@mail.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается область $\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с боковыми границами $\Sigma_k = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\}$, $k = 1,2$, $g_2(t) - g_1(t) \geqslant d > 0$, $t \in [0,T]$.

Функции $g_k \in C^1(0,T]$ и справедливы оценки: $\left|g'_k(t)\right| \leqslant \omega(t^{1/2})t^{-1/2}$, $k = 1,2, t \in (0,T]$, где ω – некоторый модуль непрерывности.

В D рассматривается равномерно-параболический матричный оператор $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{l=0}^{2} A_l(x,t)\frac{\partial^l u}{\partial x^l}$, где $A_l = ||a_{ijl}||_{i,j=1}^m$, $m \geqslant 1$, для собственных чисел μ_k матрицы A_2 выполнено $Re\mu_k(x,t) \geqslant \delta > 0$, $(x,t) \in \overline{D}$, $|\Delta_{x,t} a_{ijl}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$ в $\overline{D}$, где ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию $\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int\limits_0^z y^{-1}dy \int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty$, $z > 0$.

Ставится следующая задача:

$$Lu = 0, (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0,\ g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Sigma_1} = \psi_1, u\Big|_{\Sigma_2} = \psi_2. \tag{3}$$

Доказывается, что если $\psi_1, \psi_2 \in \underset{0}{C}^1[0,T]$, то существует решение задачи (1)–(3). Это решение имеет вид специального параболического потенциала, принадлежит классу $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ и справедливы соответствующие оценки.

Литература

1. Федоров К. Д. О первой начально-краевой задаче для модельной параболической системы в области с криволинейными боковыми границами / К.Д. Федоров // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57. № 12. — С. 1623–1634.

О ПРОБЛЕМЕ СОХРАНЕНИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСНЫХ СТРАТЕГИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

Т.Н. Фоменко (Москва, МГУ)
tn-fomenko@yandex.ru

Для параметрического семейства антагонистических игр с двумя игроками рассматривается проблема сохранения, при изменении параметра, существования равновесной стратегии. Этот вопрос рассматривается с точки зрения параметрической теории неподвижных точек многозначных отображений, в двух случаях. Первый из них - это ситуация, когда пространства допустимых стратегий игроков являются упорядоченными множествами. Второй случай - когда множества допустимых стратегий игроков являются метрическими пространствами. Используются некоторые недавние результаты, касающиеся проблемы сохранения существования неподвижной точки у параметрического семейства многозначных отображений, определенных на метрическом пространстве или на упорядоченном множестве.

В теории игр рассматриваются математические модели конфликтных ситуаций. В случае антагонистической игры с двумя игроками, пусть X, Y — множества допустимых стратегий Игрока 1 и Игрока 2. Пусть на произведении $X \times Y$ задана игровая функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Тогда, при выборе Игроком 1 стратегии $x \in X$, а Игроком 2 — стратегии $y \in Y$, выигрыш Игрока 1 будет равен $f(x, y)$, а выигрыш Игрока 2 будет равен $-f(x, y)$. Игровые правила

Игроков 1 и 2 могут быть математически описаны как многозначные отображения $A : Y \rightrightarrows X$ и $B : X \rightrightarrows Y$ соответственно, где:

$$B(x) = \{y \in Y | f(x, y) = \min_{\tilde{y} \in Y} f(x, \tilde{y})\}; \tag{1}$$

$$A(y) = \{x \in X | f(x, y) = \max_{\tilde{x} \in X} f(\tilde{x}, y)\}. \tag{2}$$

Определени 1. В описанной ситуации пара (x_0, y_0) называется *равновесной стратегией (данной игры)*, если выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} x_0 \in A(y_0); \\ y_0 \in B(x_0). \end{cases} \tag{3}$$

Отсюда следует, что стратегия (x_0, y_0) является равновесной тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой многозначного (игрового) отображения $\mathcal{P} = A \times B : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$, где

$$\mathcal{P}(x, y) = (A \times B)(x, y) := A(y) \times B(x). \tag{4}$$

В докладе представлены следующие основные результаты.

Если заданы частично упорядоченные множества стратегий игроков $(X, \leqslant_X)$, $(Y, \leqslant_Y)$, семейство игровых отображений $\{\mathcal{P}_k : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$ с дискретным параметром $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, и известно, что у игрового отображения $\mathcal{P}_1$ есть неподвижная точка (x_0, y_0) (то есть равновесная стратегия игры с параметром $k = 1$), то найдены достаточные условия для существования равновесной стратегии в любой из игр данного параметрического семейства с дискретным параметром. В доказательстве используются результаты работы [1].

Если множества стратегий игроков являются метрическими пространствами $(X, d), (Y, \mu)$, то для семейства игровых отображений $\{\mathcal{P}_t\}$ с непрерывным параметром $t \in [0; 1]$, такого, что в игре с параметром $t = 0$ имеется равновесная стратегия (x_0, y_0), найдены достаточные условия для существования равновесных стратегий у всех игр данного семейства, причем равновесные стратегии имеются в некоторой заданной окрестности равновесной стратегии (x_0, y_0). Доказательство основано на результатах работы [2].

Литература

1. Подоприхин Д.А. Многозначные гомотопии в упорядоченном множестве, теоремы о неподвижных точках и совпадениях отображений, применения в теории игр / Д.А. Подоприхин, Т.Н. Фоменко //Матем. заметки — 2019. —Т. 106, № 4. —С. 565–577.

(Перевод: Podoprikhin D.A. Multivalued Homotopy on an Ordered Set, Fixed and Coincidence Points of Mappings, and Applications in Game Theory /D.A. Podoprikhin, T.N. Fomenko//Math. Notes, Pleiades Publishing — 2019. — V. 106, № 4. — C. 591–601.)

2. Захарян Ю.Н. Сохранение существования нулей у семейства многозначных функционалов и некоторые следствия /Ю.Н. Захарян, Т.Н. Фоменко //Матем. заметки. — 2020. — Т. 108, № 6. — С. 837–850.

(Перевод: Zakharyan Yu. N. Preservation of the Existence of Zeros in a Family of Set-Valued Functionals and Some Consequences / Yu.N. Zakharyan, T.N. Fomenko// Math. Notes, Pleiades Publishing — 2020. — V. 108, № 6 — P. 802–813.)

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЯХ ОПЕРАТОРНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р.Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I — тождественный оператор в E; $L(E)$ — полная нормированная алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $GL(E) = \left\{A \in L(E) : \exists A^{-1} \in L(E)\right\}$.

Рассмотрим семейство операторных функций

$$S\left(L(E), L(E)\right) = \left\{f | L(E) \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq L(E)\right\}. \qquad (1)$$

Известные операторные функции e^X, $\sin X$, $\cos X$, $\operatorname{sh} X$, $\operatorname{ch} X$, определяемые суммами соответствующих степенных рядов (см. [1, с. 127, 132]), принадлежат семейству (1). Для каждой из них $D(f) = L(E)$. На операторные тригонометрические функции $\sin X, \cos X$ переносятся основные формулы для скалярных тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$. Например (см. [2]), справедливы основное операторное тригонометрическое тождество $\sin^2 X + \cos^2 X = I$, $\forall X \in L(E)$; формулы сложения: для любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию $X_1X_2 = X_2X_1$, справедливы равенства $\sin\left(X_1 + X_2\right) = \sin X_1 \cos X_2 + \cos X_1 \sin X_2$, $\cos\left(X_1 + X_2\right) = \cos X_1 \cos X_2 - \sin X_1 \sin X_2$, из которых следуют формулы преобразования произведения операторных тригонометрических функций в сумму, формулы преобразования суммы и разности одноименных операторных тригонометрических функций в произведение.

По определению, $\operatorname{tg} X = \sin X \cos^{-1} X$, $\operatorname{ctg} X = \cos X \sin^{-1} X$, $\sec X = \cos^{-1} X$, $\operatorname{cosec} X = \sin^{-1} X$, $\operatorname{th} X = \operatorname{sh} X \operatorname{ch}^{-1} X$, $\operatorname{cth} X = \operatorname{ch} X \operatorname{sh}^{-1} X$, $\operatorname{sech} X = \operatorname{ch}^{-1} X$, $\operatorname{cosech} X = \operatorname{sh}^{-1} X$, где $\cos^{-1} X = (\cos X)^{-1}$, $\sin^{-1} X = (\sin X)^{-1}$, $\operatorname{ch}^{-1} X = (\operatorname{ch} X)^{-1}$, $\operatorname{sh}^{-1} X = (\operatorname{sh} X)^{-1}$— обратные операторы соответственно для операторов $\cos X$, $\sin X$, $\operatorname{ch} X$, $\operatorname{sh} X$. Для этих операторных функций $D(\operatorname{tg} X) = \{X \in L(E) | \cos X \in GL(E)\}$, $D(\operatorname{ctg} X) = \{X \in L(E) | \sin X \in GL(E)\}$, $D(\sec X) = D(\operatorname{tg} X)$, $D\left(\operatorname{cosec} X\right) = D(\operatorname{ctg} X)$, $D(\operatorname{th} X) =$

$\{X \in L(E) | \operatorname{ch} X \in GL(E)\}$, $D(\operatorname{cth} X) = \{X \in L(E) | \operatorname{sh} X \in GL(E)\}$, $D(\operatorname{sech} X) = D(\operatorname{th} X)$, $D(\operatorname{cosech} X) = D(\operatorname{cth} X)$. Каждая из перечисленных операторных функций принадлежит семейству (1). Заметим, что $\operatorname{tg} X = \sin X \sec X$, $\operatorname{ctg} X = \cos X \operatorname{cosec} X$, $\operatorname{th} X = \operatorname{sh} X \operatorname{sech} X$, $\operatorname{cth} X = \operatorname{ch} X \operatorname{cosech} X$.

Операторные тригонометрические функции $\sin X$, $\cos X$, $\operatorname{tg} X$, $\operatorname{ctg} X$ периодичны: для любого $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, справедливы равенства $\sin(X + 2\pi m I) = \sin X$, $\cos(X + 2\pi m I) = \cos X$, $\operatorname{tg}(X + \pi m I) = \operatorname{tg} X$, $\operatorname{ctg}(X + \pi m I) = \operatorname{ctg} X$. На эти функции переносятся формулы приведения для скалярных тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$: $\sin(X + \pi I) = -\sin X$, $\cos(X + \pi I) = -\cos X$, $\sin\left(X + \frac{\pi}{2} I\right) = \cos X$, $\cos\left(X + \frac{\pi}{2} I\right) = -\sin X$, $\operatorname{tg}\left(X + \frac{\pi}{2} I\right) = -\operatorname{ctg} X$, $\operatorname{ctg}\left(X + \frac{\pi}{2} I\right) = -\operatorname{tg} X$.

Справедливы соотношения $\operatorname{tg} X \operatorname{ctg} X = I$, $\operatorname{tg} X = \operatorname{ctg}^{-1} X$, $\operatorname{ctg} X = \operatorname{tg}^{-1} X$, $\operatorname{th} X \operatorname{cth} X = I$, $\operatorname{th} X = \operatorname{cth}^{-1} X$, $\operatorname{cth} X = \operatorname{th}^{-1} X$, где $\operatorname{ctg}^{-1} X = (\operatorname{ctg} X)^{-1}$, $\operatorname{tg}^{-1} X = (\operatorname{tg} X)^{-1}$, $\operatorname{cth}^{-1} X = (\operatorname{cth} X)^{-1}$, $\operatorname{th}^{-1} X = (\operatorname{th} X)^{-1}$— обратные операторы соответственно для операторов $\operatorname{ctg} X$, $\operatorname{tg} X$, $\operatorname{cth} X$, $\operatorname{th} X$.

На операторные гиперболические функции $\operatorname{sh} X$, $\operatorname{ch} X$ переносятся основные формулы для скалярных гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Например, справедливы основное операторное гиперболическое тождество $\operatorname{ch}^2 X - \operatorname{sh}^2 X = I$, $\forall X \in L(E)$; формулы сложения: для любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию $X_1 X_2 = X_2 X_1$, справедливы равенства $\operatorname{sh}(X_1 + X_2) = \operatorname{sh} X_1 \operatorname{ch} X_2 + \operatorname{ch} X_1 \operatorname{sh} X_2$, $\operatorname{ch}(X_1 + X_2) = \operatorname{ch} X_1 \operatorname{ch} X_2 + \operatorname{sh} X_1 \operatorname{sh} X_2$, из которых следуют формулы преобразования произведения операторных гиперболических функций в сумму, формулы преобразования суммы и разности одноименных операторных гиперболических функций в произведение.

Литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

2. Фомин В.И. Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции комплексного операторного аргумента / В.И. Фомин // Вестник российских университетов. Математика. — 2019. — Т.24, №127. — С. 324 — 332.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ[1]

Б.Н. Хабибуллин, Р.Р. Мурясов (Уфа, БашГУ)

khabib-bulat@mail.ru, romrumur@yandex.ru

Распределению различных комплексных точек $Z := (z_j)_{j=1,2,\dots}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ сопоставляем экспоненциальную систему $\operatorname{Exp}^Z := \Bigl\{ z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} e^{z_j z} \Bigm| j = 1.2.\dots \Bigr\}$. Система Exp^Z полна в пространстве $\operatorname{Hol}(D)$ голоморфных функций в области $D \subset \mathbb{C}$, снабжённом топологией равномерной сходимости на компактах, если замыкание её линейной оболочки в $\operatorname{Hol}(D)$ совпадает с $\operatorname{Hol}(D)$. Далее рассматриваем распределения точек Z лишь конечной верхней плотности, т.е. с $\sum\limits_{|z_j|\leqslant r} 1 \underset{0<r\to\infty}{=} O(r)$, поскольку в противном случае система Exp^Z полна в $\operatorname{Hol}(D)$ для любой области D. Предлагаются исчерпывающие критерии полноты системы Exp^Z в пространстве $\operatorname{Hol}(D)$ для выпуклых областей D, существенно развивающие [1] и [2; 3.2–3.3] в случае экспоненциальных систем. Первый из них охватывает любые неограниченные выпуклые области D. В этом случае достаточно использовать лишь одну геометрическую характеристику для D, а именно: её ширину в направлении.

Критерий полноты в случае неограниченной выпуклой области D. *Очевидно, в таком случае всегда существуют направление $\theta \in [0, 2\pi)$ и точка $z_0 \in \mathbb{C}$, для которых луч $\bigl\{ z_0 + se^{i\theta} \bigm| s \geqslant 0 \bigr\}$ лежит в D. Система Exp^Z полна в $\operatorname{Hol}(D)$, если и только если*

$$\overbrace{\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \limsup_{n\to\infty} \max\Biggl\{ \sum_{e^n<|z_j|\leqslant e^{n+m}} \operatorname{Re}^+ \frac{e^{i\theta}}{z_j}, \sum_{e^n<|z_j|\leqslant e^{n+m}} \operatorname{Re}^+ \frac{-e^{i\theta}}{z_j} \Biggr\}}^{\textit{логарифмическая блок-плотность распределения точек } Z \textit{ в направлении } \theta}$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sup\Bigl\{ \bigl|\operatorname{Im}(z' - z'')e^{-i\theta}\bigr| \Bigm| z' \in D, z'' \in D \Bigr\}}_{\textit{ширина области } D \textit{ в направлении } \theta},$$

где n, m — натуральные числа, а $\operatorname{Re}^+ := \max\{0, \operatorname{Re}\}$ выделяет положительную часть действительной части числа.

В случае ограниченной выпуклой области для её полного геометрического описания с точностью до сдвига используются смешанные площади [3]. Следующий критерий охватывает произвольные ограниченные выпуклые области D.

[1] Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00026, https://rscf.ru/project/22-21-00026/

Критерий полноты в случае ограниченной выпуклой области D**.** *Система* Exp^Z *полна в пространстве* $\operatorname{Hol}(D)$*, если и только если существуют число* $p \in [0,1)$*, положительная дважды дифференцируемая и интегрируемая на положительной полуоси* $(0,+\infty)$ *функция* $g \not\equiv 0$ *с* $\lim\limits_{0<r\to\infty} g(r) = 0$*,* $\lim\limits_{0<r\to 0} \dfrac{g(r)}{-\ln r} < +\infty$*,* $r^2 g''(r) + r g'(r) \underset{r>0}{\geqslant} p^2 g(r)$*, а также положительная дважды дифференцируемая* 2π*-периодическая функция* $\mathrm{s} \not\equiv 0$ *на вещественной оси* $\mathbb{R}$ *с* $\mathrm{s}''(\theta) + p^2\mathrm{s}(\theta) \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\geqslant} 0$*, для которых*

$$\limsup_{0<R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_j g\Bigl(\frac{|z_j|}{R}\Bigr) s(\arg z_j)$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} g(r)\,\mathrm{d}r \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{s}_D(\theta)\bigl(\mathrm{s}''(\theta) + \mathrm{s}(\theta)\bigr)\,\mathrm{d}\theta\right)}_{\text{смешанная площадь } D \text{ и } T},$$

где $\mathrm{s}_D(\theta) \underset{\theta\in\mathbb{R}}{:=} \sup\limits_{z\in D} \operatorname{Re} z e^{-i\theta}$ *— опорная функция области* D*,* $T \subset \mathbb{C}$ *— выпуклая область с опорной функцией* $\mathrm{s}_T = \mathrm{s}$*, а* $\mathrm{s}''(\theta) + \mathrm{s}(\theta)$ *— радиус кривизны границы* ∂T *области* T *в точке касания замыкания области* T *опорной прямой, ортогональной направлению* θ*.*

Литература

1. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций / Б.Н. Хабибуллин // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 4. — С. 603–616; Math. Notes — 1999. — vol. 66, no. 4. — p. 495–506.

2. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б.Н. Хабибуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — xvi+176 с. `http://www.researchgate.net/publication/271841461`

3. Хабибуллин Б.Н. Теорема Хелли и сдвиги множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции / Б.Н. Хабибуллин // Уфимск. матем. журн. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 125–138; Ufa Math. Journal — 2014. — vol. 6, no. 4. — p. 122–134.

О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ МЕТОДОМ ВОРОНОГО–НЕРЛУНДА

Ю.Х. Хасанов, М.М. Махамадиева (Душанбе, РТСУ)
yukhas60@mail.ru

Пусть измеримая и интегрируемая по Лебегу периода 2π функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \;\; b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Определение 1. *Линейным оператором, или $W_n(W,p_n)$–средними Вороного называются средние вида*

$$W_n(W,p_n) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} S_k(f;x), \tag{1}$$

где

$$p_0 > 0, \;\; p_k \geqslant 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots), \;\; P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n,$$

$S_k(f;x)$*— частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$. Средние (W,p_n), определенные формулой (1), называют суммирования рядов методом Вороного (Вороного–Нёрлунда) [1].*

Хилл и Тамаркин установили следующее утверждение ([2], с.187)

Теорема А. *Пусть $p_\nu > p_(\nu+1) \to 0$, $P_\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$. Для (W,p_n) суммируемости ряд Фурье функции $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы последовательность чисел $\{\frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{P_\nu}{\nu}\}$ была ограниченной.*

Из теоремы А вытекает, что для непрерывной периода 2π функции $f(x)$ равномерно по x имеет место

$$P(f;x;W_n) = |f(x) - W_n(f;x;p_n)| \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Наряду с теоремой А приводим утверждение, в котором для каждого $n > 1$ содержится оценка сверху величины $P(f;x;W_n)$ через последовательность наилучших приближений функции в равномерной метрике.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная, периодическая периода 2π функция. Тогда имеет место следующая оценка*

$$P(f;x;W_n) \leqslant \frac{C}{p_n} \sum_{\nu=0}^{m+1} \left\{ 2^\nu \sum_{k=2^\nu-1}^{2^{\nu+1}} p_{n-k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} E_{2^\nu-1}(f),$$

где

$$E_k(f) = \max_x |f(x) - T_k(x)|,$$

$T_k(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше k, осуществляющий наилучшее приближение функции $f(x)$ в равномерной метрике $2^m \leqslant n \leqslant 2^{m+1}$, C — независимая константа.

Далее рассматриваются вопросы абсолютной суммируемости степени p сопряженных рядов Фурье методом Вороного-Нерлунда. Сначала напомним, что числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ называют суммируемым методом Вороного-Нерлунда к числу S или (W_n, p_n)–суммируем к S, если

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n-k} U_k = S, \;\; P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k,$$

где $\{p_n\}$ — последовательность вещественных или комплексных чисел [1]. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ будем называть абсолютно суммируемым степени $p \geqslant 1$ методом Вороного-Нерлунда или $|W_n, p_n|_p$–суммируемым, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} |t_n - t_{n-1}|^p < \infty.$$

Заметим, что при $p = 1$ получаем известный $|W_n, p_n|$–метод суммирования.

Пусть $f(t)$ — 2π–периодическая функция, интегрируема в смысле Лебега на $(-\pi, \pi)$ и пусть ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t),$$

а сопряженным рядом является

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nt - a_n \sin nt = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t).$$

Введем в рассмотрение следующие обозначения

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)], \;\; R_n = \frac{(n+1)p_n}{P_n}, \;\; \tau = [\frac{1}{t}].$$

Теорема 2. *Если*

$$\int_0^x \frac{|\varphi'(t)|^p}{t^{p-1}} dt < \infty,$$

то сопряженный ряд Фурье функции $f(t)$ при $t = x|W_n, p_n|_p$–суммируем ($p \geqslant 1$), где неотрицательная последовательность $\{p_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_n - R_{n+1}| = O(1), \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p_k}{n^{1/p} P_{n-1}} = O(1).$$

Литература

1. Вороной Г.Ф. Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда / Г.Ф. Вороной // Дневник XI–го съезда русских естествоиспытателей и врачей. — С.-Петербург, 1902. — С. 60–61.

2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды /А. Зигмунд. — М.–Л. : Редакция технико–теоретической литературы, 1939. — 323 с.

О МЕТОДЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ЗАДАЧЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В.Л. Хацкевич, О.А. Махинова

(Воронеж, ВУНЦ ВВС «ВВА»)

vlkhats@mail.ru

В данной работе рассматривается ситуация, когда на вход некоторого устройства A поступает непрерывный случайный сигнал $\eta(t)$, а на выходе наблюдается непрерывный случайный сигнал $\xi(t)$.

Устройство А называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются случайные сигналы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве случайных величин с конечным вторым моментом

$$a_n\eta^{(n)}(t) + a_{n-1}\eta^{(n-1)}(t) + ... + a_1\eta'(t) + a_0\eta(t)$$
$$= b_k\xi^{(k)}(t) + b_{k-1}\xi^{(k-1)}(t) + ... + b_1\xi'(t) + b_0\xi(t) \equiv f(t) \qquad (1)$$

Здесь коэффициенты a_i $(i = 0, ..., n)$ и b_i $(i = 0, ..., k)$ — постоянные числа.

Известный [1, гл. 8] подход при изучении динамической системы (1) предполагает стационарность (в широком смысле) входных и выходных случайных сигналов и использует частотную характеристику динамической системы (1). Он связан с прямым и обратным преобразованием Фурье случайных процессов. Наш подход, использующий метод функции Грина, не предполагает стационарности входного и выходного случайных сигналов.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + ... + a_1 x' + a_0 x = h(t). \tag{2}$$

Имеет место

Лемма 1 ([2], гл. I, §8). *Пусть корни характеристического уравнения $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей оси функции $h(t)$ уравнение (2) имеет ограниченное на всей оси решение, причем единственное. Оно дается формулой*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f(s) ds, \tag{3}$$

где $G(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).

Замечание 1. Пусть в условиях леммы 1 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуполоскости ($Re\lambda_i < 0$ $i = 1, \dots, n$). Тогда ограниченное решение уравнения (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Связь между математическими ожиданиями входного и выходного случайных сигналов характеризует

Теорема 1. *Пусть входной случайный процесс $f(t)$ непрерывен и ограничен на всей числовой оси, а корни характеристического уравнения $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Тогда математическое ожидание $M\eta(t)$ случайного процесса на выходе динамической системы (1) представимо в виде*

$$M\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) Mf(s) ds, \tag{4}$$

где G — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 на вход поступает «квазистационарный» сигнал, т.е. $M\xi(t) = m_\xi = const$. Тогда на выходе также будет «квазистационарный» сигнал, причем его математическое ожидание $M\eta(t) = m_\eta = \frac{b_0}{a_0} m_\xi$.

Связь между корреляционной функцией $K_\eta(t_1, t_2)$ случайного сигнала на выходе динамической системы (1) и корреляционной функции $K_\xi(t_1, t_2)$ случайного сигнала на входе характеризует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны ($Re\lambda_i < 0$ $i = 1, \dots, n$). Тогда корреляци-*

онная функция $K_\eta(t_1,t_2)$ случайного сигнала $\eta(t)$ на выходе динамической системы (1) определяется формулой

$$K_\eta(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}G(t_1-\tau_1)G(t_2-\tau_2)K_f(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \qquad (5)$$

где $K_f(\tau_1,\tau_2)$ — корреляционная функция входного сигнала $f(t)=\sum_{i=1}^{n}b_i\xi^{(i)}(t)$, а G — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).

Пример 1. На вход интегрирующей RC-цепочки, описываемой дифференциальным уравнением

$$\eta'(t)+\beta\eta(t)=\beta\xi(t), \beta=\frac{1}{RC}>0 \qquad (6)$$

поступает непрерывный случайный ограниченный на всей оси сигнал $\xi(t)$ с математическим ожиданием $M\xi(t)$.

Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (6) имеет вид

$$G_1(t)=\begin{cases}e^{-\beta t} & \text{при } t>0\\ 0 & \text{при } t<0\end{cases}$$

Тогда математическое ожидание $M\eta(t)$ на выходе динамической системы (6), согласно теореме 1 представляется формулой

$$M\eta(t)=\beta\int_{-\infty}^{t}e^{-\beta(t-s)}M\xi(s)ds.$$

Корреляционная функция $K_\eta(t_1,t_2)$ на выходе динамической системы (6) связана с корреляционной функцией $K_\xi(t_1,t_2)$ на входе согласно теореме 2 формулой

$$K_\eta(t_1,t_2)=\beta^2e^{-\beta(t_1+t_2)}\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}e^{\beta(t_1+t_2)}K_\xi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Пример 2. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\eta''(t)+4\eta'(t)+3\eta(t)=\xi(t) \qquad (7)$$

поступает непрерывный случайный ограниченный на всей оси сигнал $\xi(t)$. Укажем характеристики выходного случайного сигнала $\eta(t)$.

Заметим, что корни характеристического уравнения $\lambda^2+4\lambda+3=0$ имеют вид $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-1$. Тогда в соответствии с теоремой 1

$$M\eta(t)=\int_{-\infty}^{t}G_2(t-s)M\xi(s)ds,$$

где функция Грина G_2 задачи об ограниченных решениях имеет вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Корреляционные функции входного и выходного случайных сигналов динамической системы (7) в соответствии с теоремой 2 связаны соотношением

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} G_2(t_1 - \tau_1) G_2(t_2 - \tau_2) K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и их инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — М.: Кнорус, 2016. — 439 с.

2. Красносельский М.А. Нелинейные почти периодические колебания / М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов. — М.: Наука, 1970. — 351 с.

Обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида и ее приложения

А.П. Хромов (Саратов, СГУ)

KhromovAP@info.sgu.ru

Используя операцию интегрирования расходящегося ряда формального решения, полученного по методу разделения переменных, приводятся результаты по обобщенной смешанной задаче (однородной и неоднородной) для волнового уравнения. Предлагаемое понятие обобщенной смешанной задачи является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи.

Впервые такое понятие обобщенной задачи появилось в [1]. Внешний вид ее такой же, как и у исходной смешанной задачи и характеризуется тем, что в формальном решении ее по методу Фурье потенциал и начальные данные считаются произвольными суммируемыми функциями, а возмущение в случае неоднородной задачи — произвольной локально суммируемой функцией. Ряд формального решения может быть и расходящимся. Расходящийся ряд рассматривается в понимании Л. Эйлера [2], основоположника теории суммирования расходящихся рядов. Найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти сумму ряда формального решения.

В докладе основное внимание уделяется следующей обобщенной смешанной задаче простейшего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0 \tag{3}$$

в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$. Ее удается решить, привлекая аксиомы о расходящихся рядах из [3], используя следующее правило интегрирования расходящегося ряда:

$$\int \sum = \sum \int, \tag{4}$$

где $\int$ — определенный интеграл, и опираясь на известные результаты, относящиеся к почленному интегрированию тригонометрического ряда Фурье по синусам.

Затем, показывается как полученный результат помогает дать решение и обобщенной смешанной задачи для неоднородного уравнения.

Наконец, как приложение к вышеприведенным результатам, рассматривается смешанная задача для волнового уравнения с ненулевым потенциалом. В ней дифференциальное уравнение понимается чисто формально, но сама смешанная задача уже не является обобщенной: вместо формального решения по методу разделения переменных приходим к интегральному уравнению, которое решается методом последовательных подстановок. Это вносит существенное упрощение в рассуждения.

Более подробное изложение результатов работы представлено в [4].

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 4. — С. 215–238.

2. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. — М. Л.: ГИТТЛ, 1949. — 580 с.

3. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М. : Изд-во иностр. лит., 1951. — 504 с.

4. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения. — Саратов : Саратовский университет, 2022. — Вып. 21. — С. 319–324.

О МЕТОДАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ

Г.В. Хромова (Саратов, СГУ)
KhromovaGV@info.sgu.ru

В общей схеме построения методов регуляризации некорректно поставленных задач и нахождения суммы расходящегося ряда методом А.П.Хромова [1, 2] просматриваются некоторые аналогии.

Поясним это на задаче восстановления производной функции, заданной с погрешностью в среднеквадратичной метрике.

I. Общая схема метода решения задачи восстановления производной.

Пусть вместо $f(x) \in C^1[0,1]$ задана $f_\delta(x)$ такая, что $\|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[0,1]} \leqslant \delta$. Требуется по $f_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $f'(x)$. Наши действия в этом случае следующие [3]:

1. Сначала строится семейство операторов , зависящих от параметра α и таких, что при применении их к точной функции $f(x)$ они дают равномерные приближения к $f'(x)$. При этом операторы должны быть такими, чтобы их можно было применять и к $f_\delta(x)$. Предлагается построить такое семейство на базе следующих операторов с дельтаобразными ядрами [4]:

$$T_\alpha^0 f = \begin{cases} T_{\alpha 2}^0 f, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1}^0 f, x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1.1}$$

(такая запись означает, что для нас несущественно, какое именно значение принимает функция $T_\alpha^0 f$ в точке $x = \frac{1}{2}$). Здесь

$$T_{\alpha 1}^0 f = \frac{6}{\alpha^3} \int\limits_{x-\alpha}^{x} (x-t)(\alpha - (x-t)) f(t) dt,$$

$$T_{\alpha 2}^0 f = \frac{6}{\alpha^3} \int\limits_{x}^{x+\alpha} (t-x)(\alpha - (t-x)) f(t) dt.$$

Это семейство операторов с разрывной областью значений. Считаем, что эти значения являются элементами из $L_\infty[0,1]$ с нормой

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{ \|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]} \right\}.$$

Конструкция (1.1) вызвана необходимостью получить равномерные приближения на всём отрезке $[0,1]$ в то время как операторы $T_{\alpha 1}^0$ и $T_{\alpha 2}^0$, каждый по отдельности, такой возможности не дают.

Теорема 1 [4]. *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ имеет место сходимость:*
$$\left\|T_\alpha^0 f - f(x)\right\|_{L_\infty} \to 0, \quad \textit{при } \alpha \to 0.$$

Из операторов T_α^0 построим искомое семейство операторов T_α^1:
$$T_\alpha^1 f = \begin{cases} T_{\alpha 2}^1 f, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1}^1 f, x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

где
$$T_{\alpha 1}^1 f = \frac{6}{\alpha^3} \int\limits_{x-\alpha}^{x} \frac{d}{dx} \left[(x-t)(\alpha - (x-t))\right] f(t) dt,$$
$$T_{\alpha 2}^1 f = \frac{6}{\alpha^3} \int\limits_{x}^{x+\alpha} \frac{d}{dx} \left[(t-x)(\alpha - (t-x))\right] f(t) dt.$$

Теорема 2 [4]. *Для любой $f(x) \in C^1[0,1]$ выполняется сходимость:*
$$\left\|T_\alpha^1 f - f'(x)\right\|_{L_\infty} \to 0, \quad \textit{при } \alpha \to 0.$$
Эта сходимость имеет место в силу того, что
$$T_\alpha^1 f = T_\alpha^0 f', \tag{2.1}$$
и следует из теоремы 1.

2. Применим оператор T_α^1 к недифференцируемой функции $f_\delta(x)$. Теперь равенство (2.1) не имеет места, и о поведении последовательности функций $\left\{T_\alpha^1 f_\delta\right\}$ мы ничего сказать не можем. Тогда мы вводим ограничения на параметр α — считаем его согласованным с погрешностью δ так, чтобы $\alpha(\delta) \to 0$ и $\left\|T_{\alpha(\delta)}^1\right\|_{L_2 \to L_\infty} \delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Приходим к теореме.

Теорема 3. *Если $\alpha = \alpha(\delta)$ так, что $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta\left(\alpha(\delta)\right)^{-\frac{3}{2}} \to 0$ при $\delta \to 0$, то $\left\|T_{\alpha(\delta)}^1 f_\delta - f'\right\|_{L_\infty} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство вытекает из оценки
$$\left\|T_\alpha^1 f_\delta - f'\right\|_{L_\infty} \leqslant \left\|T_\alpha^1\right\|_{L_2 \to L_\infty} \delta + \left\|T_\alpha^1 f - f'\right\|_{L_\infty} \tag{3.1}$$
и равенства $\left\|T_\alpha^1\right\|_{L_2 \to L_\infty} = 2\sqrt{3}\alpha^{-\frac{3}{2}}$.

3. При нахождении решения поставленной задачи мы применяем операторы T_α^1 к функции$f_\delta(x)$. Фактически это означает, что мы считаем в данном случае возможным проводить операцию дифференцирования под знаком интеграла, хотя функция $f_\delta(x)$ может быть не непрерывной.

II. Общая схема нахождения суммы расходящегося ряда методом А.П. Хромова.

1. А.П. Хромов рассматривает смешанную задачу

$$\begin{gathered} u_{tt} = u_{xx},\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Если $\varphi(x)$ — гладкая и такая, что решение $u(x,t)$ задачи (1.2) можно найти методом Фурье, то оно представляется рядом

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x \cos n\pi t. \tag{2.2}$$

2. Рассмотрим ряд (2.2) в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$ (его слагаемые имеют смысл). Он может быть расходящимся, и А.П. Хромов решает задачу о нахождении его суммы в понимании Эйлера [5]. Эту сумму он считает решением так называемой обобщенной смешанной задачи, где система (1.2) понимается чисто формально.

Представляя ряд (2.2) в виде суммы двух рядов, А.П. сводит дело к нахождению суммы одного тригонометрического ряда Фурье на отрезке [0,1]:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x. \tag{3.2}$$

С этой целью он вводит дополнительную аксиому для расходящихся рядов

$$\int\sum = \sum\int, \tag{4.2}$$

где $\int$ — определённый интеграл.

Обозначая предполагаемую сумму ряда (3.2) через $g(x)$, применяя аксиому (4.2) с использованием оператора интегрирования и привлекая известную теорему о сходимости ряда, стоящего в правой части (4.2), получаем уравнение для определения $g(x)$

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \varphi(t)dt, \tag{5.2}$$

откуда $g(x) = \varphi(x)$ п.в.

Продолжив $g(x)$ нечётно, 2–периодически на всю вещественную ось, наконец, получаем сумму ряда (2.2) — решение обобщённой смешанной задачи (1.2).

3. Итак, при нахождении суммы $g(x)$ мы сначала проводим операцию сглаживания с помощью (4.2), получаем (5.2), а затем дифференцируем (5.2), т.е. производим действия, схожие с теми, которые выполняются для функции $f_\delta(x)$.

Таким образом, аксиомой (4.2) мы фактически вводим операцию сглаживания расходящегося ряда (т.е. его предполагаемой суммы) и определяем эту операцию как операцию сглаживания каждого слагаемого.

Отметим, что на основании (5.2) имеет место следующее утверждение:

Сумма по Коши ряда Фурье со сглаженными слагаемыми равна сглаженной сумме по Эйлеру самого ряда Фурье.

III. Сравнение схем в п. I и п. II.

При конструировании методов, изложенных в п.п. I и II мы выполняем следующие аналогичные действия:

а) берём исходные данные: в п. I — $f_\delta(x)$, в п. II — $\varphi(x) \in L[0,1]$;

б) сглаживаем их: в п. I с помощью операторов T^0_α, в п. II — с помощью оператора интегрирования;

в) в п. I дифференцируем (согласно п. 3) сглаженную функцию $T^0_\alpha f_\delta$, в п. II — сглаженные функции в левой и правой части (5.2);

г) для получения решения привлекаем дополнительную информацию: в п. I (для выбора $\alpha = \alpha(\delta)$)— оценку (3.1), в п. II (для выбора аксиомы (4.2)) — теорему о сходимости ряда со сглаженными слагаемыми.

Замечание 1. Если в п. I дополнительное условие $\alpha = \alpha(\delta)$ дает нам нужную сходимость, то в п. II аксиома (4.2) дает уравнение (5.2) для определения суммы $g(x)$. Оно аналогично уравнению

$$S = 1 + xS \tag{6.2}$$

для ряда $S = 1 + x + x^2 + \ldots$ из [6], где (6.2) получается при использовании аксиом для расходящихся рядов:

$$\sum_1^\infty a_n = a_1 + \sum_2^\infty a_n, \ \sum_1^\infty \alpha a_n = \alpha \sum_1^\infty a_n$$

Замечание 2. Если бы мы сделали акцент на связи производной сглаженной функции с производной самой функции, т.е. на связи $T^1_\alpha f$ с f', и расширили понятие этой связи на случай, когда первая из них существует, а вторая — нет, то функции $T^1_\alpha f_\delta$ были бы в связке с f'_δ, где f'_δ понималась бы чисто формально, выступала бы в роли «метки» указанной выше связи. Тут мы имели бы некоторый аналог с понятием обобщённой смешанной задачи.

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача / А.П. Хромов // Математика. Механика: сб.науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2021. —Вып. 23. — С. 63–67.

2. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные

проблемы теории функций и их приложения. — Саратов : Саратовский университет [Издание]-, 2022. —Вып. 21. — С. 319–324. URL:https://sgu.ru/node/184778 (дата обращения 15.03.2022).

3. Хромова Г.В. Об операторах с разрывной областью значений и их приложении / Г.В. Хромова // Итоги науки и техники. Серия. Современная математика и её приложение. Тематические обзоры. — Москва, ВИНИТИ РАН, — 2021. — Т. 200, ч. 2. — С. 57–64.

4. Хромова Г.В. Об одном семействе операторов с разрывной областью значений / Г.В. Хромова // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 20-й международ. Сарат. зимней школы (Саратов, 28 янв.—1 февр. 2020г.) — Саратов : Изд-во СГУ, 2020. —С. 440–442.

5. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. — Москва-Ленинград : ГИТТЛ, 1949. — 580 с.

6. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения , связанные с аналогами геометрической прогрессии / А.П. Хромов // Современные методы теории краевых задач : материалы междун. конференции Воронеж. весен. мат. школы «Понтрягинские чтения-XXV» Воронеж, 3-9 мая 2019 . — Воронеж, Изд. дом ВГУ, 2019. — С. 291–300.

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ф.Г. Хуштова (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
khushtova@yandex.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D^{\alpha}_{0y} u(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где D^{α}_{0y} — дробная производная в смысле Римана—Лиувилля порядка $0 < \alpha \leqslant 1$ [1, с. 9], [2, с. 14].

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $y^{1-\alpha}u$, $y^{1-\alpha}u_x \in C(\bar{\Omega})$, u_{xx}, $D^{\alpha}_{0y}u \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω.

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y} u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \qquad (2)$$

$$u_x(0, y) = hu(0, y) - \nu(y), \quad 0 < y < T, \qquad (3)$$

где $\varphi(x)$, $\nu(y)$ — *заданные функции,* $h = const$.

Далее в работе $f(y)*g(y)$ — свёртка Лапласа, $\varphi(\rho,\delta;z)$ — функция Райта [3], $E_{\rho,\mu}(z)$ — функция типа Миттаг-Леффлера [4, с. 117].

Примем обозначения $\beta=\alpha/2$,

$$G(x,\xi,y)=\frac{y^{\beta-1}}{2}\left[\varphi\left(-\beta,\beta;-(x+\xi)y^{-\beta}\right)+\varphi\left(-\beta,\beta;-|x-\xi|y^{-\beta}\right)\right],$$

$$G_0(x,\xi,y)=y^{\beta-1}\varphi\left(-\beta,\beta;-(x+\xi)y^{-\beta}\right),$$

$$E(y)=y^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-hy^{\beta}\right),$$

$$\widetilde{G}(x,\xi,y)=G(x,\xi,y)-h\,G_0(x,\xi,y)*E(y).$$

Теорема 1. *Пусть* $y^{1-\alpha}\nu(y)\in C[0,T]$, $\varphi(x)\in C[0,\infty)$,

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)\exp\left(-\rho x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)=0,\quad \rho<(1-\beta)\left(\beta/T\right)^{\beta/(1-\beta)},$$

и выполняется условие согласования $\varphi'(0)=h\varphi(0)-\lim\limits_{y\to0}y^{1-\alpha}\nu(y)$. *Тогда функция*

$$u(x,y)=\int\limits_0^y\widetilde{G}(x,0,y-\eta)\,\nu(\eta)\,d\eta+\int\limits_0^\infty\widetilde{G}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

является решением задачи (1) – (3).

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи* (1) – (3), *удовлетворяющего для некоторого* $k>0$ *условию*

$$\lim_{x\to\infty}y^{1-\alpha}u(x,y)\exp\left(-kx^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)=0.$$

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.

3. Wright E.M. The generalized Bessel function of order greater than one / E.M. Wright // The Quarterly Journal of Mathematics. — 1940. — V. 11, № 1. — pp. 36–48.

4. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. — М. : Наука, 1966. — 672 с.

СПЛЕТАЮЩЕЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ ТИПА КАЛОДЖЕРО-МОЗЕРА-СЕЗЕРЛЕНДА НА МНОГООБРАЗИЯХ БЕТЕ-ДУНКЛА ВЕСА m

С.П. Хэкало (Коломна, ГСГУ)
khekalo@mail.ru

Through the thorns to Urania's (Через терни к Урании)

Дифференциально-разностные операторы Дункла имеют важное применение в теории интегрируемости дифференциальных операторов в частных производных. Например, они фактически генерируют квантовую алгебраически интегрируемую систему деформаций оператора Лапласа потенциалами Калоджеро-Мозера-Сезерленда на $\mathbb{R}^n$ (см., например, [1] и цитированную там литературу).

В этой работе анонсируется рациональное обобщение указанных операторов на специальных подмногообразиях в $\mathbb{R}^n$ (многообразиях Бете-Дункла веса m [2]).

Пусть $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и s_α, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, — отражение в $\mathbb{R}^n$:

$$s_\alpha x = x - 2\,\frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\,\alpha,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Действие оператора отражения на функциях — $s_\alpha f(x) = f(s_\alpha x)$.

Обозначим через $\mathcal{R}$ — систему корней в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_+$ — ее положительную часть; k_α — целочисленную функцию на $\mathcal{R}$, инвариантную относительно отражений: $k_{s_\beta\alpha} = k_\alpha,\ \forall\alpha,\beta \in \mathcal{R}$; $L_k(t)$ — вещественнозначную нечетную функцию на $\mathbb{R}$, зависящую от целочисленного параметра k.

Рациональный оператор Дункла-Дарбу [3,4] на $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla_\xi = \partial_\xi - \sum_{\alpha\in\mathcal{R}_+} (\alpha,\xi)\, L_{k_\alpha}((\alpha,x))\, s_\alpha,\ \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определение. Многообразием M^m_{BD} Бете-Дункла веса $m \in \mathbb{Z}_+$, ассоциированным с оператором Дункла-Дарбу, называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, таких что $\forall p = \overline{0,m}$ и $\forall(\xi_1,...,\xi_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ имеет место равенство

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}_+,\alpha\neq\beta} (\alpha,\beta)\, D^p_\xi[L_{k_\alpha}((\alpha,x))\, L_{k_\beta}((\beta,x))]\, s_\beta s_\alpha = 0,$$

где

$$D^p_\xi = \begin{cases} 1,\ p = 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{p} \partial_{\xi_i},\ p > 0. \end{cases}$$

Предложение 1. *Имеют место равенства*

$$\left[\nabla_\xi, \nabla_{\eta_1}\nabla_{\eta_2}...\nabla_{\eta_{m+1}}\right]\big|_{M^m_{BD}} = 0,\ \ \forall \xi, \eta_i \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1, m+1},\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Предложение 2. *Ограничение оператора Дункла-Лапласа на многообразие M^0_{BD} является деформацией оператора Лапласа потенциалами типа Калоджеро-Мозера-Сезерленда*

$$\mathcal{L}_{\{k_\alpha\}} := \sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{e_i}\Bigg|_{M^0_{BD}} = \Delta - \sum_{\alpha\in\mathcal{R}_+} (\alpha,\alpha)\left(L'_{k_\alpha}(t) + L^2_{k_\alpha}(t)s_\alpha\right)\, s_\alpha\big|_{t=(\alpha,x)}.$$

Гипотеза. *На многообразии Бете-Дункла веса $|\mathcal{R}_+|$ существует сплетающий дифференциально-разностный оператор $\mathcal{T}_{\{k_\alpha\}}$ такой, что*

$$\mathcal{T}_{\{k_\alpha\}}\,\mathcal{L}_{\{k_\alpha\}}\big|_{M^{|\mathcal{R}_+|}_{BD}} = \Delta\ \mathcal{T}_{\{k_\alpha\}}\big|_{M^{|\mathcal{R}_+|}_{BD}}.$$

Последнее равенство влечет алгебраическую интегрируемость деформаций оператора Лапласа потенциалами Калоджеро-Мозера-Сезерленда на основе пременения к ним алгебры операторов косого присоединенного действия [1].

Литература

1. Берест Ю.В. Принцип Гюйгенса и интегрируемость / Ю.Ю. Берест, А.П. Веселов // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 6. — С. 5–77.

2. Политов К.О. Многообразие Бете-Дункла веса m / К.О. Политов, С.П. Хэкало // Современные методы теории функций и смежных проблем : материалы Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж : ВГУ, 2021. — С. 241–242.

3. Хэкало С.П. Дифференциально-разностные операторы Дункла-Дарбу / С.П. Хэкало // Изв. РАН ВГУ. Сер. : Матем.. — 2017. — Т. 81, № 1. — С. 161–182.

4. Политов К.О. Многообразия Бете и Дункла ассоциированные с операторами Дункла-Дарбу / К.О. Политов // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - XXX. 2019 — Воронеж : ВГУ, 2019. — С. 229–230.

РАВНОМЕРНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ В НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ[1]

И.Г. Царьков (Москва, МГУ)

tsar@mech.math.msu.su

В настоящей работе мы будем рассматривать обобщения линейно нормированных пространств, а именно, линейные пространства с некоторой несимметричной нормой $\|\cdot|$ на нем. От несимметричной нормы на линейном пространстве X будем требовать свойства: 1). $\|\alpha x| = \alpha\|x|$ для всех $\alpha \geqslant 0$, $x \in X$; 2). $\|x+y| \leqslant \|x| + \|y|$ для всех $x, y \in X$ и 3). $\|x| \geqslant 0$ для всех $x \in X$, и 3a). $\|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Несимметричная норма задается функционалом Минковского некоторого, вообще говоря, несимметричного тела, содержащего ноль в своем ядре. Отметим также, что вместе с несимметричной нормой $\|\cdot|$ часто удобно рассматривать норму симметризации: $\|x\| := \max\{\|x|, \|-x|\}$ $(x \in X)$. В общем случае пространство с несимметричной нормой удовлетворяет только аксиоме отделимости T_1 (т.е. для любых $a, b \in X$ найдутся их окрестности $O(a)$, $O(b)$ такие, что $a \notin O(b)$, $b \notin O(a)$) и может быть нехаусдорфовым (т.е. может не удовлетворять аксиоме T_2). Также можно рассмотреть несимметричную полунорму $\|\cdot|$, для которой все условия 1)–3) сохраняются, условие 3a) заменяется на условие: $\|x| = 0 = \|-x| \Rightarrow x = 0$. В этом случае несимметричное пространство $(X, \|\cdot|)$ назовем полунормированным.

Через $B(x,r)$ обозначим "замкнутый" шар в линейном несимметричном нормированном пространстве или в полунормированном пространстве $\mathcal{X} = (X, \|\cdot|)$ с центром x радиуса r, т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y-x| \leqslant r\}$. Надо отметить, что шар $B(x,r)$ может не быть замкнутым множеством относительно топологии, порожденной открытыми шарами как предбазой. Для произвольного множества M некоторого несимметричного нормированного пространства или полунормированого X через $\varrho(y, M)$ $(y \in X,\ M \subset X)$ обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z\in M} \|z-y|$. Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y-x| = \varrho(x, M)\}$. Чебышевским солнцем называется такое множество M, что для всех $x \in X \setminus M$ существует единственная ближайшая в M, и $\{y\} = P_M(y + \lambda(x-y))$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Новым в настоящей работе является использование нового определения равномерно выпуклого несимметрично нормированного

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00204)

пространства для классических вопросов геометрической теории приближения.

Определение 1. *Положим* $\Delta(a) := \|f - ag| + a\|g| - \|f|, \quad a \in [0,1]$. *Несимметричное пространство* $X = (X, \|\cdot|)$ *называется равномерно выпуклым, если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $a \in (0,1]$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любых* $f, g \in X$*:* $\|f| = \|g| = 1$ *из условия* $\Delta(a) < \delta$ *вытекает, что* $f \in B(\mu g, \varepsilon)$ *для некоторого* $\mu \in [1-\varepsilon, 1]$.

Определение 2. *Множество* M *в несимметричном полунормированном пространстве* $X = (X, \|\cdot|)$ *называется* γ*-солнцем, если для любого* $\delta > 0$ *шар* $B(x_0, r_0 - \delta)$ $(r_0 = \varrho(x_0, M))$ *можно поместить в некоторый шар* $B(x, R)$ *сколь угодно большого радиуса* R*, не пересекающийся с* M.

Определение 3. *Пусть* $X = (X, \|\cdot|)$ *— несимметричное полунормированное пространство,* $M \subset X$*, точка* $x \in X$ *называется точкой левой аппроксимативной замкнутости для* M*, если для любой минимизирующей последовательности* $\{y_n\} \subset M$*:* $\|y_n - x| \to \varrho(x, M)$ $(n \to \infty)$*, сходящейся к некоторой точке* $y \in X$ *(т.е.* $\|y_n - y| \to 0$ *при* $n \to \infty$*), выполнено условия* $y \in M$ *и* $\|y - x| = \varrho(x, M)$*. Если все точки из* X *являются точками левой аппроксимативной замкнутости для* M*, то множество* M *называется лево-аппроксимативно замкнутым. Аналогично определяется правая аппроксимативная замкнутость.*

Определение 4. *Несимметричное пространство* X *называется лево-полным, если для любой последовательности* $\{x_n\} \subset X$ *из условия, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\|x_m - x_n| < \varepsilon$ *для всех* $m \geqslant n \geqslant N$*, вытекает, что существует точка* $x \in X$ *такая, что* $\|x_n - x| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $X = (X, \|\cdot|)$ *— лево-полное равномерно выпуклое несимметричное нормированное пространство,* $M \subset X$ *– лево-аппроксимативно замкнутое* γ*-солнце. Тогда* M *– чебышевское солнце.*

РОБАСТНЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ[1]

О.Б. Цехан (Гродно, ГрГУ)
tsekhan@grsu.by

Рассматривается линейная нестационарная сингулярно возмущенная система (ЛНСВС), имеющая в пространстве состояний вид

$$\begin{array}{l} \dot{z}(t) = A\,(t,\mu)\,z(t),\; z=(x,y)' \in \mathbb{R}^n,\; x\in\mathbb{R}^{n_1}, y\in\mathbb{R}^{n_2}, t\in T, \\ v(t) = c\,(t)\,z(t),\; v\in\mathbb{R},\; t\in T,\; z(t_0)=z_0,\; z_0=(x_0,y_0)', \end{array} \qquad (1)$$

где μ — параметр, $\mu \in (0,\mu^0], \mu^0 \ll 1$, $A\,(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{A_3(t)}{\mu} & \frac{A_4(t)}{\mu} \end{pmatrix}$, $c(t) = [c_1(t),\, c_2(t)]\,,\; A_i\,(t)\,,\overline{1,4},\; c_j\,(t)\,, j=1,2,$ — непрерывные на T матричные функции подходящих размеров, $n=n_1+n_2$.

Если при фиксированном $\mu>0$ для (1) определены функции $s_j\,(t,\mu) = s_{j-1}\,(t,\mu)\,A\,(t,\mu) + \dot{s}_{j-1}\,(t,\mu)\,,\; s_0\,(t,\mu) = c(t),\; j=\overline{0,k}$, то система (1) называется *системой класса* k [1] при этом $\mu>0$.

Пусть реализовались некоторые начальное состояние z_0 и фиксированное $\mu\in(0,\mu^0]$, которые породили процесс $z(t,\mu)=z(t,z_0,\mu)$ и выходную функцию $v(t,\mu)=v(t,z_0,\mu)$ при $t\in T$. Если выходная функция $v(t,\mu)$ $n-1$ раз непрерывно дифференцируема, определим n-вектор столбец $V(t,\mu) = \big(v(t,\mu),\; v^{(1)}(t,\mu),\; \ldots,\; v^{(n-1)}(t,\mu)\big)'$.

Определение. При фиксированном $\mu>0$ система (1) класса $n-1$ называется *равномерно наблюдаемой на отрезке* T, если при этом известном μ при любом $z_0\in\mathbb{R}^n$ отображение $z(t,\mu)\to V(t,\mu)$ инъективно для каждого $t\in T$.

С ЛНСВС (1) связаны [2] независящие от параметра μ нестационарная вырожденная система (ВС) размерности n_1 и стационарная система пограничного слоя (СП) размерности n_2, к которым непосредственно применимы понятие и критерии равномерной наблюдаемости [3].

Представим $A\,(t,\mu) = A^1(t) + \frac{1}{\mu}A^2(t)$, где $A^1\,(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}$ и определим $s_j^m(t)$, $j=\overline{0,n-2}$, $m=\overline{0,j}$:

$$s_j^m(t) = \begin{cases} s_0^0(t)=c(t),\; s_j^m(t)=0, m>j, m<0, \\ s_{j-1}^m(t)A^1(t) + s_{j-1}^{m-1}(t)A^2(t) + \dot{s}_{j-1}^m(t),\; m=\overline{1,j-1}. \end{cases} \qquad (2)$$

Обозначим $\lambda(A)$ — спектр матрицы A.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025", задание 1.2.04)..

Теорема. *Пусть* $Re\,\lambda\left(A_4\left(t\right)\right) \leqslant -c < 0$, $\left\|A_4\left(t\right)\right\| \leqslant c_2$, $\left\|\dot{A}_4\left(t\right)\right\| \leqslant \beta\ \forall t \in T$; *функции* $A_i\left(t\right), i = \overline{1,4}$, $c_2(t), A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $A_2(t)A_4^{-1}(t)$, *и (2) непрерывно-дифференцируемы на* T; *ВС — система класса* $n-1$; *ВС и СП равномерно наблюдаемы на* T. *Тогда найдется* $\mu^* \in (0, \mu^0]$ *такое, что ЛНСВС (1) равномерно наблюдаема на* T *при любом фиксированном* $\mu \in (0, \mu^*]$, *т.е. робастно относительно* μ.

Доказательство использует критерий относительной наблюдаемости [3] в терминах принадлежности нестационарной системы наблюдения классу и полноты ранга матрицы наблюдаемости. При выполнении условий теоремы на (2) доказывается принадлежность ЛНСВС (1) классу $n-1$ при любом $\mu > 0$. С помощью невырожденного преобразования [4] ЛНСВС (1) преобразуется к расщепленной по темпам системе, равномерная наблюдаемость которой эквивалентна исходной. Далее доказательство основано на исследовании структуры и свойств матриц наблюдаемости эквивалентной рассматриваемой ЛНСВС (1) расщепленной системы, подсистем ВС и СП, использует инвариантность принадлежности системы классу относительно реализованного расщепляющего преобразования [4], а также сохранение полноты ранга матрицы при малых аддитивных и невырожденных мультипликативных преобразованиях.

Литература

1. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И.В. Гайшун. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 408 с.

2. Kokotovic P.V. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design / P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O'Reilly. — NY : Academic Press, 1999. — 371 p.

3. Астровский А.И. Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем / А.И. Астровский, И.В. Гайшун // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 7. — С. 3–13.

4. Chang A. An algebraic characterization of controllability / A. Chang // IEEE Trans. Autom. Control. — 1965. — V. 10, № 5. — P. 112–113.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЕЩЕСТВА В ПАРАЛЛЕПИПЕДЕ

А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов, С.Ф. Кузнецов, О.Ю. Никифорова (Воронеж, ВГУИТ, ВГТУ)
sfs134@mail.ru

С помощью быстрых разложений [1] в [2] получено аналитическое решение трехмерного уравнения Пуассона и показано его применение для решения задачи теплопроводности. В данной работе рассмотрим задачу диффузии в параллелепипеде $(\Omega) = \{(x, y, z) \in R, 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c\}$. Для неизвестной концентрации $C(x, y, z)$ уравнение диффузии с заданным внутренним источником вещества $F(x, y, z)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

На гранях параллелепипеда зададим условия Дирихле:

$$C|_{x=0} = f_1(y, z),\ C|_{y=0} = f_2(x, z),\ C|_{z=0} = f_3(x, y),$$
$$C|_{x=a} = f_4(y, z), C|_{y=b} = f_5(x, z), C|_{z=c} = f_6(x, y). \tag{2}$$

Для получения точного решения задачи (1), (2) — о распределении концентрации вещества в параллелепипеде воспользуемся аналитическим решением записанным в [2].

Пусть внутренний источник будет переменным по оси Oz:

$$F(x, y, z) = Q \cdot \sin \frac{\pi z}{c}. \tag{3}$$

Точное решение уравнения (1) с внутренним источником (3) примет вид

$$U(x, y, z) = ((C_1(1 - \frac{z}{c}) + C_2\frac{z}{c})(1 - \frac{y}{b}) + (C_3(1 - \frac{z}{c}) + C_4\frac{z}{c})\frac{y}{b})(1 - \frac{x}{a}) +$$
$$+ ((C_5(1 - \frac{z}{c}) + C_6\frac{z}{c})(1 - \frac{y}{b}) + (C_7(1 - \frac{z}{c}) + C_8\frac{z}{c})\frac{y}{b})\frac{x}{a} + \frac{c^2}{\pi^2} Q \sin \frac{\pi z}{c}. \tag{4}$$

Диффузионные потоки определим по формулам

$$q_x(x,y,z) = -\frac{D}{a}\cdot(-(C_1-C_5)+\frac{z}{c}((C_1-C_5)-(C_2-C_6))+$$
$$+\frac{y}{b}\cdot((C_1-C_5)-(C_3-C_7))+$$
$$+\frac{z}{c}\cdot\frac{y}{b}\cdot((C_2-C_6)-(C_1-C_5)+(C_3-C_7)-(C_4-C_8)))$$
$$q_y(x,y,z) = -\frac{D}{b}\cdot(-(C_1-C_3)+\frac{z}{c}((C_1-C_3)-(C_2-C_4))+$$
$$+\frac{x}{a}\cdot((C_1-C_3)-(C_5-C_7))+$$
$$+\frac{z}{c}\cdot\frac{x}{a}\cdot((C_2-C_4)-(C_1-C_3)+(C_5-C_7)-(C_6-C_8)))$$
$$q_z(x,y,z) = -\frac{D}{c}\cdot(\frac{c^2}{\pi^2}\cdot Q\cdot\cos\cdot\pi\cdot\frac{z}{c}-(C_1-C_2)+\frac{y}{b}((C_1-C_2)-(C_3-C_4))+$$
$$+\frac{x}{a}\cdot((C_1-C_2)-(C_5-C_6))+$$
$$+\frac{y}{b}\cdot\frac{x}{a}\cdot(-(C_1-C_2)+(C_3-C_4)+(C_5-C_6)-(C_7-C_8))). \quad (5)$$

По формулам (4), (5) можно вычислить концентрацию вещества и значение диффузионных потоков в любой точке параллелепипеда.

Литература

1. Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений /А.Д. Чернышов. // Журнал вычислит. математики и матем. физики. —2014. — Т. 54, № 1. — С. 13–24.

2. Goryainov V.V. Some exact solutions of the heat conduction equation in parallelepiped obtained by the fast expansions method / V.V. Goryainov, S.F. Kuznetsov, O.Yu. Nikiforova, I.S. Voronkova // Journal of Physics: Conference Series. - 2021. - 1902. – 012006

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ[1]

Е.В. Чистякова, В.Ф. Чистяков
(Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
elena.chistyakova@icc.ru

В докладе изучается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i=0}^{k} A_i(t)x^{(i)}(t) = f(t),\ t \in T = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

где $A_i(t)$ – $(m \times n)$-матрицы, $x(t)$ — искомая вектор-функция, $f(t)$ — заданная вектор-функция,; $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t),\ x^{(0)}(t) = x(t)$. Предполагается, что входные данные системы (1) достаточно гладкие, при этом выполнено условие

$$\det A_k(t) = 0\ \forall t \in T, \tag{2}$$

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (2), как правило называются дифференциально- алгебраическими уравнениями (ДАУ).

ДАУ во многом отличаются от систем ОДУ, и поиск их особых точек — не всегда тривиальная задача. В частности, точки изменения ранга матрицы $A_k(t)$ не всегда совпадают с особыми точками. В докладе мы используем методики исследования, изложенные для ДАУ в [2]. Обсуждаются условия разрешимости ДАУ (1) при наличии особых точек на отрезке T.

Литература

1. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. Новосибирск : Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996.

2. Chistyakov V.F., Chistyakova E.V. Evaluation of the index and singular points of linear differential-algebraic equations of higher order / V.F. Chistyakov, E.V. Chistyakova // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 231, Issue 6. — Pp. 827–845.

[1] Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос регистрации: 121041300060-4).

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ[1]

С.А. Шабров, Т.В. Гридяева, Ф.В. Голованева, М.Б. Давыдова

(Воронеж, ВГУ)

shabrov_s_a@math.vsu.ru

В работе изучается граничная задача

$$\begin{cases} Lu \equiv -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} - (gu'_x)'_\mu + Q'_\mu u = F'_\sigma; \\ u(0) = u(\ell); \\ u'_x(0) = u'_x(\ell); \\ u''_{xx}(0) = u''_{xx}(\ell); \\ u'''_{xx\mu}(0) = u'''_{xx\mu}(\ell); \\ u^{(4)}_{xx\mu x}(0) = u^{(4)}_{xx\mu x}(\ell); \\ u^{(5)}_{xx\mu xx}(0) = u^{(5)}_{xx\mu xx}(\ell), \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере.

Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\mu(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство $-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta(ru''_{xx})'_x(\xi) - \Delta\left(gu'_x\right)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi)$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $F(x)$ и $Q(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ (описание построения множества $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ см. [2]), $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает.

Получены достаточные условия существования и единственности решения (1).

Литература

1. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF–2020–0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта No 20–51–15003 НЦНИ–а.

2. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

3. Borodina E.A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E.A. Borodina, S.A. Shabrov, M.V. Shabrova // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ[1]

С.А. Шабров, М.И. Каменский, М.Б. Зверева, Рено де Фитт Поль (Воронеж, Воронежский государственный университет);
Руанский университет
shabrov_s_a@math.vsu.ru, mikhailkamenski@mail.ru, margz@rambler.ru, prf@univ-rouen.fr

В представленной работе изучается граничная задача

$$\begin{cases} M'_\mu\left(\ddot{u} + D(t)\dot{u}\right) = -\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\mu} + \left(ru'_x\right)'_\mu - Q'_\mu u; \\ u(0,t) = u'_x(0,t) = 0; \\ u(\ell,t) = u'_x(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \varphi_0(x); \\ \dot{u}(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере, которая возникает при моделировании малых деформаций, происходящих в одной плоскости перпендикулярно оси Ox — положению равновесия системы, растянутой стержневой системы, помещенной в упругую среду с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости; коэффициент $p(x)$ характеризует материал из которого сделан материал, $r(x)$ — сила натяжения в точке x; Q'_μ — коэффициент упругости внешней среды; $M(x)$ — суммарная масса участка $[0;x)$; $D(t)$ — коэффициент трения; $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — начальные отклонения и скорость соответственно.

Решение (1) мы будем искать в классе E — непрерывно дифференцируемых функций $u(x,t)$ (при каждом фиксированном t), у

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF–2020–0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта No 20–51–15003 НЦНИ–а.

которых: $u'_x(x,t)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu''_{x\mu}(x,t)$ — непрерывно дифференцируема; $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x,t)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $u(x,t)$ — дважды непрерывно дифференцируемы по t при каждом фиксированном x.

В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\mu(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство $\Delta M(\xi)\ddot{u}(\xi,t) + D(t)u(\xi,t) = -\Delta\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\xi,t) + \Delta(ru'_x)(\xi,t) - u(\xi,t)\Delta Q(\xi)$, где $\Delta v(\xi)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$ и $Q(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ (описание построения множества $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ см. [2]), $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает.

Получены достаточные условия возможности применения метода Фурье для доказательства существования решения (1).

Литература

1. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

2. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

3. Borodina E.A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E.A. Borodina, S.A. Shabrov, M.V. Shabrova // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ[1]

С.А. Шабров, Э.Ю. Курклинская, Д.Е. Марфин, П.В. Садчиков

(Воронеж, ВГУ)

shabrov_s_a@math.vsu.ru

В работе получен аналог теоремы сравнения для двух уравнений

$$-\left(p_1u'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + \left(r_1u''_{xx}\right)''_{x\mu} - \left(g_1u'_x\right)'_\mu + q_1u = 0 \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF–2020–0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20–51–15003 НЦНИ–а.

и

$$-\left(p_2 u'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + (r_2 u''_{xx})''_{x\mu} - (g_2 u'_x)'_\mu + q_2 u = 0, \qquad (2)$$

с производными по мере.

Решение (1) и (2) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\mu(x)$, уравнение в (1) (для (2) равенство аналогично) понимается как равенство $-\Delta\left(p_1 u'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta(r_1 u''_{xx})'_x(\xi) - \Delta\left(g_1 u'_x\right)(\xi) + u(\xi)q_1(\xi) = 0$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Будем предполагать, что функции $p_i(x)$, $r_i(x)$ и $g_i(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ (описание построения множества $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$ см. [2]), $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p_i(x) > 0$, $q_i(x)$ — μ–суммируемы ($i = 1, 2$), при этом $p_1(x) \geqslant p_2(x)$, $r_1(x) \geqslant r_2(x) \geqslant 0$, $g_1(x) \geqslant g_2(x) \geqslant 0$ и $q_1(x) \geqslant q_2(x) \geqslant 0$.

Литература

1. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

2. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

3. Borodina E.A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E.A. Borodina, S.A. Shabrov, M.V. Shabrova // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

НЕКОТОРЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Получены тензорные инварианты для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором интегралов для интегрирования диссипативных систем. Вводимые силовые поля делают системы с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные. Известно [1, 2], что наличие достаточного количества не только первых интегралов, но и других инвариантов позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет понизить порядок системы. Для консервативных систем этот факт естественен, а для систем, обладающих притягивающими предельными множествами, коэффициенты имеющихся инвариантов должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [3, 4].

Рассматриваемая динамическая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \\ \quad - f(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \\ \quad - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f(\alpha), \end{cases} \tag{1}$$

при наличии также шестого уравнения

$$\dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \tag{2}$$

Здесь $\Gamma_k(\alpha)$, $k = 1, 3$, $\Gamma_2(\beta_1)$, $\Gamma_{22}^1(\beta_1)$ — коэффициенты аффинной связности многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$; $f(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — функции, определяющие новые кинематические соотношения на касательном расслоении; $F_3(\alpha)$, $\delta(\alpha)$, $F_s^1(\alpha)$, $s = 1, 2, 3,$ — функции, определяющие внешнее силовое поле с дисипацией переменного знака [2, 3]. Примем также условия: $F_1^1(\alpha) \equiv F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha)$.

Для полного интегрирования системы (1), (2) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых тензорных инвариантов. Однако при некоторых условиях после замены переменных $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = z_2/z_1$, система (1), (2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z} = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) z z_3 + z F^1(\alpha), \end{cases} \tag{3}$$

$$
\begin{cases}
\dot{z}_* = \pm z\sqrt{1+z_*^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\
\dot{\beta}_1 = \pm\dfrac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha),
\end{cases} \tag{4}
$$

$$
\dot{\beta}_2 = \pm\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha)g(\beta_1). \tag{5}
$$

Видно, что для интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых инварианта системы (3), один — системы (4) и дополнительный инвариант, "привязывающий" (5) (т.е. всего *четыре*). Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$
\begin{gathered}
\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)| = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \\
\tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha},\ \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)},
\end{gathered} \tag{6}
$$

а для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, 3,$ — равенства

$$
\begin{gathered}
F_3(\alpha) = \lambda_3^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_3^0\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha); \\
F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_3(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha) = \lambda_k^1\tilde{\Delta}(\alpha)f_3(\alpha),\ k = 1, 2, 3.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Условие (6) назовем "геометрическим", а условия из группы (7) — "энергетическими". При этом $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda^1$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (6) и (7). Тогда система (3)–(5) обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами [5, 6].*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$
\begin{gathered}
\Theta_1(z_3, z; \alpha) = G_1\left(\frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = \\
= \frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2 + z^2) + (b - \lambda^1)z_3\delta(\alpha)f_3(\alpha) - \lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)f_3(\alpha)} = C_1.
\end{gathered} \tag{8}
$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (3) имеет следующий структурный вид:

$$
\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{9}
$$

Первый интеграл для системы (4) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*;\beta_1) = \frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}, \tag{10}$$

а дополнительный первый интеграл, “привязывающий” (5):

$$\Theta_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}\, db = C_4 = \text{const}. \tag{11}$$

Теорема 2. *Если для систем вида (3)–(5) выполняются геометрическое и энергетические свойства (6), (7), то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие четыре инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами:*

$$\rho_1(z_3,z;\alpha)dz_3\wedge dz\wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(z_3,z;\alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\}\frac{u_3^2+u^2+(b-\lambda^1)u_3-\lambda_3^0}{u};$$

$$\rho_2(z_3,z;\alpha)dz_3\wedge dz\wedge d\alpha,\ \rho_2(z_3,z;\alpha) =$$

$$= \Delta(\alpha)\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\}\exp\left\{-\int\frac{(b+u_3)du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\};$$

$$\rho_3(z_*;\beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1+z_*^2}}dz_*\wedge d\beta_1$$

(после замены независимого переменного в системе (4));

$$\rho_4(z_3;\alpha,\beta_1,\beta_2)dz_3\wedge d\alpha\wedge d\beta_1\wedge d\beta_2,$$

$$\rho_4(z_3;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\}\cdot\Theta_4(\beta_1,\beta_2),$$

но зависимые с первыми интегралами (8)–(11).

Литература

1. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 117–148.

2. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле / М.В. Шамолин. — М. : ЛЕНАНД, 2019. — 456 с.

3. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности / М.В. Шамолин. — М. : ЛЕНАНД, 2021. — 400 с.

4. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 84–90.

5. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 497, № 1. — С. 23–30.

6. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем / В.В. Козлов // Прикл. матем. и механ. — 2015. — Т. 79, № 3. — С. 307–316.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В КЛАССАХ И.И. ПРИВАЛОВА

Ф.А. Шамоян, Н.М. Махина (Саратов, СГУ; Брянск, БГУ)
shamoyanfa@yandex.ru, mahinanm@yandex.ru

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G — открытое множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ∂G — его граница; $\rho(\zeta, \partial G)$ — эвклидово расстояние от точки ζ до границы ∂G; $H(G)$ — множество всех аналитических функций в G.

Пусть также Π_p, $0 < p < +\infty$, — класс И.И. Привалова в D:

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p d\varphi < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max\left(\ln|a|, 0\right), \forall a \in \mathbb{C}$.

Соответствующий плоский весовой класс И.И. Привалова, $0 < p < +\infty$, обозначим

$$S_p(\omega, D) = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega\left(\frac{1}{1-r}\right) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p d\varphi dr < +\infty \right\},$$

где $\omega(x), x \in (0; +\infty)$, — положительная убывающая на $(0; +\infty)$ функция.

Обзор некоторых результатов, связанных с инвариантностью относительно дифференциальных операторов различных классов аналитических функций, содержится в работе [1].

Отметим работу [2], в которой получено необходимое и достаточное условие для нулей произведения Бляшке, при котором производная n-го порядка принадлежит классу Привалова Π_p, $0 < p < +\infty$, и работу [3], в которой установлена инвариантность класса функций $S_p(\omega, D)$ относительно оператора дифференцирования для довольно общих весовых функций.

В своей работе мы устанавливаем следующее утверждение:

Теорема 1. *Для того, чтобы из условия* $f \in \Pi_p$, $0 < p < +\infty$, *следовало* $f^{(n)} \in S_p(\omega, D), n \in \mathbb{N}, 0 < p < +\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{1}{1-r}\right)\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^p dr < +\infty.$$

Рассмотрим далее классы функций следующего вида

$$S_p(\omega, G) = \left\{ f \in H(G) : \int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(\zeta, \partial G)}\right)\left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p dm_2(\zeta) < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, m_2 — плоская мера Лебега на G.

Оказывается, при довольно общих условиях на весовую функцию утверждения, аналогичные вышеуказанным, можно сформулировать для всех ограниченных областей.

Так, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть* ω *— весовая функция;* G *— некоторое открытое множество на комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *причем*

$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right)\left(\left(\ln^+\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z) < +\infty.$$

Тогда класс $S_p(\omega, G)$ *инвариантен относительно оператора дифференцирования при произвольном* $0 < p < +\infty$.

Отметим, что в доказательстве существенную роль играет разбиение Уитни, используется метод работы [4].

Литература

1. Campbell D. The Bloch-Nevanlinna conjecture revisited / D. Campbell, G. Wickes // Bull. Austral. Math. Soc. — 1978. — V. 18, № 3. — PP. 447–453.

2. Шамоян Ф.А. Об инвариантности некоторых классов голоморфных функций относительно интегро-дифференциальных операторов / Ф.А. Шамоян, И.С. Курсина / Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1998. — V. 255. — С. 184–197.

3. Shamoyan F.A. Blaschke product in Privalov classes / F.A. Shamoyan, V.A. Bednazh, V.A. Kustova / Sib. Elect. Math. Reports. — 2021. — V.18, № 1. — PP. 168–175.

4. Tkachenko N.M. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary / N.M. Tkachenko, F.A. Shamoyan // Journal of Math. Phys., An., Geom. — 2009. — V. 23, № 2. — PP. 192–210.

К ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashananin@inbox.ru

Пусть

$$P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha,\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,\ D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},\ i^2=-1, \qquad (1)$$

- линейный дифференциальный оператор порядка $m \geqslant 1$ с вещественно аналитическими, комплекснозначными коэффициентами, определенный в открытом множестве Ω. Обозначим через $\mathcal{K}_x(P)\subset T^*_x\Omega$ ядро симметрической m-линейной формы

$$\mathcal{F}_x(\eta^1,\eta^2,\ldots,\eta^m) = \frac{1}{m!}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_m=1}^{n}\frac{\partial^m p_m}{\partial\xi_{j_1}\ldots\partial\xi_{j_m}}(x,\xi)\eta^1_{j_1}\ldots\eta^m_{j_m},$$

индуцируемой в точке $x\in\Omega$ и старшим символом оператора P.

Предположим, что:

(1) $\bigcup\limits_{x\in\Omega}(x, K_x(P)\setminus\{0\}) = \mathrm{Char}(P)$;

(2) коразмерность ядра $K_x(P)$ не зависит от точки $x\in\Omega$ и равна k.

Множество $\cup_{x\in\Omega}(x,K_x(P))$ образует подрасслоение $K(P)$ расслоения $T^*\Omega$ коразмерности k, которое в касательном расслоении $T\Omega$ индуцирует гладкое k-мерное подрасслоение:

$$L(P) = \{(x,\tau)\in T\Omega\,|\,x\in\Omega \text{ и } \xi(\tau)=0\ \forall\xi\in K_x(P)\}.$$

Через $\mathcal{L}(P)$ обозначим дифференциальную систему, порожденную $L(P)$, то есть подмодуль C^∞-сечений подрасслоения $L(P)\subset T\Omega$ модуля C^∞-сечений $\mathcal{T}\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ порождает в C^∞-модуле $\mathcal{T}\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞-подмодулей $\mathcal{H}^j$, в которой первый элемент $\mathcal{H}^1=\mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули $\mathcal{H}^{j+1}$ порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$. Дифференциальную систему $\mathcal{L}(P)$ называют вполне неголономной, если найдется такое натуральное число m, что

$$\mathcal{L}(P) = \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^2 \subset \ldots \subset \mathcal{H}^m = \mathcal{T}\Omega,$$

Дополнительно к условиям (1) и (2) предположим, что

(3) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ вполне неголономна.

Теорема 1. *Пусть P – оператор вида* (1), *удовлетворяющий условиям* (1), (2) *и* (3), *и пусть функции $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда, если $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, то $u^1(x) = u^2(x)$ в линейно связной компоненте $\mathcal{V}_{x^0}$ множества $\{x \in \Omega \,|\, (Pu^1)_x \cong (Pu^2)_x\}$, содержащей x^0.*

В частности, если Ω – область и оператор P удовлетворяет условиям (1), (2) и (3), то при любых заданных обобщенной функции $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и ростке g_{x^0} обобщенной функции в точке $x^0 \in \Omega$ два решения $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ задачи

$$\begin{cases} Pu = f, \\ u_{x^0} \cong g_{x^0}, \end{cases}$$

равны в Ω.

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1)/ Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПОНТРЯГИНА НА ЦИЛИНДРЕ

З.И. Шарифзода, И.Дж. Нуров (Душанбе, ТНУ)
nid1@mail.ru

В работе рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \varphi' = -\frac{\partial H(\varphi,y)}{\partial y} + \mu \cdot P(\varphi, y, \mu), \\ y' = \frac{\partial H(\varphi,y)}{\partial \varphi} + \mu \cdot Q(\varphi, y, \mu), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $H(\varphi, y) \equiv H(\varphi + 2\pi, y)$, $P(\varphi, y, \mu) \equiv P(\varphi + 2\pi, y, \mu)$, $Q(\varphi, y, \mu) \equiv Q(\varphi + 2\pi, y, \mu)$ - непрерывны по совокупности переменных φ, y, μ в области $|\mu| < \mu_0$.

Система вида (1) рассматривается на цилиндрической фазовой поверхности [1] и возникает в задачах определяющие динамику синхронных генераторов и двигателей, динамику полета самолета, и многих других задач. Следовательно, изучении подобных систем в настоящее время играют большую роль в различных областях техники.

Основная цель работы - исследовать решения $(\varphi(t), y(t))$ системы (1) удовлетворяющее условиям: $\varphi(T) = \varphi(0) + 2k_0\pi$, $k_0 \in Z$, $y(T) = y(0)$ при $\mu \neq 0$, где T-неизвестный период. Разрешая уравнения $H(\varphi, y) = h$, (h-const) относительно y при предположении, что

$$(\partial H(\varphi, y)/\partial y) \neq 0,$$

определим функцию $y = Y(\varphi, h)$. Далее, по функциям $P(\varphi, y, 0)$, $Q(\varphi, y, 0)$ определим скалярную функцию

$$F(h) = \int_0^{2\pi} [Q(\varphi, Y(\varphi, V), 0) + P(\varphi, Y(\varphi, V), 0) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, Y(\varphi, V))}{H'_y(\varphi, Y(\varphi, V))}] d\varphi \tag{2}$$

Для исследования вопроса о существовании циклов системы (1) как и в работе [2] отправным пунктом послужила классическая теорема Л.С. Понтрягина [1,с.209], которая сформулирована при предположении аналитичности функций, $P(\varphi, y, \mu)$ и $Q(\varphi, y, \mu)$ по совокупности переменных φ, y, μ:

Теорема [1]. Для того чтобы у системы (1) существовал предельный цикл, рождающийся из кривой $y = Y(\varphi, h_0)$, необходимо, чтобы

$$F(h) = \int_0^{2\pi} [Q(\varphi, Y(\varphi, h_0), 0) - P(\varphi, Y(\varphi, h_0), 0) \cdot Y'_\varphi(\varphi, h_0)] d\varphi = 0,$$

и достаточно, чтобы при условии $F(h_0) = 0$ выполнялось

$$F_1(h_0) = \int_0^{2\pi} \frac{P'_\varphi(\varphi, Y(\varphi, h_0), 0) + Q'_y(\varphi, Y(\varphi, h_0), 0)}{-H'_y(\varphi, Y(\varphi, h_0))} d\varphi \neq 0.$$

Если $F(h_0) = 0$ и $F_1(h_0) \neq 0$, то рождающийся цикл единственный и притом устойчивый, если $\mu F_1(h_0) < 0$, $H'_y(\varphi, Y(\varphi, h)) > 0$ или $\mu F_1(h_0) > 0$, $H'_y(\varphi, Y(\varphi, h)) < 0$, и неустойчивый, если $\mu F_1(h_0) > 0$, $H'_y(\varphi, Y(\varphi, h)) > 0$ или $\mu F_1(h_0) < 0$, $H'_y(\varphi, Y(\varphi, h)) < 0$.

Однако, условия $F'(h) \neq 0$ не выполняется для некоторых задач. Сформулируем утверждения для случая непрерывных функций $P(\varphi, y, \mu)$, $Q(\varphi, y, \mu)$ в терминах самой функции $F(h)$. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (Аналог теоремы Понтрягина). *Предположим, что для некоторой последовательности значений $\mu = \mu_к \neq 0$,*

$\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$ система (1) имеет периодическое решение $(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k))$, с периодом $T_{\mu_k} > 0$, удовлетворяющие условию $|\varphi(t,\mu_k)| + |y(t,\mu_k)| \leqslant M$, $M > 0$. Тогда существует такое h_0, что $F(h_0) = 0$.

Теорема 2. *Пусть $h_0 > 0$ - решение уравнения $F(h) = 0$ и в окрестности точки h_0, $[h_0+\varepsilon, h_0-\varepsilon]$, $h_0-\varepsilon > 0$ функция $F(h) \neq 0$ при $h \neq h_0$, причем значения функции $F(h)$ меняют знак при переходе через точку h_0. Тогда система (1) при достаточно малых значениях μ имеет периодическое решение $(\varphi(t,\mu), y(t,\mu))$, удовлетворяющее условию $|H(\varphi(t), y(t)) - h_0| < \varepsilon_0$.*

Следующий этап разработан аналитическая формула(алгоритм) построения примеров для системы (1) удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2.

Предположим, что даны функции $F_0(V)$, $Q_0(\varphi, V, \mu)$, $P(\varphi, y, \mu)$- непрерывные по совокупности переменных, причем предполагается, что функция $H(\varphi, y)$ имеет непрерывную частную производную по обоим аргументам, $H'_y(\varphi, y) \neq 0$ при всех φ и y. Определим функцию $Q(\varphi, y, \mu)$ следующим равенством

$$Q(\varphi,y,\mu) = F_0(H(\varphi,y)) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi,y),\mu) - P(\varphi,y,\mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi,y)}{H'_y(\varphi,y)} \quad (3).$$

В равенстве (3) перенеся слагаемую $P(\varphi,y,\mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi,y)}{H'_y(\varphi,y)}$ в левую часть, имеем

$$Q(\varphi,y,\mu) + P(\varphi,y,\mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi,y)}{H'_y(\varphi,y)} = F_0(H(\varphi,y)) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi,y),\mu).$$

Далее, рассмотрим уравнение $H(\varphi, y) = V$. Полагая, что данное уравнение имеет решение относительно y. Фиксируя (φ, V) обозначим через $Y(\varphi, V)$ - решения этого уравнения: $H(\varphi, Y(\varphi, V)) \equiv V$. В равенстве (3) пологая $y = Y(\varphi, V)$, имеем:

$$Q(\varphi, Y(\varphi,V),\mu) + P(\varphi, Y(\varphi,V),\mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, Y(\varphi,V))}{H'_y(\varphi, Y(\varphi,V))} =$$

$$= F_0(H(\varphi, Y(\varphi,V))) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi, Y(\varphi,V)),\mu).$$

Так как $H(\varphi, Y(\varphi, V)) \equiv V$, то последнее равенство можем переписать в виде

$$Q(\varphi, Y(\varphi,V),\mu) + P(\varphi, Y(\varphi,V),\mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, Y(\varphi,V))}{H'_y(\varphi, Y(\varphi,V))} =$$

$$= F_0(V) \cdot Q_0(\varphi, V, \mu).$$

В этом равенстве полагая $\mu = 0$ и затем интегрируя ее от нуля до 2π по φ, получим

$$\int_0^{2\pi} [Q(\varphi, Y(\varphi, V), 0) + P(\varphi, Y(\varphi, V), 0) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, Y(\varphi, V))}{H'_y(\varphi, Y(\varphi, V))}] d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} F_0(H(\varphi, Y(\varphi, V))) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi, Y(\varphi, V)), \mu) d\varphi.$$

Тогда в силу (2), имеем

$$F(V) = \int_0^{2\pi} F_0(V) \cdot Q_0(\varphi, V) d\varphi.$$

Пример 1. Пусть $F_0(V) = (V-1)^3$, а функция $Q_0(\varphi, V, 0) = 3 + cos\varphi$, тогда, получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -(2 + cos\varphi), \\ \dot{y} = -sin\varphi \cdot y + \mu \cdot [(2 + cos\varphi) y - 1]^3 \cdot (3 + cos\varphi). \end{cases}$$

В рассматриваемом примере функция $H(\varphi, y) = (2 + cos\varphi) \cdot y$, $P(\varphi, y, \mu) = 0$, а функция $Q(\varphi, y, \mu) = [(2 + cos\varphi) y - 1]^3 \cdot (3 + cos\varphi)$, то

$$F(V) = \int_0^{2\pi} (V-1)^3 \cdot (3 + cos\varphi) d\varphi,$$

где V-скалярный параметр. Следовательно, имеем $F(V) = 6\pi \cdot (V-1)^3$. В точке $V = V_0 = 1$, функция $F(V_0) = 0$, а его производная в этой точке $F'(V_0) = (V_0 - 1)^3 \cdot (3 + cos\varphi) = 0$.

Пример 2. Пусть $F_0(V) = \sqrt{|V-1|} sign(V-1)$, а функция $Q_0(\varphi, V, 0) = 2 + cos^2\varphi$, тогда получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -2y, \\ \dot{y} = -2sin\varphi + \\ \qquad + \mu \cdot \sqrt{|y^2 + 2cos\varphi - 1|} sign(y^2 + 2cos\varphi - 1) \cdot (2 + cos^2\varphi). \end{cases}$$

Так как в рассматриваемом примере функция $H(\varphi, y) = y^2 + 2cos\varphi$, $P(\varphi, y, \mu) = 0$, а функция $Q(\varphi, y, \mu) = \sqrt{|y^2 + 2cos\varphi - 1|}\ sign(y^2 + 2cos\varphi - 1) \cdot (2 + cos^2\varphi)$, то

$$F(V) = \int_0^{2\pi} \sqrt{|V-1|} sign(V-1) \cdot (2 + cos^2\varphi) d\varphi,$$

где V-скалярный параметр. Следовательно, имеем $F(V) = 5\pi \cdot \sqrt{|V-1|} sign(V-1)$. В точке $V = V_0 = 1$, функция $F(V_0) = 0$ и в этой точке функция не дифференцируема и выполняются условия теорем 1 и 2.

Литература

1. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М. : Наука, 1976. — 496 с.

2. Мухамадиев Э.М. О периодических решениях нелинейного дифференциального уравнения, зависящего от параметра / Э.М. Мухамадиев, З.И. Шарифзода, И.Д. Нуров // ДАН РТ. — 2018. — Т. 61, № 11-12. —С.822-828.

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ, ЗАДАННЫХ НА МНОГООБРАЗИИ БЕЗ КРАЯ

Д.Е. Шафранов (Челябинск, ЮУрГУ(НИУ))
shafranovde@susu.ru

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. В Челябинской научной школе Г.А. Свиридюка исследовались вопросы разрешимости уравнений соболевского типа, с необратимым оператором при производной

$$L\dot{u} = Mu, \tag{1}$$

причем оператор L из пространства линейных и ограниченных операторов, а оператор M из пространства замкнутых плотноопределенных операторов, в том числе для случая относительно p-радиаиального оператора. В работе [2] была исследована разрешимость для стохастического линейного уравнения соболевского типа с p-радиальным оператором(к ним относится и уравнение Гинзбурга — Ландау) в пространствах винеровских стохастических процессов. Так как винеровские процессы непрерывны, но недифференцируемы в каждой точке в обычном понимании, то была использована производная в смысле Нельсона — Гликлиха.

Здесь мы исследуем разрешимость задач для уравнения Гинзбурга — Ландау в пространствах дифференциальных форм со стохастическими коэффициентами [3], заданных на гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края.

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47–74.

2. Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M.A. Linear Sobolev Type Equations with Relativly P-radial Operators in Space of "Noises-// Mediterranean Journal of Mathematics. — 2016. — Vol. 13, № 6. — P. 4607–4621.

3. Шафранов Д.Е. Стохастические уравнения соболевского типа с относительно p-радиальными операторами в пространстве дифференциальных форм / Д.Е. Шафранов, О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк // Диффеенциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 4. — С. 526–535.

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В.А. Шишкин (Пермь, ПГНИУ)
vsh1791@mail.ru

Пусть требуется найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом:

$$x'(t) - p(t)x\big(h(t)\big) = f(t), \quad x(a) = x_a, \quad t \in [a,b], \tag{1a}$$

$$x(t) = q_1(t),\ t < a \quad \text{и} \quad x(t) = q_2(t),\ b < t. \tag{1b}$$

Здесь $p, f \in \mathbf{L}_2[a,b]$ — функции, интегрируемые с квадратом на $[a,b]$; $q_1 \in \mathbf{L}_2\big[\min_{s\in[a,b]} h(s), a\big]$, $q_2 \in \mathbf{L}_2\big[b, \max_{s\in[a,b]} h(s)\big]$; h — дифференцируемая, монотонно неубывающая на $[a,b]$ функция.

Так как h — монотонно неубывающая непрерывная функция, то на $[a,b]$ можно ввести такую сетку

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 = b,$$

что $h(t) \leqslant a$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $h(t) \geqslant b$ при $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$ и $a \leqslant h(t) \leqslant b$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Проинтегрировав обе части дифференциального уравнения (1a) и выполнив соответствующие преобразования, получим в конечном итоге интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds = F(t) \tag{2}$$

с ядром

$$K(t,s) = \chi_{[a,b]\cap\left[h^{-1}(a),h^{-1}(t)\right]}(s)p\big(h^{-1}(s)\big)\big(h^{-1}(s)\big)' \tag{3}$$

и правой частью

$$F(t) = x_a + \int_a^t f(s)\,ds + \int_{[t_0,t_1]\cap[t_0,t]} p(s)q_1\big(h(s)\big)\,ds +$$
$$+ \int_{[t_2,t_3]\cap[t_0,t]} p(s)q_2\big(h(s)\big)\,ds.$$

Здесь χ_X — характеристическая функция множества X.

Уравнение (2) можно переписать в операторной форме $x - Kx = F$. Интегральный оператор K по построению является элементом линейного пространства $\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)$ операторов, отображающих $\mathbf{L}_2$ в $\mathbf{L}_2$.

Для получения приближённого решения уравнения (2) применим стандартный приём проецирования в конечномерное пространство [2]. Для этого заменим ядро (3) близким к нему вырожденным ядром

$$\tilde{K}(t,s) = \sum_i u_i(t) v_i(s).$$

Введём на $[a,b]$ полную в $\mathbf{L}_2$ ортонормированную систему базисных функций $\{\varphi_i\}_1^\infty$. Тогда в качестве $\tilde{K}(t,s)$ можно взять частичную сумму от разложения $K(t,s)$ с достаточно большим числом слагаемых

$$\tilde{K}(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \varphi_i(t) \varphi_j(s) = \sum_{k=1}^{N} c_{i(k),j(k)} \varphi_{i(k)}(t) \varphi_{j(k)}(s).$$

Здесь $N = n^2$, а функции $i(k)$ и $j(k)$ используются для получения из $k \in \{1,\ldots,N\}$ значений $i,j \in \{1,\ldots,n\}$:

$$j(k) = \big((k-1) \bmod n\big) + 1, \quad i(k) = \frac{k - j(k)}{n} + 1.$$

Здесь $a \bmod b$ означает остаток от целочисленного деления a на b.

Подставив в (2) вместо $K(t,s)$ вырожденное ядро $\tilde{K}(t,s)$ и выполнив стандартные преобразования, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$AX = B, \tag{4}$$

решение которой $X = A^{-1}B$ позволяет записать приближённое решение исходной задачи в виде

$$\tilde{x}(t) = F(t) + \sum_{k=1}^{N} c_{i(k),j(k)} X_k \varphi_{i(k)}(t).$$

Так как оператор $I - \tilde{K}$ обратим (в противном случае не удалось бы найти $\tilde{x}$ из-за сингулярности матрицы A), то и все близкие к нему операторы $I - K$, для которых выполнено неравенство

$$\|K - \tilde{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)} < \frac{1}{\big\|(I - \tilde{K})^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)}}, \tag{5}$$

также имеют обратные [1: стр. 207, теорема 4].

В качестве оценки погрешности будем использовать оценку сверху нормы отклонения $\|x-\tilde{x}\|_{\mathbf{L}_2}$ приближённого решения $\tilde{x}=(I-\tilde{K})^{-1}F$ от $x=(I-K)^{-1}F$. Если выполнено условие (5), а x и $\tilde{x}$ — решения уравнений $x-Kx=F$ и $\tilde{x}-\tilde{K}=\tilde{F}$, то [2: стр. 47]

$$\|x-\tilde{x}\|_{\mathbf{L}_2} \leqslant \frac{\left\|(I-\tilde{K})^{-1}\right\|_{\mathbf{L}_2\to\mathbf{L}_2}\|K-\tilde{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)}\cdot\|\tilde{x}\|_{\mathbf{L}_2}}{1-\left\|(I-\tilde{K})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)}\|K-\tilde{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)}}. \qquad (6)$$

Заметим, что при проверке условия существования решения (5) и при оценке погрешности (6) требуется, чтобы оценки сверху норм операторов $(I-\tilde{K})^{-1}$ и $K-\tilde{K}$ были *гарантированны.*

При проведении *доказательного* вычислительного эксперимента требуется *гарантировать* его результаты. Обычная компьютерная арифметика, использующая числа с конечным числом разрядов, не может гарантировать результат вычислений вследствие накопления ошибок округления. Вместо неё будем использовать арифметику компьютерно-представимых рациональных чисел вида $p/q \in \mathbb{Q}_{\text{комп}} \subset \mathbb{Q}$, где $p\in\mathbb{Z}$ и $q\in\mathbb{N}$ — числа произвольной длины. Очевидно, что арифметические операции с такими числами выполняются точно.

При построении интегрального уравнения с вырожденным ядром $\tilde{x}-\tilde{K}\tilde{x}=\tilde{F}$

- пределы интегрирования $a,b\in\mathbb{R}$ заменяются близкими к ним рациональными числами $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathbb{Q}_{\text{комп}}$;
- в качестве базисных функций используются полные в $\mathbf{L}_2$ ортонормированные на $[\tilde{a},\tilde{b}]$ системы $\{\varphi_i\}_1^\infty$, состоящие из многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$;
- правая часть $F(t)$ заменяется её аппроксимацией
$$\tilde{F}(t)=\sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i(t);$$
- коэффициенты c_{ij} и d_i в аппроксимациях $\tilde{K}(t,s)$ и $\tilde{F}(t)$ выбираются из $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$.

Все составные части уравнения $\tilde{x}-\tilde{K}\tilde{x}=\tilde{F}$ по построению — рациональные числа и (кусочно) полиномиальные функции с рациональными коэффициентами. Поэтому элементы матрицы A и вектора B в (4) также будут рациональными числами, решение $X=A^{-1}B$ находится *точно* и

$$\tilde{x}(t)=\tilde{F}(t)+\sum_{k=1}^{N} c_{i(k),j(k)}X_k\varphi_{i(k)}(t).$$

точное (без ошибок округления) решение приближённого интегрального уравнения.

С учётом замены F на $\tilde{F}$ выражение (6) примет вид [2: стр. 47]

$$\|x-\tilde{x}\|_{\mathbf{L}_2} \leqslant \frac{\left\|(I-\tilde{K})^{-1}\right\|_{\mathbf{L}_2\to\mathbf{L}_2}\left(\|K-\tilde{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)}\cdot\|\tilde{x}\|_{\mathbf{L}_2}+\|F-\tilde{F}\|_{\mathbf{L}_2}\right)}{1-\left\|(I-\tilde{K})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)}\|K-\tilde{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2)}}.$$

Оно даёт оценку радиуса окрестности с центром в точке $\tilde{x}$, в которой (*гарантированно*!) находится решение исходной задачи x. Нормы операторов и функций в нём вычисляются точно или заменяются *гарантированными* оценками сверху.

В программной реализации на C++ используются библиотека GNU MP (арифметика произвольной точности) и возможности распараллеливания вычислений (OpenMP и т.п.) на процессорах с соответствующей архитектурой. При желании, реализацию можно выполнять и в других средах, поддерживающих работу с целыми числами (потенциально) неограниченной длины и, желательно, распараллеливание вычислений между ядрами процессора, процессорами и/или компьютерами.

Литература

1. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов — 3-е изд., перераб. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 752 с.

2. Шишкин В. А. Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании вариационных задач для квадратичных функционалов: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Пермь, 2009. — 165 с.

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУЦЕНТРОВОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Э.Х. Эйвазов (Баку, БГУ; ИММ НАНА)
eyvazovelshad@gmail.com

В пространстве $W_2^1(-1,2)$ рассматривается краевая задача

$$-y''(x)+\alpha\delta(x)y(x)+\beta\delta(x-1)y(x)=0, \quad -1<x<2, \tag{1}$$

$$y(-1)=h, \quad y(2)=H, \tag{2}$$

где $\alpha,\ \beta,\ h$ и $H-$вещественные числа, а $\delta-$функция Дирака.

Здесь возникают следующие вопросы:

1) когда задача (1)-(2) имеет единственное решение;

2) когда задача (1)-(2) не имеет решение;

3) когда задача (1)-(2) имеет бесконечно много решений;

4) если задача (1)-(2) имеет решение, то как можно найти явный вид этого решения.

В этой работе отвечено на все поставленные вопросы и, в частности, доказана следующая

Теорема. *Если точка (α, β) не принадлежит гиперболе $\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 3 = 0$ с центром $(-2, -2)$, то граничная задача (1)-(2) при любых h и H имеет единственное решение вида*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{H+h(\beta+2)+[H-h(1+2\alpha+\beta+\alpha\beta)]x}{\alpha\beta+2\alpha+2\beta+3}, & -1 < x < 0, \\ \frac{H+h(\beta+2)+[H(\alpha+1)-h(\beta+1)]x}{\alpha\beta+2\alpha+2\beta+3}, & 0 < x < 1, \\ \frac{2h+H(1-2\beta-\alpha\beta)+[H(1+\alpha+2\beta+\alpha\beta)-h]x}{\alpha\beta+2\alpha+2\beta+3}, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Пример. Пусть $\alpha = \beta = -1$ и $h = H = 0$. Тогда задача (1)-(2) имеет бесконечно много решений вида

$$y(x) = C(3 - |x| - |x - 1|), \ -\infty < C < +\infty.$$

На отрезке $(-1, +1)$ при $\beta = 0$ эта задача рассмотрена в работе [1].

Отметим, что задача типа (1)-(2) появляется при исследовании квантовомеханических моделей, описывающих движение частиц в потенциале, сосредоточенном на некотором конечном множестве точек (см., например, [2] и [3]).

Литература

1. Розанов Ю.А. Об уравнении Шрёдингера с обобщенным потенциалом / Ю.А. Розанов // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 4. — С. 191–192.

2. Альбеверио С. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден. — М. : Мир, 1991. — 568 с.

3. Eyvazov E.H. Higher order differential operators with finite number of $\delta-$interactions in multivariate case / E.H. Eyvazov // J. Math. Phys. Anal. Geom. — 2010. — Vol. 6, № 3. — P. 266–276.

О ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ[1]

А.В. Юлдашева (Ташкент, филиал МГУ в Ташкенте)
yuasv86@mail.ru

Нелокальные теории в механике твердого тела, учитывающие эффекты дальнодействующих взаимодействий, такие как перидинамическое моделирование, введенное Силлингом [1], очень актуальны. Перидинамическая теория основана на интегро–дифференциальных уравнениях без какой-либо пространственной производной и может быть описана следующим уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2a\frac{\partial u}{\partial t}+\int\limits_D K(x,y)[u(x,t)-u(y,t)]dy=f(x,t),\ x\in D, t>0, \quad (1)$$

с начальными данными

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), \quad (2)$$

где $D\subset\mathbb{R}^n$ — область с кусочно–гладкой границей,$a>0$— числовой параметр и $n\geqslant 2$.

В данной работе предполагается, что неизвестная функция $u: D\times[0,T]\to\mathbb{R}$, ядро $K: D\times D\to\mathbb{R}$ и внешняя сила $f: D\times[0,T]\to\mathbb{R}$ являются скалярными функциями.

Интегральный оператор уравнения (1) имеет специальное сильно сингулярное ядро, которое вблизи диагонали $x=y$ имеет вид

$$K(x,y)\ =\ \frac{c_n}{|x-y|^n}\ +\ \gamma(x,y),$$

где $\gamma(x,y)$ интегрируемая функция, и выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}K(x,y)\ =\ 0,\quad x\in\partial D,\quad y\in D.$$

Здесь $\nu=\nu(x)$ – внешняя нормаль к границе ∂D области D в точке $x\in\partial D$.

Рассмотрим самосопряжённое расширение оператора Лапласа $-\Delta$, порождённое граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из собственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{v_k(x)\}$ удовлетвряют соотношениям:

$$-\Delta v_k(x)=\lambda_k v(x),\ x\in D,\qquad \frac{\partial v_k(s)}{\partial\nu}=0, s\in\partial D,\quad k=0,1,2,...$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан, (проект № F-FA-2021-424).

Для любого $\beta \geqslant 0$ введём гильбертово пространство $H^\beta(D) = D\big((I-\Delta)^{\beta/2}\big)$ с нормой

$$\|u\|_\beta^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(1+\lambda_k)^\beta |(u,v_k)|^2.$$

Для любых $T > 0$ и $m = 0, 1, ...$ и произвольного банахова пространства B обозначим символом $C^m\big\{[0,T] \to B\big\}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений отрезка $[0,T]$ в B.

Решением задачи (1)–(2) из класса $H^\beta(D)$ назовём функцию $u \in C^2\big\{[0,T] \to H^\beta(D)\big\}$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям (2).

Основной результат данной работы заключается в следующем.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < \alpha/n$. Для любого $T > 0$ и любых $\varphi \in W_2^\alpha(D)$, $\psi \in W_2^\alpha(D)$ и $f \in C\big\{[0,T] \to W_2^\alpha(D)\big\}$ существует, и при том единственное, решение задачи (1)–(2) из класса $C^2\big\{[0,T] \to H^\beta(D)\big\}$.*

Задача Коши для уравнения (1) без младшей производной по времени была исследована в работе [2], а в работе [3] задача (1)–(2) рассматривалась на периодической структуре.

Литература

1. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces / S. A. Silling, // J. Mech. Phys. Solids. — 2000. — Vol. 48, № 1. — P. 175–209.

2. Юлдашева А.В. О разрешимости перидинамического уравнения с сингулярным ядром / Ш.А. Алимов, А.В. Юлдашева // Дифференциальные уравнения — 2021. — Т. 57, № 3. — С. 375–386.

3. Yuldasheva A. The Linear Peridinamic Model in Elasticity Theory / A. Yuldasheva // Lobachevskii J Math. — 2020. — № 41. — С. 137—144.

DETERMINATION OF NON-STATIONARY ADSORPTION COEFFICIENT ANALYTICAL IN PART OF SPATIAL VARIABLES[1]

D.K. Durdiev, Z.D. Totieva (Bukhara, The Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan; Vladikavkaz, North-Caucasus Center for Mathematical Research (VNC RAS))

durdiev65@mail.ru, jannatuaeva@inbox.ru

For multidimen-sional inverse problems there are only special cases for which solvability is established. One of such classes of functions in which local solvability takes place is the class of analytic functions. The technique used here is based on the scale method of Banach spaces of analytic functions, developed in the works of L.V. Ovsyannikov [1] and L. Nirenberg [2]. This method was first applied to the problem of solvability of multidimensional inverse problems by V.G. Romanov [3,4,5]. Our prob-lem is investigated in the class of coefficients that are continuous with respect to the variables t, x and analytic in the variable y. This article generalizes the results of work [4] (sec. 3) for the case of non-stationary potential.

Consider the problem of determining a pair of functions u and a satisfying the equations for $(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2+m}$, $t_0 > 0$:

$$u_{tt} - u_{xx} - \triangle u - a(t, x, y)u_t = g(y)\delta(x)\delta(t - t_0), \tag{1}$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

in which $\triangle$ is the Laplace operator on variables $(y_1, \ldots, y_m) = y$, $\delta(\cdot)$ is the Dirac delta function, $\delta'(\cdot)$ is the derivative of the Dirac delta function, t_0 is a problem parameter, therefore $u = u(t, x, y, t_0)$, $g(y)$ is a given smooth function so that $g(y) \neq 0$ for $y \in \mathbb{R}^m$.

Inverse problem: to find the potential $a(x, t, y)$ in (1), if the solution of the problem (1)–(3) is known for $x = 0$, i.e. the condition

$$u(t, 0, y, t_0) = f(t, y, t_0),\ t > 0,\ t_0 > 0 \tag{3}$$

is given. Following the monograph [4, sec. 3], we introduce into consideration the Banach space $A_s(r)$, $s > 0$, of functions $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^m$, which are analytic in the neighborhood of the origin and satisfy the relation

$$\|\varphi\|_s(r) := \sup_{|y|<r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{s^{|\alpha|}}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(y)| < \infty.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования (соглашение № 075-02-2022-896).

Here $r > 0$ is fixed, $s > 0$ is variable and

$$D^{\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} ... \partial y_m^{\alpha_m}}, \ \alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_m),$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_m, \ \alpha! := (\alpha_1)! \dots (\alpha_m)!.$$

Let $D_T = \Upsilon'_T \times \mathbb{R}^m$, $\Upsilon'_T = \{(t, x, t_0) |\ 0 \leqslant x + t_0 \leqslant t \leqslant T - x\}$, $Q_T := \{(t, t_0) |\ 0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$.

Let $C_{(t,x,t_0)}(\Upsilon'_T;\ A_{s_0})$ denote the class of functions with values in A_{s_0} ($s_0 > 0$) which are continuous in the variables (t, x, t_0) in the domain Υ'_T. For fixed (t, x, t_0), the norm of a function $v(t, x, y, t_0)$ in A_{s_0} will be denoted by $\|v\|_{s_0}(t, x, t_0)$. The norm of a function v in $C_{(t,x,t_0)}(\Upsilon'_T;\ A_{s_0})$ is defined by the equality

$$\|v\|_{C_{(t,x,t_0)}\left(\Upsilon'_T;\, A_{s_0}\right)} = \sup_{(t,x,t_0) \in \Upsilon'_T} \|v\|_{s_0}(t, x, t_0).$$

Let $C_{(t,x)}(G_T;\ A_{s_0})$ be the class of functions with values in A_{s_0} which are continuous in the variables (t, x) in the domain $G_T = \{(t, x) |\ 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant T - x\}$. For fixed (t, x) the norm of a function $a(t, x, y)$ in A_{s_0} will be denoted by $\|a\|_{s_0}(t, x)$. The norm of a function a in $C_{(t,x)}(G_T;\ A_{s_0})$ is defined as

$$\|a\|_{C_{(t,x)}\left(G_T;\, A_{s_0}\right)} = \sup_{(t,x) \in G_T} \|a\|_{s_0}(t, x).$$

Denote also by $C(Q_T; A_{s_0})$ the class of functions with values in A_{s_0} which are continuous with respect to t, t_0 in domain Q_T.

Theorem 1. *Let* $f(+t_0, y, t_0) = 0$, $|g(y)| \geqslant g_0 > 0$, $\left\{\frac{1}{g(y)}, \frac{\triangle g(y)}{g(y)}\right\} \in A_{s_0}; \{f(t, y, t_0), f_t(t, y, t_0)\} \in C(Q_T; A_{s_0})$, *in addition, the relations* $\max\left\{2\left\|\frac{\triangle g(y)}{g(y)}\right\|_{s_0}, \max\limits_{(t,t_0)\in Q_T} \|f(t, y, t_0)\|_{s_0}, \max\limits_{(t,t_0)\in Q_T} \left\|\frac{4f_t(t,y,t_0)}{g(y)}\right\|_{s_0}\right\} \leqslant \frac{R}{2}$ *are valid for some fixed* $s_0 > 0$, R.

Then there there is such a number $b \in (0, T/(2s_0))$, $b = b(s_0, R, T)$ *that for each* $s \in (0, s_0)$ *in the domain* $D_T \cap \{(t, x, y, t_0) : 0 \leqslant x + t_0 \leqslant b(s_0 - s)\}$ *there exists the unique solution to the problem (1)–(3).*

Литература

1. Ovsyannikov L. V. A nonlocal Cauchy problem in scales of Banach spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR. —1971. —Vol. 200, no. 4. P. 789–792.

2. Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis /L. Nirenberg. — New York : Courant Institute Math. Sci., New York Univ, 1974.

3. Romanov V. G. Local solvability of some multidimensional inverse problems for hyperbolic equations // Differ. Equ.. — 1989. —Vol. 25, no. 2. —P. 203–209.

4. Romanov V. G. Stability in Inverse Problems [Russian] /V.G. Romanov. — M. : Nauchnyi Mir, 2005. —296 p.

5. Romanov V. G. On solvability of inverse problems for hyperbolic equations in a class of functions analytic in part of variables // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1989. — Vol. 304, no. 4. P. 807–811. п»ї

ON THE SCATTERING PROBLEM FOR A BOUNDARY VALUE PROBLEM

R.G. Farzullazadeh, Kh.R. Mamedov (Lankaran, Azerbaijan, Lankaran State University, Igdir, Turkey, Igdir University)

framin1992@mail.ru, hanlar.residoglu@igdir.edu.tr

Consider on the half line $[0, \infty)$ the boundary value problem

$$-u'' + q(x)u = \eta^2 u, \tag{1}$$

$$(l_0 + l_1\eta + l_2\eta^2)u'(0) + (r_0 + r_1\eta + r_2\eta^2)u(0) = 0, \tag{2}$$

where η is a spectral parameter, l_j, r_j $(j = 0, 1, 2)$ are real numbers, and the potential $q(x)$ is a real valued function satisfying the condition

$$\int_0^\infty (1 + x)|q(x)|dx < \infty. \tag{3}$$

The inverse scattering problem on the half line for equation (1), which does not contain a spectral parameter in the boundary condition was completely solved in [1, 2]. Moreover, in [3, 4, 5] the inverse scattering problem for (1) with the spectral parameter in the boundary condition was investigated.

In the present work, the scattering data of the boundary value problem (1)-(3) is defined and the properties of the scattering data are investigated.

Литература

1. Marchenko V.A. Sturm-Liouville Operators and Their Applications / V.A. Marchenko. — Kiev. : Naukova Dumka, 1977 (in Russian).

2. Levitan B.M. On the solution of the inverse problem of quantum scattering theory / B.M. Levitan // Mat. Zametki. — 1975. — 17, No. 4. — P. 611–624.

3. Mamedov Kh.R. On the inverse problem for Sturm-Liouville operator with a nonlinear spectral parameter in the boundary condition / Kh.R. Mamedov // J. Korean Math. Soc. — 2009. — 46, No. 6. — P. 1243–1254.

4. Mamedov Kh.R. On the inverse scattering problem for a class of Sturm-Liouville operators / Kh.R. Mamedov, U. Demirbilek // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. : Temat. Obz. — 2021. — Vol. 200. — P. 81–86.

5. Mamedov Kh.R. Recovery of discontinuous differential operators with a spectral parameter in the boundary condition / Kh.R. Mamedov. — Baku. : Chashioglu, 2021 (in Russian).

Robust H_∞ filtering for Markov Jump Time-Delay Systems with Unknown Transition Rates

S.M. Hussin (Izhevsk , Kalashnikov ISTU)
sulimanh17@gmail.com

Markovian jump system (MJS) is a special class of dynamic systems subject which abrupt changes in their dynamics, and the model of system is model linear systems or nonlinear systems, Markov chain determined switching between the models [1]. The Markov jump time-delay systems depend on existence detector which give information about the current state. We supposed that the detector is perfect, so the information about the error always agree with the state of the real system. Even with more complex methods, the detection delay to be zero and there is no error. The aim of this work is to design a filter to Markov jump time-delay systems for estimate the output of a linear system while ensuring that the estimation error is subject to certain limits. The effect of external disturbance in sense of the H_∞ norm of the error should be bounded by γ . Let the following Markov jump time-delay systems (MJTDS), defined on a complete probability space (Ω, F, P), are described as [2]:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + A_1(\theta(t))x(t-\tau(t)) + B(\theta(t))u(t),\ t \geqslant 0,$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is standing for the state variable of the system, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ is the control variable, A_1, A and B are matrices of appropriate dimensions.$\tau(t)$ is time delay satisfies $0 \leqslant \tau(t) \leqslant \overline{\tau(t)}$ where $\overline{\tau(t)}$ is an upper bound of $\tau(t)$. We define the set $S = \{1, 2, \cdots, N\}$, $\{\theta(t), t \geqslant 0\}$ is a Markov chain on the probability space, takes values on set S with transition probability matrix $\Pi = (\pi_{ij})_{N\times N}$ [2]

$$P(\theta(t+h) = j|\theta(t) = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), i \neq j, \\ 1 + \pi_{ij}h + o(h), i = j. \end{cases}$$

And the notation $o(h)$ is function on h such that $h > 0$, $\lim\limits_{n\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ and $\pi_{ij} \geqslant 0 (i, j \in S, i \neq j)$, represents the transition rate from i to j, which satisfies $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i} \pi_{ij}$ for all $i \in S$. Let for π_{ij} the error between them is referred as to $\Delta\pi_{ij}$ which can take any value in $[-\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}]$.

In this work we will design robust H_∞ filtering for Markov jump time-delay systems. By used Lyapunov function we will design the H_∞ filter, and found sufficient conditions to ensure the robustly stochastically stable. Solutions the H_∞ filtering problem based on Linear Matrix Inequalities (LMI), and for the filtering error system must find the H_∞ attenuation level. Finally, we give an example of simulation to elucidate the usefulness of this work.

Литература

1. Kang Y. Stability Analysis of Markovian Jump Systems / Y. Kang, Y.B. Zhao,P. Zhao . — M. : Springer Singapore, 2018. — 200 p.

2. Hussin S.M. Analysis Robust Stabilization for Markov Jump Linear Systems / S.M. Hussin, V.G. Sufiyanov // Интеллектуальные системы в производстве. — 2019. — Т. 17, № 4. — С. 163–166.

ON MAIN EQUATION FOR INVERSE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

Karahan D., Mamedov Kh. R., Hasimoglu I.F.
(Harran University, Igdir University, Karabuk University)
dkarahan@harran.edu.tr

In this work, a boundary value problem for Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient is examined. The main equation is obtained which has an important role in solution of inverse problem for boundary value problem and uniqueness of its solution is proved. Uniqueness theorem for the solution of the inverse problem is given.

Литература

1. Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A., Equation of mathematical physics, Dover Books on Physics and Chemistry, Dover, New York, 1990.

2. Yurko, V. A., Inverse spectral problems and their applications, Saratov, 2001,497 p. (Russian)

3. Rasulov, M. L., Methods of Contour Integration, Series in Applied Mathematics and Mechanics, v.3, North Holland, Amsterdam, 1967.

4. Akhtyamov, A. M., Theory of identification of boundary conditions and its applications, Fizmatlit, Moscow, 2009. (in Russian)

5. Karahan, D., Mamedov, Kh. R., Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm–Liouville operator, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, v. 40, Special Issue, 2014, p. 233-244

ANALYSE EXHALED AIR WITH MASS SPECTROMETRY IN PATIENTS WITH CARDIOVASCULAR AND ONCOLOGICAL DISEASES

Y.M. Karandashev, M.A. Mohammed
(Moscow, Peoples' Friendship University of Russia)
1032199438@pfur.ru

The object of study of this scientific work is the method of mass spectrometry and the development of algorithms that allow classifying patients with cardiovascular and oncological diseases according to the spectrometer data. In the process of writing this work, the advantages and disadvantages of methods suitable for this task were considered. To carry out the experiments, a software package was developed in the Python language using various frameworks. Both classical machine learning algorithms, such as gradient boosting of decision trees and logistic regression, and more complex algorithms from the class of recurrent neural networks have been implemented. The results of their work were compared, such as classification quality, training time, and other parameters. The data obtained as a result of diagnostics were analysed: shortcomings of these data were identified and a conclusion was made about the redundancy of the analysed components of substances when making a diagnosis.

Proton mass spectrometry (PTR—MS) is real-time detection, identification, and quantification method for volatile organic compounds (VOC) that was pioneered by scientists from the Institute of Ion Physics at the Leopold-Franzens University Innsbruck in the mid-1990 years [2].

Over the past decades, the method has gained great popularity in the search for VOC in exhaled air, which can be used as possible diagnostic and non-invasive disease markers.

The aim of this work is to develop algorithms that allow us to classify patients with chronic heart failure and oncological diseases based on the available data.

Using the PTR apparatus, breath analyses of patients of 3 different groups were collected: cardio onco and control groups. For a particular patient, the data is a file that contains the recorded mass spectra. A special role in such studies is allocated to the processing of raw data received from the device. These data were processed by the standard library recommended by the device manufacturer, Ionicon 1000, and the output was a table consisting of 1000 columns, where each column corresponds to the value of m/z (mass-to-charge ratio) and the row corresponds to a second of record. And further work is being done with this data.

By conducting a more detailed analysis of the data (EDA), one can look at the average values of the concentration of the ion $(H_2O)H+$ for each patient, depending on the group of patients to which he belongs. Thus, further data transformation required the addition of statistical columns, columns reflecting the dependence of values on the second of the experiment.

Substance name	Chemical formula	Molar mass [g/mol]
Acetone	C_3H_6O	58.08
Acetic acid	CH_3COOH	60.052
Propylene	C_3H_6	42.081
Formaldehyde	CH_2O	30.026
Ethanol	C_2H_6O	46.069
Xylene	C_8H_{10}	106.16

Table 1. Substances most promising for classification

In accordance with this, all the features corresponding to these substances were augmented, namely: the columns of the maximum value, average value, minimum value, cumulative sum, and median value were added. Experiments have shown that the accuracy of models trained on data with augmentation of the listed features significantly exceeds the accuracy of models trained on the original data, which allows us to conclude that the results of the work [1] are confirmed.

To carry out the necessary experiments, a software package in the Python language was built. The LightGBM library was used to implement the boosting methods. For the Logistic regression, the scikit-learn library was used. Work with LSTM neural networks was carried out mainly using the PyTorch library.

- The analysis of the experiments showed a significant impact of the low balance of the sample on the result of the models. Thus, the main option for improving the performance of models is to increase the number of patients from underrepresented classes.

- The data were considered as strings, for this enrichment methods were invented, in the process of conducting it turned out to understand that despite the direct time series of dependence, the classification does not really play a role

- We have tried different castings, logistic regressions, grid searches, etc.

Method Name	Result on the test sample
Boosting	77.3%
Logistic Regression	71.26%
LSTM	89.54%

Table 2. Models accuracy

Литература

1. Malinovskaya L.K. Application of the method of proton mass-spectrometry exhaled air in the diagnosis of chronic heart failure / L.K. Malinovskaya. — M. : Sechenov University, 2020.

2. Hansel A., Proton transfer reaction mass spectrometry: on-line trace gas analysis at the ppb level / Hansel A., Jordan A., Holzinger R., Prazeller P., Vogel W., Lindinger W. // Int. J. Mass. Spectrom. Ion Process. — 1995. — Vol. 149 —150, P. 609-619.

PROJECT-BASED APPROACH TO THE DEVELOPMENT OF FUNCTIONAL LITERACY MATHEMATICAL IN SECONDARY SCHOOL STUDENTS: LESSONS LEARNT FROM TURKU UNIVERSITY (FINLAND)

S. Khekalo (Kolomna, State University)

khekalo@mail.ru

Mathematical literacy, PISA tests and functional Mathematics are among the most urgent tasks that educators worldwide are now confronted with. To successfully accomplish these tasks, we need to understand what current students are capable of and how we can transform the so-called 'general understanding of Mathematics', which we develop in the classroom, into a transferable skill.

Presented below, are three problems from the Mathematics Project, which is the result of the cooperation between the teachers of Finland and Moscow region. We believe that these cases will give the unofficial «PISA-race» additional momentum.

Glossary

Mathematical literacy — *the system of knowledge, abilities, skills and «universal educational actions» in the field of Mathematics.*

Functional mathematical literacy — *the ability to use mathematical literacy and life experience to solve a wide range of problems in various fields of human activity.*

Case No. 1. «Code Breaker»

(Age group: 11+, Topic: «Divisibility tests»)

Equipment — paper, scissors, pencils (crayons), pens.

Task. Draw (can be prepared in advance) two squares the size 3×3 of a box of a graph pad. Write down the number of the group as assigned by the teacher. Fill in the first square with numbers from 1 to 9 in random order, without repeating them. Multiply the numbers in each row and column and write down the answers in the corresponding rows and under the corresponding columns of the second square. Use the products obtained to determine, which numbers were written in each box of the square.

Comment. It is a good example from Arithmetic (integer division), which shows the students how real-world problems can be solved using mathematical modeling.

Guidelines. Split the students into groups of 4 or 6. Each group fills in the boxes of the squares separately, without showing the others and encrypts the numbers. They keep the first square and hand over the second square to the teacher. The teacher writes down the number of the group, which will get the second square for further use. The teacher tells the groups to write down the numbers from 1 to 9 into empty boxes without repetition, using the known products (do decrypt the code). The groups hand over the decryption results to the teacher, who returns them to the original groups that did the encryption. The groups check the results of decryption and tell the class (under teacher supervision), whether the «code» was decrypted correctly.

Case No. 2 [1]. «Predictor»

(Age group: 15+, Topic: «Sequences»)

Equipment — paper, pens.

Task. Write down the following three members of the sequence: $3; 6; 11; 18; 27; ...; ...; ...$.

Comment. This is a «bad» example from algebra (sequence), which misleads the schoolboy — find the «only correct answer» based on knowledge from mathematics (formulas). Here are two options for improper mathematical reasoning. If $3; 6; 11; 18; 27; x; y; z$ are members of this sequence $\{a_n\}$, then $6-3 = 3; 11-6 = 5; 18-11 = 7; 27-18 = 9; x-27 = 11; y - x = 13; z - y = 15$ is necessary and $x = 38; y = 51; z = 66$ or $a_n = n^2 + 2$ is necessary, so $x = 38; y = 51; z = 66$. However, functional mathematical literacy (knowledge of mathematics for the real world) gives the student a sense that this is not quite true! Here is an example: In May, Julia observed a change of air temperature every two days. She got the following results: $3°C; 6°C; 11°C; 18°C; 27°C$. Julia was waiting for good weather. She likes strawberries very much and the strawberries blossomed! Will Julia anticipate the following temperature change: $38°C; 51°C; 66°C$? Definitely not! From weather lore she knows that the temperature drops when the berries being to blossom. Here is the Julia's forecast: $15°C; 6°C; 0°C$. So, the given math reasoning is not necessary, it is sufficient.

Guidelines. Split the students into 4 groups. Each group must write the sequences so that the first five members are $3; 6; 11; 18; 27$ and the three following are different. Sequences must be necessary defined verbally, recurrently, by the formula of the $n-$term and graphically. How you can predict phenomena in the real life in different ways using these tasks.

Case No. 3 [2]. «The Arnold Task»

(Age group: 14+, Topic: «Rectangular triangle, Area»)

Equipment — paper, pens, GeoGebra.

Task. The hypotenuse of the right triangle is 10 inches, and the height drawn to it is 6 inches. Find the area of this triangle.

Comment. The algebraic part of mathematical literacy tells the student that the data given is enough to calculate the area. This approach leads to a grave error. Functional mathematical literacy (knowledge of mathematics and of the real world) tells the student that such a triangle cannot not exist in the real world.

Guidelines. Ask the student to draw such a triangle and thus solve the problem. If no solution is found, change the task to the next one. Determine the maximum possible height drawn on the hypotenuse of this right triangle using the circle properties. Use the necessary element in the GeoGebra application.

This text based on considerations about the world around us after a walk taken with ArgJulia.

Литература

1. Khekalo S. One pseudo-task about sequence / S. Khekalo // Matematika v shkole (Rus) —2020. — V. 2.

2. http://www.itmathrepetitor.ru/arnold-zadachi-dlia-detei

MATHEMATICAL MODELING OF STRING VIBRATIONS WITH A MOVABLE BOUNDARY

V.L. Litvinov, K.V. Litvinova (Moscow, Moscow State University)

vladlitvinov@rambler.ru

The resonance characteristics of viscoelastic string with moving boundaries using the Kantorovich – Galerkin method are examined in the article. The phenomenon of resonance and steady passage through resonance are analyzed.

One-dimensional systems whose boundaries move are widely used in engineering [1–5]. The presence of moving boundaries causes considerable difficulties in describing such systems. Exact methods for solving such problems are limited by the wave equation and relatively simple boundary conditions. Of the approximate methods, the Kantorovich-Galerkin method described in [5] is the most efficient. However, this method can also be used in more complex cases. This method makes it possible to take into account the effect of resistance forces on the system, the viscoelastic pstringrties of an oscillating object, and also the weak non-stationarity of the boundary conditions.

The paper considers the phenomena of steady-state resonance and passage through resonance for transverse oscillations of a string of variable length, taking into account viscoelasticity and damping forces.

Performing transformations similar to transformations [5], an expression is obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the n-th dynamic mode. Expressions are also obtained that describe the phenomenon of steady state resonance and the phenomenon of passage through resonance.

The expression that determines the maximum amplitude of oscillations when passing through the resonance was numerically investigated to the maximum. The dependence of the string oscillation amplitude on the boundary velocity, viscoelasticity, and damping forces is analyzed.

The results of numerical studies allow us to draw the following conclusions:

- with a decrease in the velocity of the boundary, viscoelasticity and damping forces, the amplitude of oscillations increases;

- as the boundary velocity, viscoelasticity and damping forces tend to zero, the oscillation amplitude tends to infinity;

In conclusion, we note that the above results make it possible to carry out a quantitative analysis of the steady state resonance and the phenomenon of passage through the resonance for systems whose oscillations are described by the formulated problem.

References

1. Vesnitsky A.I., Potapov A.I. Transverse vibrations of strings in mine hoists // Dynamics of systems. Bitter: Bitter. un-t, 1975. Number 7. Pp. 84–89.

2. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Longitudinal vibrations of a viscoelastic string of variable length // Tr. 4th All-Russian. scientific conf. "Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Mathematical modeling and boundary value problems. Samara, 2007. Part 1. Pp. 25–27.

3. Goroshko OA, Savin G.N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Science. Dumka, 1971. Pp.290.

4. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a string moving in the longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific

Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19. No. 4. - Pp.161-165.

5. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich – Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2018. No2. Pp. 70–77.

RIEMANN FORMULA OF SOLUTION TO THE SECOND MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS ON END

F.E. Lomovtsev (Minsk, BSU)
lomovcev@bsu.by

We have proved a global correctness theorem to the mixed problem:

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t)+$$

$$+q(x,t)u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in \dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x > 0, \quad (2);\ \ u_x|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0. \ (3)$$

Let $C^k(\Omega)$ be the set of k times continuously differentiable functions on the subset $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. The characteristic equations $dx - (-1)^i a(x,t)dt = 0$ give the characteristics $g_i(x,t) = C_i$, $i = 1, 2$. If $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, then they decrease strictly in t at $i = 1$ and increase at $i = 2$ with increasing x. Therefore, the functions $y_i = g_i(x,t)$ have inverse functions $x = h_i\{y_i, t\}$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$. If $a \in C^2(G_\infty)$, then g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ to the variables x, t, y_i, $i = 1, 2$ [1].

Theorem. *Let the coefficients of the equation (1) be $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, b, c, $q \in C^1(G_\infty)$. The second mixed problem (1)–(3) in the set $\dot{G}_\infty$ has a unique and stable according to φ, ψ, f, μ classical solution $u \in C^2(G_\infty)$, $G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, if and only if true the smoothness requirements and matching conditions:*

$$\varphi \in C^2[0,+\infty[,\ \psi \in C^1[0,+\infty[,\ \mu \in C^1[0,+\infty[,\ f \in C(G_\infty),$$

$$\int\limits_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1,\ 2, \qquad (4)$$

$$\varphi'(0) = \mu(0),\ \psi'(0) = \mu'(0).$$

The solution to the mixed problem (1)–(3) in $\dot{G}_\infty$ is the function

$$u(x,t) = \frac{(auv)(h_2\{g_2(x,t),\,0\},\,0) + (auv)(h_1\{g_1(x,t),\,0\},\,0)}{2a(x,t)} +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\,0\}}^{h_1\{g_1(x,t),\,0\}}[\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)+b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]\,ds+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\,\tau\}} f(s,\tau)v(s,\tau)\,ds,\ (x,t)\in G_-,$$

$$u(x,t)=\frac{(auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)-(auv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\},0)}{2a(x,t)}+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}[\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)+b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds+$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau)ds-\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)\mu(\rho)d\rho-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}\frac{a_x(0,\rho)}{a(0,\rho)}d\rho\int\limits_0^\rho d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(0,\rho),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}}\breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}d\rho\int\limits_0^\rho\Bigg[\breve{f}(|h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}|,\tau)v(|h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}|,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial h_1\{g_1(x,\rho),\tau\}}{\partial x}\Big|_{x=0}-\breve{f}(|h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}|,\tau)v(|h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}|,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial h_2\{g_2(x,\rho),\tau\}}{\partial x}\Big|_{x=0}\Bigg]d\tau,\ (x,t)\in G_+=G_\infty-G_-,$$

where the functions are $\breve{f}(x,t)=f(x,t)+f^{(0)}(x,t)-f_\mu(x,t)$, $f^{(0)}(x,t)$ *is the restriction on the set* G_+ *of the solution to the system of the Volterra integral equation of second kind and linear algebraic equation and the function* $f_\mu(x,t)=\mathcal{L}\Big(-\int_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}a(0,\rho)\mu(\rho)d\rho\Big)$.

In G_- Riemann function $v(s,\tau)$ corresponds to Goursat problem:

$$v_{\tau\tau}-(a^2(s,\tau)v)_{ss}-(b(s,\tau)v)_\tau-(c(s,\tau)v)_s+$$

$$+q(s,\tau)v=0,\ (s,\tau)\in\Delta MPQ,\tag{5}$$

$$v(s,\tau)=\exp\Big\{\int\limits_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x,t),\rho\},\rho)d\rho\Big\},\ g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$

$$v(s,\tau)=\exp\Big\{\int_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x,t),\rho\},\rho)d\rho\Big\},\ g_2(s,\tau)=g_2(x,t),\tau\in[0,t], \tag{6}$$

where the functions $k_1(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)+3a(s,\tau)a_s(s,\tau)-a_\tau(s,\tau)+c(s,\tau)\}/4a(s,\tau)$ on the curve QM and $k_2(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)-3a(s,\tau)a_s(s,\tau)-a_\tau(s,\tau)-c(s,\tau)\}/4a(s,\tau)$ on the curve MP. In G_+ Riemann function $\tilde{v}(s,\tau)$ corresponds to the Goursat problem:

$$\tilde{v}_{\tau\tau}-(\tilde{a}^2(s,\tau)\tilde{v})_{ss}-(\tilde{b}(s,\tau)\tilde{v})_\tau-(\tilde{c}(s,\tau\tilde{v})_s+\tilde{q}(s,\tau)\tilde{v}=0,(s,\tau)\in\Delta MPQ, \tag{7}$$

$$\tilde{v}(s,\tau)=\exp\Big\{\int_t^\tau \tilde{k}_1(h_1\{g_1(x,t),\ \rho\},\rho)\,d\rho\Big\},\ g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$

$$\tilde{v}(s,\tau)=\exp\Big\{\int_t^\tau \tilde{k}_2(h_2\{g_2(x,t),\ \rho\},\rho)\,d\rho\Big\},\ g_2(s,\tau)=g_2(x,t),\ \tau\in[0,t], \tag{8}$$

with functions $\tilde{k}_1(s,\tau)$ on the curve QM and $\tilde{k}_2(s,\tau)$ on the curve MP, respectively equal to the functions $k_1(s,\tau)$ and $k_2(s,\tau)$ which their even in x extensions $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{q}$ and odd in x extension $\tilde{c}$ of the coefficients a, b, c, q. It is proved that the Goursat problems (5), (6) and (7), (8) with coefficients $a\in C^2(G_\infty)$, b, c, $q\in C^1(G_\infty)$ have the solutions $v\in C^2$ on $G_-=\{(x,t)\in G_\infty : g_2(x,t)>g_2(0,0)\}$ and G_+ respectively.

Corollary. *If the right-hand side f depends only on x or t and is continuous $f\in C[0,+\infty[$ on t or x, then the assertion of this Theorem is true without integral smoothness requirements (4).*

This work was supported by the BRFFR (project No. F22KI-001 dated 05.11.2021).

References

1. Lomovtsev F.E. First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line. / F.E. Lomovtsev // Jour. of the Bel. State University. Mathematics and Informatics. — 2021. — No. 1. — P. 18–38.

GLOBAL CORRECTNESS THEOREM TO THE SECOND MIXED PROBLEM FOR THE MODEL TELEGRAPH EQUATION WITH RATE $a(x,t)$ ON THE END

F.E. Lomovtsev (Minsk, BSU)
lomovcev@bsu.by

It is proved the global correctness theorem to the second mixed problem for the model telegraph equation with variable coefficients:

$$u_{tt} - a^2(x,t)u_{xx} - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t - a(x,t)a_x(x,t)u_x =$$

$$= f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x > 0, \quad (2);\ \ u_x|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0. \quad (3)$$

Let $C^k(\Omega)$ be the set of k times continuously differentiable functions on the subset $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. The characteristic equations $dx - (-1)^i a(x,t)dt = 0$ give the characteristics $g_i(x,t) = C_i$, $i = 1, 2$. If $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, then they decrease strictly in t at $i = 1$ and increase at $i = 2$ with increasing x. Therefore, the functions $y_i = g_i(x,t)$ have inverse functions $x = h_i\{y_i, t\}$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$. If $a \in C^2(G_\infty)$, then g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ to the variables x, t, y_i, $i = 1, 2$ [1].

Theorem. *Let the coefficient of the equation (1) be $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. For the existence of a unique and stable with respect to φ, ψ, f, μ the classical solution $u \in C^2(G_\infty)$, $G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ to the mixed problem (1)–(3) in $\dot{G}_\infty$, it is necessary and sufficient the smoothness requirements and matching conditions:*

$$\varphi \in C^2[0,+\infty[,\ \psi \in C^1[0,+\infty[,\ \mu \in C^1[0,+\infty[,\ f \in C(G_\infty),$$

$$H_i(x,t) \equiv \int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1,\ 2, \qquad (4)$$

$$\varphi'(0) = \mu(0),\ \psi'(0) = \mu'(0).$$

The solution to the second mixed problem (1)–(3) is the function

$$u(x,t) = \frac{\varphi(h_2\{g_2(x,t),\,0\}) + \varphi(h_1\{g_1(x,t),\,0\})}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{h_2\{g_2(x,t),\,0\}}^{h_1\{g_1(x,t),\,0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)}\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\,\tau\}} \frac{f(s,\tau)}{a(s,\tau)}\,ds,\ (x,t)\in G_-, \tag{5}$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(h_1\{g_1(x,t),\,0\}) + \varphi(h_1\{g_1(0,\,h^{(2)}[0,\,g_2(x,t)]),\,0\})}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h_1\{g_1(x,t),\,0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)}\,d\nu + \frac{1}{2}\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,\,h^{(2)}[0,\,g_2(x,t)]),\,0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)}\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\,\tau\}} \frac{f(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}\,ds \; - \int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} a(0,\rho)\mu(\rho)d\rho +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} d\rho \int\limits_0^{\rho} \left[\frac{f(|h_1\{g_1(0,\rho),\,\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(0,\rho),\,\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(0,\rho),\,\tau\}}{\partial\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{f(|h_2\{g_2(0,\rho),\,\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(0,\rho),\,\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(0,\rho),\,\tau\}}{\partial\rho}\right] d\tau,\ (x,t)\in G_+. \tag{6}$$

Sketch of proof. Formulas (5) and (6) of the classical solution $u \in C^2(G_\infty)$ to the second mixed problem (1)–(3) are derived by the characteristic method from the general integral of all twice continuously differentiable solutions of the equation (1). This method ensures the uniqueness of classical solution. Its stability with respect to φ, ψ, μ, f on G_- and G_+, respectively, follows from explicit formulas (5) and (6). For any $0 < T < +\infty$, solution (5) continuously depends in the Banach space $X^{(1)} = C^2(G_T^-)$ on φ, ψ, f in the product $Y^{(1)}$ of Banach spaces $C^2[0,+\infty[$, $C^1[0,+\infty[, \widehat{C}(G_T^-)$, where the sets $G_T^- = G_T \cap G_-$, $G_T = \{(x,t)\in G_\infty : 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, according to the norms:

$$\|u(x,t)\|_{C^2(G_T^-)} = \sup_{(x,t)\in G_T^-} \sum_{0\leqslant p+j\leqslant 2} \left|\frac{\partial^{p+j}u(x,t)}{\partial^p x \partial^j t}\right|,\ \|\varphi(x)\|_{C^2[0,+\infty[} =$$

$$= \sup_{0\leqslant x<+\infty} \sum_{m=0}^{2} |\varphi^{(m)}(x)|,\ \|\psi(x)\|_{C^1[0,+\infty[} = \sup_{0\leqslant x<+\infty} \sum_{m=0}^{1} |\psi^{(m)}(x)|,$$

$$\|f(x,t)\|_{\widehat{C}(G_T^-)} = \sup_{(x,t)\in G_T^-} \left(|f(x,t)| + \sum_{i=1}^{2} \sum_{0\leqslant p+j\leqslant 1} \left|\frac{\partial^{p+j}H_i(x,t)}{\partial^p x \partial^j t}\right| \right).$$

For any $0 < T < +\infty$ solution (6) depends continuously in the Banach space $X^{(2)} = C^2(G_T^+)$ on φ, ψ, mu, f in the product $Y^{(2)}$ of

Banach spaces $C^2[0,\Upsilon_T]$, $C^1[0,\Upsilon_T]$, $C^2[0,T], \widehat{C}(G^T)$, where the sets $G_T^+ = G^T \cap G_+$, $G^T = \{(x,t) \in G_\infty : g_1(x,t) \leqslant g_1\big(h_2\{g_2(0,0),T\},T\big)$, $0 \leqslant t\ leqT\}$ and $\Upsilon_T = h_1\{g_1\big(h_2\{g_2(0,0),T\},T\big),0\}$, with norms:

$$\|u(x,t)\|_{C^2(G_T^+)} = \max_{(x,t)\in G_T^+} \sum_{0\leqslant p+j\leqslant 2} \left|\frac{\partial^{p+j} u(x,t)}{\partial^p x \partial^j t}\right|, \ \|\varphi(x)\|_{C^2[0,\Upsilon_T]} =$$

$$= \max_{0\leqslant x\leqslant \Upsilon_T} \sum_{m=0}^{2} \left|\frac{d^m \varphi(x)}{dx^m}\right|, \ \|\psi(x)\|_{C^1[0,\Upsilon_T]} =$$

$$= \max_{0\leqslant x\leqslant \Upsilon_T} \sum_{m=0}^{1} \left|d^m \psi^{(m)}(x)\right|, \ \|\mu(t)\|_{C^2[0,T]} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{m=0}^{2} \left|\mu^{(m)}(t)\right|,$$

$$\|f(x,t)\|_{\widehat{C}(G^T)} = \max_{(x,t)\in G^T} \left(|f(x,t)| + \sum_{i=1}^{2} \sum_{0\leqslant p+j\leqslant 1} \left|\frac{\partial^{p+j} H_i(x,t)}{\partial^p x \partial^j t}\right|\right).$$

Corollary. *If the right-hand side f depends only on x or t and is continuous $f \in C[0,+\infty[$ on t or x, then the assertion of this Theorem is true without integral smoothness requirements (4).*

Note. The global correctness theorem with explicit formulas of the classical solution to the first mixed problem for model telegraph equation (1) with rate $a(x,t)$ has been deduced in [1, 2].

Work is supported by BRFFR (project No. F22KI-001 of 05.11.2021).

References

1. Lomovtsev F.E. First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line. / F.E. Lomovtsev // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021. — No. 1. — P. 18–38.

2. Lomovtsev F.E. Solution and correctness criterion to the first mixed problem for the oscillation equation with variable rate $a(x,t)$. / F.E. Lomovtsev // Internat. Confer. «Voronezh Winter Mathematical School». January 28 - February 2, 2021). — Voronezh: VSU Publishing House, 2021. — P. 194.

ON THE APPROXIMATION OF THE SOLUTION OF A LINEAR THREE-TIME-SCALE SINGULARLY PERTURBED CONTROL SYSTEM WITH DELAY

C.A. Naligama (Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus)

Let $p \triangleq \frac{d}{dt}$ be the differentiation operator, $h = const > 0$, e^{-ph} be the delay operator: $e^{-ph}v(t) = v(t-h)$, $e^{-jph}v(t) = v(t-jh)$. The following Three-time-scale Singularly Perturbed Linear Time-invariant

Control System with Multiple Commensurate Delays in the slow state variables (TSPLTISD) is considered in the matrix-operator form:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\left(e^{-ph}\right) & A_{12} & A_{13} \\ \frac{A_{21}\left(e^{-ph}\right)}{\varepsilon_1} & \frac{A_{22}}{\varepsilon_1} & \frac{A_{23}}{\varepsilon_1} \\ \frac{A_{31}\left(e^{-ph}\right)}{\varepsilon_2} & \frac{A_{32}}{\varepsilon_2} & \frac{A_{33}}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\varepsilon_1} \\ \frac{B_3}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} u(t), t \in [0,T] \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $z \in \mathbb{R}^{n_3}$ and with initial conditions: $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}, z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^{n_3}$, $x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0)$. Here, $A_{i1}\left(e^{-ph}\right) \triangleq \sum\limits_{j=0}^{l} A_{i1j} e^{-jph},\ i = \overline{1,3}$, are matrix operators, A_{i1j}, $A_{i2}, A_{i3}, B_i,\ i = 1, 2, 3,\ j = \overline{0, l}$, are constant matrices of compartible orders; $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$; x, y, z are the slow, fast and fastest variables respectively; $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0)$ is a piecewise continuous n_1-vector function; $u \in U, U$ is a set of piecewise continuous r-vector control functions for $t \geqslant 0$. Let $\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, n_1 + n_2 + n_3 = n$.

As a result of the nonlocal change of variables in the system (1), using the non-degenerate transformation $T(\mu, e^{-ph})$ [1,2], TSPLTISD (1) is decomposed into three independent subsystems with separated motions and controls of lower dimension (relatively faster, fast and slow variables), which for sufficiently small $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ are asymptotically approximated with an accuracy of $O(\mu)$ by the system:

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}^0(t) = A_s\left(e^{-ph}\right)\xi^0(t) + B_s u_s(t), \\ &\varepsilon_1 \dot{\eta}^0(t) = A_{f_1}\eta^0(t) + B_{f_1} u_{f_1}(t), \\ &\varepsilon_2 \dot{\beta}^0(t) = A_{f_2}\beta^0(t) + B_{f_2} u_{f_2}(t), \end{aligned} \tag{2}$$

where,
$A_s\left(e^{-ph}\right) = A_{11}\left(e^{-ph}\right) - A_{12}L_1^{00}\left(e^{-ph}\right) - A_{13}L_2^{00} + A_{13}L_3^{00}L_1^{00}\left(e^{-ph}\right)$,
$B_s = B_1 - H_1^{00}(B_2 - H_3^{00}B_3) - H_2^{00}B_3, A_{f_1} = A_{22} - A_{23}L_3^{00}, B_{f_1} = B_2 - H_3^{00}B_3 - A_{23}L_3^{00}, A_{f_2} = A_{33}, B_{f_2} = B_3$.
$L_1^{00}\left(e^{-ph}\right) = \left[A_{22} - A_{23}L_3^{00}\right]^{-1}\left[A_{21}\left(e^{-ph}\right) - A_{23}L_2^{00}\right]$,
$L_2^{00}\left(e^{-ph}\right) = A_{33}^{-1}A_{31}\left(e^{-ph}\right), L_3^{00} = A_{33}^{-1}A_{32}$,
$H_1^{00} = \left[A_{12} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32}\right]\left[A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}\right]^{-1}$,
$H_2^{00} = A_{13}A_{33}^{-1}, H_3^{00} = A_{22}A_{33}^{-1}$.

Theorem. Let det $A_{33} \neq 0$ and det $[A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}] \neq 0$. Then for sufficiently small $\varepsilon_1 > 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ the solution of the system (1) with $u(t) = u_s(t) + u_{f_1}(t) + u_{f_2}(t)$ is uniformly approximated for any $t \in [nlh, T]$:

$$\begin{aligned} &x(t) = \xi^0(t) + O(\mu), \\ &y(t) = \eta^0(\tau_{\varepsilon_1}) - L_1^{00}\left(e^{-ph}\right)\xi^0(t) + O(\mu), \tau_{\varepsilon_1} = \tfrac{t}{\varepsilon_1}, \\ &z(t) = \beta^0(\tau_{\varepsilon_2}) + L_3^{00}L_1^{00}\left(e^{-ph}\right)\xi^0(t) - L_2^{00}\left(e^{-ph}\right)\xi^0(t) - \\ &\qquad - L_3^{00}\eta^0(\tau_{\varepsilon_1}) + O(\mu), \tau_{\varepsilon_2} = \tfrac{t}{\varepsilon_2}, \end{aligned}$$

where ξ^0, η^0, β^0 are solutions of the systems (2) with controls u_s, u_{f_1}, u_{f_2}, initial conditions, $\xi(0) = x_0, \xi(\theta) = \varphi(\theta), \eta(0) = y_0 + L_1^{00}\left(e^{-ph}\right)\varphi(0)$, $\eta(\theta) = L_1^{00}\left(e^{-ph}\right)\varphi(\theta), \beta(0) = z_0 + L_2^{00}\left(e^{-ph}\right)\varphi(0) + L_3^{00}y_0, \beta(\theta) = L_2^{00}\left(e^{-ph}\right)\varphi(\theta), \theta < 0$.

Sketch of Proof. Similar to [3], taking into account the approxim- -ated subsystems and the continuous dependence of solutions to the system (2) on initial data and parameters, the approximation: $\xi(t) = \xi^0(t) + O(\mu)$, $\eta(t) = \eta^0(t) + O(\mu)$ $\beta(t) = \beta^0(t) + O(\mu)$ is derived. Applying the inverse of the transformation (2) to the derived result proof of the Theorem is completed.

References

1. Naligama C.A. Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegener- -ate transformation / C.A. Naligama, O.B. Tsekhan // Vesnik GrDU Imja Janki Kupaly. Ser. 2 Matjematyka, 2021. pp. 27-36.

2. Naligama C.A. Asymptotic approximations of a decoupling transforma- -tion for three-time scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay// C.A. Naligama, O.B. Tsekhan // Vesnik GrDU Imja Janki Kupaly. Ser. 2 Matjematyka, 2022. pp. 25-36.

3. Tsekhan O.B. On the first-order approximation of the solution of a linear singularly perturbed system with constant delay state /O.B.Tsekhan // International Scientific Conference «DYNAMIC SYSTEMS: STABILITY, CONTROL, OPTIMIZATION» (DSSCO'21) in memory of Professor R.F. Gabasov's theses, October, 05-08, 2021. – P. 196-198.

REDUCING SMOOTH FUNCTIONS TO NORMAL FORMS NEAR CRITICAL POINTS[1]

A.S. Orevkova (Moscow, Moscow State University)

s15b3_orevkova@179.ru

The talk is devoted to the "uniform" reduction of smooth functions on 2-dimensional manifolds to the canonical form near the critical points of these functions. We consider a smooth function of two variables.

Definition. *An infinitely smooth function $f = f(u_1, u_2)$ has* a singularity E_6 *at the critical point $P \in \mathbb{R}^2$ if*

(i) the first and second differentials $df(P) = 0$, $d^2f(P) = 0$, and the third differential is $d^3f(P) \neq 0$ and is a perfect cube;

[1] The author is a stipendiant of the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation "BASIS".

(ii) there exists a vector $v \in \operatorname{Ker} d^3 f(P)$ *such that* $v^4 f \neq 0$ *(by* $v^4 f$ *we mean the fourth derivative of* f *along the tangent vector* v *in* P*).*

Theorem 1 (Reducing E_6 to normal form [1])**.** *Let the function* $f(u_1, u_2)$ *have a singularity* E_6 *at the critical point* P*. Then in some of its neighborhood there is a local coordinate system in which the point* P *is the origin, and the function has the normal form* $f = f(P) + \tilde{x}^3 \pm \tilde{y}^4$.

Our purpose is to estimate the size of the neighborhood mentioned in Theorem 1 in terms of the C^r-norm of the function f for some r (in fact, $r = 7$ in our case).

By the sequence of substitutions described in [1] leaving the origin fixed, we reduce the function f to such a form that $f^{(k+l)}_{x^k y^l}(0,0) = 0$ for $k < 3$, $l < 4$ with $k + l > 0$. It follows from definition that $f'''_{x^3}(0,0) \neq 0$ and $f^{(4)}_{y^4}(0,0) \neq 0$. We can and will assume that the following is true:

Assumption 1. *Suppose that* $f'''_{x^3}(0,0) = 6$, $f^{(4)}_{y^4}(0,0) = 24$.

Using the Taylor series expansion of the function with an integral remainder, we see that the function is reduced to the required normal form $f = f(P) + \tilde{x}^3 + \tilde{y}^4$ by the coordinate change $\varphi(x,y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ where $\tilde{x} = x\sqrt[3]{g(x,y)}$, $\tilde{y} = y\sqrt[4]{h(x,y)}$, $g(x,y) := \sum_{k=0}^{3} \frac{y^k}{k!} f^{(k)}_{y^k}(x,0)/x^3$, $h(x,y) := \frac{1}{6}\int_0^1 f^{(4)}_{y^4}(x, sy)(1-s)^3\, ds$.

Let us formulate our main result describing the desired neighborhood.

Theorem 2 (Estimate for the neighborhood radius of regularity of the coordinate change)**.** *Under the hypotheses of Theorem 1 and Assumption 1, let* $U_0 = \{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) < R_0\}$ *be a neighborhood of the origin such that* $C_{\alpha\beta} = \sup_{U_0} \left|f^{\alpha+\beta}_{x^\alpha y^\beta}(x,y)\right| \leqslant M$ *for* $(\alpha, \beta) \in \{(0,5),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3)\}$*, where* $R_0 > 0$*,* $M \geqslant 0$*. Consider the neighborhood* $U = \{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) < R\}$*, where* $R = \min\{R_0, \frac{2}{M+2}\}$*. Let also* φ *be the coordinate change from above that reduces* f *to the normal form* E_6*. Then* φ *is a regular coordinate change in* U*. In more detail:*
(a) the functions $h(x,y)$ *and* $g(x,y)$ *do not change sign in* U*, that is, the coordinate change* $\varphi|_U$ *is well-defined and is* C^∞*-smooth;*
(b) at each point $\boldsymbol{x} \in U$*, one has* $\|\varphi'(\boldsymbol{x}) - I\| < C < 1$*, where* $C = \frac{2}{5}$*, i.e. the change* $\varphi|_U$ *is* C^1*-close to the identity;*
(c) the change $\varphi|_U$ *is injective and regular, i.e. it is an embedding and* $\det|\varphi'(\boldsymbol{x})| \neq 0$ *for all* $\boldsymbol{x} \in U$*, moreover the image of this embedding contains the disk of radius* $(1 - C)R$ *centred at the origin.*

We also obtain a similar result for the singularity E_8.

Similar results on "uniform" reduction of functions near critical points to canonical forms were known earlier for the case of smoothly stable functions [2]. Uniform reduction of smooth functions to the canonical form by C^r-smooth changes (for $r < \infty$) is known for finite-type singularities [3] and topologically stable functions [4].

Our proof of Theorem 2 uses the following key lemma.

Lemma 1. *Let* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *be a smooth mapping, where* U *is a convex open subset of* $\mathbb{R}^n$. *Let* $\varphi'(\mathbf{x}) = I + A(\mathbf{x})$, *where* I *is the unit matrix of dimension* n, $\|A\| < C$, $0 < C < 1$. *Then* φ *is injective and* $\det|\varphi'(\mathbf{x})| \neq 0$ *for each* $\mathbf{x} \in U$, *i.e.,* φ *is a diffeomorphism to its image* $\varphi(U)$, *moreover* $\langle \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geqslant (1 - C)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$ *for all* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$.

Литература

1. Arnol'd V.I. Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities / V.I. Arnol'd // Funct. Anal. Appl. — 1972. — V. 6, № 4. — P. 254–272.

2. Mather J.N. Infinitesimal stability implies stability / J.N. Mather // Ann. of Math. — 1969. — V. 89. — P. 254–291.

3. Samoilenko A.M. The equivalence of a smooth function to a Taylor polynomial in the neighborhood of a finite-type critical point / A.M. Samoilenko // Funct. Anal. Appl. — 1968. — V. 2, № 4. — P. 318–323.

4. Brodersen H. M-t topologically stable mappings are uniformly stable / H. Brodersen // Math. Scand. — 1983. — V. 52. — P. 61–68.

Именной указатель

Научное издание

Международная конференция
Воронежская весенняя математическая школа
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXIII
(3–9 мая 2022 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета *С.А. Шаброва*

Подписано в печать 01.04.2022. Формат 60×84/16.
Усл. п.л. 20,4. Уч.–изд. л. 21,0. Тираж 300 экз. Заказ 531.

Издательский дом ВГУ
394000 г. Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ:
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3