

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова
Российской академии наук

*Посвящается памяти
Александра Дмитриевича Баева*

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы
Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXII

(3–9 мая 2021 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2021

УДК 517.53(97; 98)

ББК 22.16

С56

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

Е. И. Моисеев (председатель), А. В. Боровских (зам. председателя), И. С. Ломов (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), В. В. Власов, А. В. Глушко, М. Л. Гольдман, В. Г. Задорожный, В. Г. Звягин, М. И. Каменский, В. А. Костин, Г. А. Курина, В. И. Рязских, Е. М. Семенов, С. М. Ситник, А. П. Солдатов, А. И. Шашкин, А. С. Шамаев

ОРГКОМИТЕТ:

Е. И. Моисеев (председатель), Д. А. Ендовицкий (сопредседатель), В. А. Садовничий (сопредседатель), М. Ш. Бурлуцкая (зам. председателя), О. А. Козадеров (зам. председателя), И. С. Ломов (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), И. В. Астахова, А. В. Боровских, Я. М. Ерусалимский, Д. В. Костин, М. С. Никольский, С. А. Шабров, А. С. Бондарев (ученый секретарь), И. В. Колесникова (технический секретарь)

Современные методы теории краевых задач : материалы
С56 Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXXII» (3–9 мая 2021 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова ; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. — 334 с.

ISBN 978–5–9273–3219–9

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXXII», которая посвящена памяти Александра Дмитриевича Баева.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, преподавания математики.

УДК 517.53(97; 98)

ББК 22.16

- © Воронежский государственный университет, 2021
- © Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 2021
- © Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, 2021
- © Оформление. Издательский дом ВГУ, 2021

ISBN 978–5–9273–3219–9

Памяти Александра Дмитриевича Баева



11.03.1955 — 31.12.2020

Александр Дмитриевич Баев — доктор физико-математических наук, Почетный работник высшего профессионального образования РФ, декан математического факультета, заведующий кафедрой математического анализа ВГУ.

Родился Александр Дмитриевич 11 марта 1955 года в г. Задонске Липецкой области. После окончания в 1977 г. университета работал в институте экономики при ВГУ, затем преподавал на кафедре уравнений в частных производных и теории вероятностей.

После защиты кандидатской диссертации в 1982 г. (руководитель — Глушко В.П.) работал доцентом, несколько лет был заместителем декана факультета по вечернему отделению.

В 2004 г. избран на должность декана математического факультета, и до последних дней руководил факультетом. В достаточно трудные годы преобразований в высшей школе он смог сохранить научный потенциал факультета, развить учебно-лабораторную базу.

В 2008 г. успешно защитил докторскую диссертацию; а в 2012 ему было присвоено ученое звание профессора. С 2008 г. возглавил кафедру математического анализа. В 2011 г. стал председателем диссертационного совета.

Основное направление научных исследований А.Д. Баева — псевдодифференциальные уравнения и операторы с вырождением, возникающие в процессах и моделях, которые описываются краевыми задачами для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, а на границе области вырождаются и меняют как порядок, так тип уравнения. И если есть подходы, основанные на исследовании новых классов псевдодифференциальных операторов, построенных по преобразованию Фурье (работы М.И. Вишика и В.В. Грушина, С.З. Левендорского), то в работах В.П. Глушко и А.Д. Баева применялся подход, основанный на исследовании псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию. Такой подход позволил рассмотреть более общие классы вырождающихся уравнений, в частности, отказаться от предположений о монотонности и бесконечной дифференцируемости функций, определяющих характер вырождения.

Александр Дмитриевич активно работал с молодежью. Под его руководством защищено более 10 кандидатских диссертаций. Он активно участвовал в работе со школьниками и абитуриентами. Являлся многократным председателем предметной комиссии на вступительных экзаменах, председателем экспертной комиссии ЕГЭ.

Многие годы А.Д. Баев являлся соорганизатором регулярных международных конференций: Воронежских зимних и весенних математических школ.

Александр Дмитриевич был замечательным светлым человеком, которого уважали коллеги и очень любили студенты. Светлая ему память. . .

**О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО –
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО
ПОРЯДКА**

Г.Э. Абдурагимов (Махачкала, ДГУ)
gusen_e@mail.ru

Вопросам исследования существования и единственности положительных решений функционально – дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, в которых основным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании теории полуупорядоченных пространств, тесно связанной с именами Ф. Рисса, М.Г. Крейна, Л.В. Канторовича и др. В последующем методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М.А. Красносельским, и его учениками Л.А. Ладыженским, И.А. Бахтиным, В.Я. Стеценко, Ю.В. Покорным и др.

Данная работа является продолжением исследований автора, например [1,2], посвященным вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных функционально – дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$\alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0, \quad (3)$$

где α_{ij}, β_{ij} ($i, j = 1, 2$) – действительные числа, $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) – линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна, возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Обозначим через \tilde{K} – конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C , удовлетворяющих условию

$$\min_{t \in [0,1]} x(t) \geq \frac{m}{M} \max_{t \in [0,1]} x(t) = \frac{m}{M} \|x\|_C$$

где m и M – соответственно нижняя и верхняя оценки функции Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2)–(3).

Теорема 1. Предположим, что $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ — положительный на конусе \dot{K} оператор и выполнены условия

$$1) f(t, u) \leq a(t) + bu, \text{ где } a(t) \in \mathbb{L}_p, \quad b > 0;$$

$$2) \gamma < \frac{m}{bM^2}, \text{ где } \gamma \text{ — норма оператора } T;$$

$$3) m \int_0^1 f(s, (T1)(s)) ds \geq 1.$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Теорема 2. Пусть $a(t) \equiv 0$, выполнены условия теоремы 1 и

$$f(t, \tau u) \geq \tau f(t, u), \quad t \in [0, 1], \quad u \geq 0, \quad \forall \tau \in (0, 1).$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение.

Литература

1. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма - Лиувилля для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения второго порядка / Г.Э. Абдурагимов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика — 2019. — №4. — С. 38–46.

2. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения второго порядка / Г.Э. Абдурагимов // Известия вузов. Серия: Математика — 2020. — №12. — С. 3–7.

НАЧАЛЬНО КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А.Б. Алиев, В.Ф. Гасимова (Баку, ИММ НАН Азербайджана
alievakbar@gmail.com , qvf82@gmail.ru)

В области $[0, +\infty) \times \Pi$, где $\Pi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ рассмотрим начально краевую задачу

$$\begin{cases} u_{1tt} + \Delta_{I_1}^2 u_1 - \Delta_{J_1} u_1 + u_{1t} - \lambda |u_1|^{p_1-1} |u_2|^{p_2+1} u_1 = 0, \\ u_{2tt} + \Delta_{I_2}^2 u_2 - \Delta_{J_2} u_2 + u_{2t} - \lambda |u_1|^{p_1+1} |u_2|^{p_2-1} u_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$u_k(t, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0, \quad x_i = a_i, \quad x_i = b_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\Delta_{I_k} u_k(t, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0, \quad x_i = a_i, \quad x_i = b_i, \quad i \in I_k, \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

$$u_k(0, x) = \varphi_k(x), \quad u_{kt}(0, x) = \psi_k(x), \quad x \in \Pi, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

где $I_k \subset N_n = 1, 2, \dots, n$, $J_k = N_n/I_k$, $\Delta_{I_k}^2 = \Delta_{I_k} \cdot \Delta_{I_k}$, $\Delta_{I_k} = \sum_{s \in I_k} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$, $\Delta_{J_k} = \sum_{s \in J_k} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$. Не нарушая общности предположим, что

$$m_1 \leq m_2, \quad (5)$$

где $m_k = |I_k| = \sum_{s \in I_k} 1$, $k = 1, 2$. Система типа (1) возникают при исследовании колебательно-деформируемых систем подвижных нагрузок [1].

Задача (1)-(4) исследуется при выполнении следующих условий

- 1) $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ если $n + m_2 \leq 4$ и $n + m_1 \leq 4$;
- 2) $p_1 > 0$, $p_2 \leq \frac{4}{n+m_2-4}$, если $n + m_1 < 4$ и $n + m_2 > 4$;
- 3) $p_1 \leq \frac{4}{n+m-4}$, $p_2 \leq \frac{4}{n+m-4}$, если $m_1 = m_2 = m$ и $n + m > 4$.

Через $W_{2,k}^{2s,s}$, $k = 1, 2$ обозначим функциональные пространства с конечной нормой:

$$\|u\|_{W_{2,k}^{2s,s}}^2 = \left\{ \|u\|^2 + \sum_{i \in I_k} \|D_{x_i}^{2s} u\|^2 + \sum_{j \in J_k} \|D_{x_j}^s u\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $s = 1, 2$, $k = 1, 2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Pi)}$.

$\check{W}_{2,k}^{2,1} = \{u : u \in W_{2,k}^{2,1}, u_k(t, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0, x_i = a_i, x_i = b_i, i = 1, \dots, n; \Delta_{I_k} u_k(t, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0, x_i = a_i, x_i = b_i, i \in I_k\}$, $k = 1, 2$.

Теорема 1. Пусть выполнено выполнены предположение (5) и условия 1-3. Тогда существует такое $T' > 0$, что при любых $((\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2)) \in U_\delta^1 \times U_\delta^2$ задача (1)-(4) имеет единственное решение $(u_1, u_2) \in C([0, T']; W_{2,1}^{2,1} \times W_{2,2}^{2,1}) \cap C^1([0, T']; L_2(\Pi) \times L_2(\Pi))$.

Теорема 2. Пусть $\lambda \leq 0$, выполнены предположение (5) и условия 1-3. Тогда при любых $T > 0$ $((\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2)) \in U_\delta^1 \times U_\delta^2$ задача (1)-(4) имеет единственное решение $(u_1, u_2) \in C([0, T]; W_{2,1}^{2,1} \times W_{2,2}^{2,1}) \cap C^1([0, T]; L_2(\Pi) \times L_2(\Pi))$.

Теорема 3. Предположим, что $\lambda > 0$, выполнены предположение (5) и условия. Пусть $(\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2) \in \widehat{W}_{2,1}^{2,1} \times L_2(R^n) \times \widehat{W}_{2,2}^{2,1} \times L_2(R^n)$ и

$$\sum_{j=1}^2 (p_j + 1) [\|\psi_j\|^2 + \|\Delta_{I_j} \varphi_j\|^2 + \|\nabla_{J_j} \varphi_j\|^2] - - \\ - 2 \int_{\Pi} |\varphi_1|^{p_1+1} |\varphi_2|^{p_2+1} dx < 0.$$

Тогда слабое решение задачи (1)-(4) разрушается за конечное время.

Литература

1. С.С.Кохманюк, Е.Т.Янютин, Л.Г.Романенко, Колебания деформируемых систем при импульсивных и подвижных нагрузках Киев «Наукова думка» 1980, 231 стр

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ВЫПУКЛОМ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОМ ТЕЛЕ С ПОЛУПРОЗРАЧНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ¹

А.А. Амосов (Москва, НИУ МЭИ)

AmosovAA@mpei.ru

Рассматривается задача, описывающая стационарный процесс радиационно-кондуктивного теплообмена в ограниченном выпуклом абсолютно черном теле $\widehat{G} \subset \mathbb{R}^3$, содержащем подобласть G_s , заполненную полупрозрачным материалом с коэффициентами поглощения $\kappa > 0$, рассеяния $s \geq 0$ и преломления $k \geq 1$. Предполагается, что $\overline{G}_s \subset \widehat{G}$ и $G_b = \widehat{G} \setminus G_s$ – область.

Искомые функции $u_b(x)$, $u_s(x)$ и $I(\omega, x)$ имеют физический смысл абсолютной температуры в G_b , G_s и интенсивности излучения, распространяющегося в G_s в направлении $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid |\omega| = 1\}$. Процесс радиационно-кондуктивного теплообмена описывается си-

¹ Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

© Амосов А.А., 2021

стемой уравнений

$$-\operatorname{div}(\lambda(x, u_b)\nabla u_b) = f, \quad x \in G_b, \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(\lambda(x, u_s)\nabla u_s) + 4\kappa k^2 h(u_s) = \kappa \int_{\Omega} I d\omega + f, \quad x \in G_s, \quad (2)$$

$$\omega \cdot \nabla I + (\kappa + s)I = s\mathcal{S}(I) + \kappa \frac{k^2}{\pi} h(u_s), \quad (\omega, x) \in D = \Omega \times G_s. \quad (3)$$

Здесь $\lambda(x, u)$ – коэффициент теплопроводности, f – плотность тепловых источников. Функция $h(u) = \sigma_0 |u|^3$, где $\sigma_0 > 0$ – постоянная Стефана-Больцмана, отвечает полусферической плотности излучения абсолютно черного тела. В уравнении (3), описывающем перенос излучения, $\mathcal{S}(I)(\omega, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \theta(\omega' \cdot \omega) I(\omega', x) d\omega'$ – оператор рассеяния.

Заметим, что $\partial G_b = \partial \widehat{G} \cup \partial G_s$. Пусть n_b и n_s – внешние нормали к ∂G_b и ∂G_s . Положим $\Gamma = \Omega \times \partial G_s$, $\Gamma^- = \{(\omega, x) \in \Gamma \mid \omega \cdot n_s(x) < 0\}$, $\Gamma^+ = \{(\omega, x) \in \Gamma \mid \omega \cdot n_s(x) > 0\}$ и дополним систему (1) - (3) краевыми условиями

$$\lambda(x, u_b) \frac{\partial u_b}{\partial n_b} + h(u_b) = g, \quad x \in \partial \widehat{G}, \quad (4)$$

$$\lambda(x, u_b) \frac{\partial u_b}{\partial n_b} + k^2 h(u_b) + \gamma(u_b - u_s) = \mathcal{M}^+(I|_{\Gamma^+}), \quad x \in \partial G_s, \quad (5)$$

$$\lambda(x, u_s) \frac{\partial u_s}{\partial n_s} + \gamma(u_s - u_b) = 0, \quad x \in \partial G_s, \quad (6)$$

$$I|_{\Gamma^-} = \frac{k^2}{\pi} h(u_b), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-. \quad (7)$$

Здесь g – плотность потока приходящего извне излучения, поглощаемого поверхностью $\partial \widehat{G}$; $\gamma \geq 0$ – коэффициент теплопередачи, $\mathcal{M}^+(I|_{\Gamma^+})(x) = \int_{\omega \cdot n_s(x) > 0} I|_{\Gamma^+}(\omega, x) \omega \cdot n_s(x) d\omega$ отвечает плотности потока излучения, приходящего из G_s и поглощаемого частью ∂G_s поверхности ∂G_b .

В [1] доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи (1) - (7). Кроме того, установлена теорема сравнения и получены результаты об улучшении свойств решений с повышением порядка суммируемости данных, включающие экспоненциальную суммируемость и ограниченность. Использована техника, развитая в [2] - [4].

Литература

1. Amosov A.A. Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies / A.A. Amosov // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2021, to appear.

2. Amosov A.A. Unique solvability of stationary radiative - conductive heat transfer problem in a system of semitransparent bodies / A.A. Amosov // *J. Math. Sci. (United States)* — 2017. — Vol. 224, № 5. — P. 618–646.

3. Амосов А. А. Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения / А.А. Амосов // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2017. — Т. 57, № 3. — С. 510–535.

4. Амосов А. А. Краевые задачи для уравнения переноса излучения с условиями отражения и преломления / А.А. Амосов. — Новосибирск. Издательство Тамара Рожковская, 2017. — 140 с.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА СЕРНОКИСЛОТНОГО АЛКИЛИРОВАНИЯ ИЗОБУТАНА ОЛЕФИНАМИ¹

И.А. Арефьев, Л.В. Еникеева, М.Р. Агзамова (Уфа,
Институт нефтехимии и катализа РАН, УГНТУ)
purgonga@gmail.com, leniza.enikeeva@yandex.ru

Целью данной работы является разработка математической модели сернокислотного алкилирования изобутана олефинами с учетом физико-химических закономерностей протекания процесса. Выявлены значимые особенности технологии, которые необходимо учесть при моделировании. Рассмотрены варианты схем химических превращений в процессе сернокислотного алкилирования изобутана олефинами. По значению энергии Гиббса оценена вероятность протекания всех реакций. Заложены основы для дальнейшего моделирования всего химико-технологического процесса.

В настоящее время в мировом производстве автомобильных бензинов наблюдается постоянная тенденция к ужесточению эксплуатационных, а также экологических характеристик топлива. Для производства экологически чистого автомобильного бензина международные и отечественные нормативы существенно ограничивают содержание ароматических углеводородов, бензола, олефинов и серы

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-71-20047).

© Арефьев И.А., Еникеева Л.В., Агзамова М.Р., 2021

в топливе. Серноокислотное алкилирование изобутана олефинами является значимым процессом современного нефтеперерабатывающего комплекса. Потому как назначением этого процесса является переработка бутан-бутиленовой фракции с получением высокооктанового компонента бензина — алкилата [1].

Главным преимуществом алкилата является высокое октановое число: по исследовательскому методу оно составляет 96, по моторному – 92. Продукт алкилирования нетоксичен, не содержит бензола и имеет низкое давление насыщенных паров, следовательно, при хранении и транспортировке он практически не испаряется [1].

В середине XX века на этапах проектирования и строительства большинства промышленных технологических установок, в том числе реакторов, глубокому изучению механизма процессов уделялось недостаточное внимание. В настоящее время интенсивное развитие информационных технологий, таких как теория анализа и хранения больших объемов данных, технологии параллельных вычислений, искусственные нейронные сети и др., привело к созданию универсальных программных комплексов, позволяющих разрабатывать модели промышленных процессов [2,3].

При этом важно учесть тот факт, что любая математическая модель химико-технологического процесса строится на физико-химической основе и учитывает термодинамику и химическую кинетику. Таким образом, для успешного моделирования процесса необходимо тщательное изучение его химизма и составление детализированной кинетической модели [2,3].

Наиболее полный учет термодинамических и кинетических закономерностей целевых и побочных реакций при моделировании позволит с наибольшей степенью достоверности прогнозировать выход целевого продукта. В дальнейшем такие модели могут быть использованы для поиска оптимальных технологических условий и интенсификации процесса [4,5].

При моделировании данного процесса стоит принять во внимание свойства кислотных катализаторов, обладающих высокой коррозионной активностью и низкой селективностью, ведущей к тому, что наряду с целевыми реакциями алкилирования, протекает большое количество побочных реакций. Они приводят к потере активности и увеличению расхода катализатора, а также к образованию более легких и более тяжелых углеводородов, чем целевой продукт [1,6].

Таким образом, на основе литературного обзора была составлена предварительная схема химических превращений. Разработана детализированная кинетическая модель алкилирования серной кислоты,

учитывающая следующие реакции: алкилирование изобутана олефинами, реакции полимеризации олефинов, диспропорционирование, самоалкилирование с Н-переносом и деструктивное алкилирование.

Литература

1. Ахметов А.Ф. Технологии глубокой переработки нефти и газа / А.Ф. Ахметов. — Уфа. : НаукаГилем, 2002. — 672 с.
2. Zainullin R.Z., Koledina K.F., Akhmetov A.F., Gubaidullin I.M., Kinetics of catalytic reforming of gasoline // Kinetics and catalysis. 2017. — Т. 59, № 3. —292-303 p.
- 3.Зернов П.А., Мурзин Д.Ю., Парпуц О.И., Кузичкин Н.В., Моделирование процесса алкилирования изобутана бутиленами в аппарате реакционно-ректификационного типа // Химия и химические технологии. 2014. Т. 57, № 9. —100-104 с.
- 4.Слинько, М.Г. // Теоретические основы химической технологии. 2007. — Т. 41, № 1.С. 16.
- 5.Cao P., Zheng, Sun L. W., Zhao L., Multiscale Modeling of Isobutane Alkylation with Mixed C4 Olefins Using Sulfuric Acid as Catalyst // Industrial and Engineering Chemistry Research. 2019.
- 6.Albright L.F., Wood K.V., Alkylation of isobutane with C3-C4 olefins : identification and chemistry of heavy-end products // Industrial and Engineering Chemistry. 1997. № 36. P. 2110-2112.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПСЕВДОЛАПЛАСИАНОМ¹

А.И. Аристов (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
ai_aristov@mail.ru

Работа посвящена построению точных решений уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u + u) + \Delta u + \Delta_4 u = 0, \quad (1)$$

где $u \in R$ зависит от координаты $x \in R^3$ и времени $t > 0$, а Δ_p (здесь $p = 4$) — псевдолапласиан, т. е. $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$.

Уравнение описывает нестационарный процесс в кристаллическом полупроводнике. Оно учитывает переменную плотность связанных зарядов, линейно зависящую от потенциала электрического поля, нелинейную зависимость тензора проводимости от модуля вектора напряжённости электрического поля и наличие внешнего магнитного поля. Уравнения такого типа выведены в [1, гл. 3, п. 1–2].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10085 мк).

© Аристов А.И., 2021

В данном исследовании рассматривается уравнение (1). Построено шесть классов его точных решений, выражаемых через элементарные функции, квадратуры и специальные функции. Применялись поиск решений типа бегущей волны и решений специального вида, метод аддитивного разделения переменных, групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Д.Ю. Линеиные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Д.Ю. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.

2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. — М. : Физматлит, 2005. — 256 с.

3. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Н.Х. Ибрагимов. — М. : Физматлит, 2012. — 332 с.

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПЕРЕМЕННЫМИ ПО ВРЕМЕНИ¹

И.В. Астахова, Д.А. Лашин, А.В. Филиновский (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, РЭУ имени Г.В.Плеханова; ООО «ФИТО»; МГТУ имени Н.Э.Баумана, МГУ имени М.В.Ломоносова)

ast.diffiety@gmail.com, dalashin@gmail.com, flnv@yandex.ru

Нас будет интересовать смешанная задача для параболического уравнения с переменными по времени коэффициентом диффузии a , конвективным коэффициентом b и обедняющим потенциалом d :

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + d(t)u, \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_T = (0, 1) \times (0, T),$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1. \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20272).
© Астахова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В., 2021

где a , b и d – достаточно гладкие на $[0, T]$ функции, $0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1 < \infty$, $\varphi \in W_2^1(0, T)$, $\psi \in W_2^1(0, T)$, $\xi \in L_2(0, 1)$.

Исследуем вопрос об управлении температурой φ на левом конце отрезка ($x = 0$). При этом, полагая функции ξ и ψ фиксированными, мы стараемся сделать температуру $u(c, t)$ в некоторой точке c интервала $(0, 1)$ близкой к заданной функции $z(t)$ на интервале времени $(0, T)$. Задачи такого типа возникают в модели управления микроклиматом в промышленных теплицах [1–2]. Подобные задачи в теории оптимизации получили название задач с точечным наблюдением [3]. Обзор результатов по экстремальным задачам для параболических уравнений можно найти в [4–5], наиболее изученными здесь являются задачи с финальным или распределенным наблюдением. Предлагаемая работа развивает и обобщает результаты работ авторов [1–2, 6–11] на случай уравнений общего вида с коэффициентами, зависящими от времени.

Рассматриваем слабое решение задачи (1) – (3) из пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ (см. [12], с. 26), то есть банахова пространства функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)}$$

таких, что $t \mapsto u(\cdot, t)$ – непрерывное отображение $[0, T] \rightarrow L_2(0, 1)$. Через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ обозначаем множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x, T) = \eta(0, t) = 0$.

Определение 1. Слабым решением задачи (1), (2) называем функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u|_{x=0} = \varphi(t)$ в смысле следа, и при каждом $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} (a(t)u_x\eta_x - (b(t)u_x + d(t)u)\eta - u\eta_t) \, dx \, dt \\ & = \int_0^1 \xi(x)\eta(x, 0) \, dx + \int_0^T a(t)\psi(t)\eta(1, t) \, dt. \end{aligned}$$

Теорема 1. Задача (1) – (3) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, и для него справедливо неравенство

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_1 (\|\xi\|_{L_2(0,1)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)}),$$

где постоянная C_1 не зависит от φ , ψ и ξ .

Для непустого, замкнутого, выпуклого и ограниченного множества $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ управляющих функций φ и множества $Z \subset$

$L_2(0, T)$ целевых функций z рассматриваем весовой функционал качества

$$J[z, \rho, \varphi] = \int_0^T (u_\varphi(c, t) - z(t))^2 \rho(t) dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

$u_\varphi \in V_2^{1,0}(Q_T)$ – решение задачи (1), (2) с управляющей функцией φ , а $\rho \in L_\infty(0, T)$ – весовая функция, удовлетворяющая условию $\text{ess inf}\{\rho(t) : t \in (0, T)\} > 0$. Считая функции z и ρ фиксированными, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z, \rho, \Phi] = \inf_{\varphi \in \Phi} J[z, \rho, \varphi]. \quad (4)$$

Целесообразность введения весового функционала объясняется тем, что при этом мы можем гарантировать более точное управление в выделенные интервалы времени в интервале $(0, T)$.

Теорема 2. *Для любой функции $z \in L_2(0, T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой*

$$m[z, \rho, \Phi] = J[z, \rho, \varphi_0].$$

С точки зрения приложений важными являются необходимые условия экстремума, характеризующие минимизирующую функцию.

Теорема 3. *Пусть множество Φ замкнуто, выпукло и ограничено, $\varphi_0 \in \Phi$ – минимизирующая функция. Тогда для любой управляющей функции $\varphi \in \Phi$ выполнено следующее неравенство:*

$$\int_0^T (u_{\varphi_0}(c, t) - z(t)) (u_\varphi(c, t) - u_{\varphi_0}(c, t)) \rho(t) dt \geq 0.$$

Определение 2. *Сопряженной к (1) – (4) называется задача*

$$p_t + a(t)p_{xx} - b(t)p_x + d(t)p = \delta(x - c) \cdot (u_\varphi(c, t) - z(t)) \rho(t), \quad (5)$$

$$(x, t) \in Q_T,$$

$$p(0, t) = 0, \quad a(t)p_x(1, t) - b(t)p(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (6)$$

$$p(x, T) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (7)$$

Как и в (1) – (3), будем рассматривать слабое решение задачи (5) – (7) из пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Теорема 4. Задача (5) – (7) имеет единственное слабое решение $p \in V_2^{1,0}(Q_T)$ (понимаемое аналогично [12]), и

$$\|p\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_2(\|\xi\|_{L_2(0,1)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|z\|_{L_2(0,T)}),$$

где постоянная C_2 не зависит от φ , ψ , ξ и z .

Теорема 5. Пусть множество Φ замкнуто, выпукло и ограничено, $\varphi_0 \in \Phi$ – минимизирующая функция. Тогда для всех $\varphi \in \Phi$

$$\int_0^T a(0,t)p_x(0,t)(\varphi(t) - \varphi_0(t))\rho(t)dt \leq 0,$$

где p – решение задачи (5) – (7) при $\varphi = \varphi_0$.

Во многих задачах, как теоретических, так и прикладных, важно получить качественную информацию о структуре минимизирующей функции.

Теорема 6. Если $m[z, \rho, \Phi] > 0$, то $\varphi_0 \in \partial\Phi$.

Теорема 7. Если множества $\Phi_1, \Phi_2 \subset W_2^1(0, T)$ ограничены выпуклы и замкнуты, что $\Phi_2 \subset \text{Int}\Phi_1$ и $m[z, \rho, \Phi_1] > 0$, то $m[z, \rho, \Phi_1] < m[z, \rho, \Phi_2]$.

Определение 3. Задачу (1)–(3) с фиксированной функцией ρ называем плотно управляемой из множества Φ во множество Z , если для всех $z \in Z$ верно равенство $m[z, \rho, \Phi] = 0$.

Следующая теорема устанавливает плотную управляемость задачи (1)–(3) из множества $Z = L_2(0, T)$ во множество $\Phi = W_2^1(0, T)$.

Теорема 8. Для любой функции $z \in L_2(0, T)$ верно равенство $m[z, \rho, W_2^1(0, T)] = 0$.

Литература

1. Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. On maintaining optimal temperatures in greenhouses / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy, D.A. Lashin // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. – 2016. – V. 15. – no. 23. – P. 198–204.
2. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On optimal temperature control in hothouses / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy, D.A. Lashin // Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016. – AIP Conf. Proc. – 2017. – P. 4–8.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
4. Troltsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications / F. Troltsch. – Graduate Studies in Mathematics. – V. 112. – Providence. – AMS, 2010.

5. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems / K.A. Lurie. — Springer. — Berlin, 2013. — 499 p.

6. Асташова И.В., Филиновский А.В. Об управляемости в параболической задаче с распределенным по времени функционалом / И.В. Асташова, А.В. Филиновский // Дифф. уравнения. — 2018. — Т. 53, — N 6, — С. 851—853.

7. Astashova I.V., Filinovsky A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional / I.V. Astashova, A.V. Filinovsky // Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — V. 71. — P. 9–25.

8. Astashova I.V., Filinovsky A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations / I.V. Astashova, A.V. Filinovsky // Opuscula Math. — 2019. — V. 39. — N 5. — P. 595—609.

9. Асташова И.В., Лапин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией / И.В. Асташова, Д.А. Лапин, А.В. Филиновский // Тр. Моск. матем. общ-ва. — 2019. — Т. 80. — N 2. — С. 258—274.

10. Асташова И.В., Лапин Д.А., Филиновский А.В. О задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения при наличии конвекции и обедняющего потенциала / И.В. Асташова, Д.А. Лапин, А.В. Филиновский // Дифф. уравнения. — 2020. — Т. 56, — N 6, — С. 828—829.

11. Astashova I.V., Filinovsky A.V. Controllability and exact controllability in a problem of heat transfer with convection and time distributed functional / I.V. Astashova, A.V. Filinovsky // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — V. 244. — N 2. — P. 148—157.

12. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М. : Наука, 1973. — 400 с.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНЫМ ЯДРОМ И СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ¹

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ)

askhabov@yandex.ru

Интегральным уравнениям с суммарным ядром посвящено значительно меньше работ, чем интегральным уравнениям с разностным ядром. Среди линейных интегральных уравнений с суммарным

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегродифференциальные уравнения и краевые задачи».

© Асхабов С.Н., 2021

ядром хорошо известно уравнение Фокса, а среди нелинейных – уравнение Чандрасекхара, возникающее в теории лучистого равновесия и в теории переноса тепла излучением (см., например, [1]). В данной работе в конусе Q , состоящем из непрерывных положительных при $x > 0$ функций изучается уравнение вида

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x+t)u(t)dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

где ядро $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } \int_0^\delta k(t)dt > 0 \text{ для любого } \delta > 0, \quad (2)$$

$$f(x) \in C[0, \infty), f(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } f(0) \geq 0. \quad (3)$$

Теорема 1. *Если выполнены условия (2), (3) и функция $u \in Q$ является решением уравнения (1), то $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и удовлетворяет неравенствам:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x k(2t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{1/(\alpha-1)} &\leq u(x) \leq \\ &\leq \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x k(x+t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Априорные оценки, приведенные в теореме 1, неулучшаемы и играют важную роль при доказательстве основного результата данной работы – теоремы о существовании, единственности и способе нахождения решения уравнения (1). Доказательство основано на методе весовых метрик, причем при построении метрики в качестве весовой функции берется не нижняя априорная оценка, как это делается в случае соответствующих интегральных и интегродифференциальных уравнений с разностным ядром [2], а верхняя априорная оценка решения уравнения (1).

В заключение приведем примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Уравнение (1) при $\alpha = 2$ и $k(x) = f(x) = e^x$ имеет в конусе Q единственное решение

$$u^*(x) = \frac{e^{2x} + 2e^{x/2}}{3}.$$

В случае $f(x) \equiv 0$ уравнение (1) имеет в конусе Q при $k(x) = x$ единственное решение

$$u(x) = \left(\frac{3\alpha^2 - 2\alpha - 1}{2\alpha(\alpha + 1)} \right)^{1/(\alpha-1)} x^{2/(\alpha-1)},$$

а при $k(x) = e^x$ – единственное решение

$$u(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^{1/(\alpha-1)} \left(e^{(\alpha+1)x/\alpha} - 1 \right)^{1/(\alpha-1)} e^{x/\alpha}.$$

Последние два примера показывают, что однородные уравнения, соответствующие нелинейному уравнению (1), могут иметь нетривиальные решения. В этом состоит принципиальное отличие нелинейных уравнений от соответствующих линейных интегральных уравнений с суммарными и разностными ядрами.

Литература

1. Измаилов А.Ф. 2-регулярность и теоремы о разветвлении / А.Ф. Измаилов // Итоги науки и техники. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 1999. — Т. 65. — С. 90–117.

2. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части / С.Н. Асхабов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 786–795.

ОДНОРОДНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В \mathbb{R}^4 : КОМПЬЮТЕРНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПИСАНИЯ¹

А.В. Атанов (Воронеж, ВГУ)

atanov.cs@gmail.com

В задаче описания голоморфно однородных гиперповерхностей комплексных пространств важную роль играют трубки над аффинно однородными основаниями. При этом аффинно однородные невырожденные гиперповерхности пространства \mathbb{R}^4 , имеющие нетривиальные изотропии, описаны в [1]. Случай же дискретных изотропий остаётся неизученным. С применением символьных вычислений

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

© Атанов А.В., 2021

ниже строится семейство аффинно однородных строго выпуклых гиперповерхностей в \mathbb{R}^4 , имеющих трёхмерные алгебры симметрий (и дискретные изотропии).

Любая строго выпуклая гиперповерхность $M \subset \mathbb{R}^4$ может быть локально задана уравнением вида

$$x_4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + F_3(x_1, x_2, x_3) + F_4(x_1, x_2, x_3) + \dots, \quad (1)$$

где F_3 — кубическая форма от трёх переменных, которую можно считать гармоническим многочленом.

Наличие на такой поверхности 3-мерной алгебры Ли аффинных векторных полей означает, что попарные коммутаторы трех (5×5) -матриц специальной структуры представляются линейными комбинациями этих же матриц. Коэффициенты многочленов F_k из уравнения (1) и элементы (5×5) -матриц связаны между собой билинейными соотношениями, вытекающими из основного тождества

$$Z(\Phi)|_M \equiv 0, \quad (2)$$

где Φ — определяющая функция гиперповерхности M , Z — касательное поле к M .

С учётом (1) тождество (2) формирует систему бесконечного числа ограничений, налагаемых на элементы базисных матриц алгебры Ли. Изучение младших компонент этого тождества позволяет уменьшить количество параметров в алгебре Ли. Условие замкнутости относительно операции коммутирования связывает элементы трех базисных матриц системой квадратичных уравнений. В нескольких рассмотренных случаях эту систему, содержащую 48 уравнений, удастся решить с помощью вычисления базисов Грёбнера и получить базисы 3-мерных алгебр Ли.

Предложение 1. При $F_3 = x_2^3 - 3x_1^2x_2$ существует однопараметрическое семейство 3-мерных алгебр Ли аффинных векторных полей, отвечающих однородным поверхностям вида (1). Базис этого семейства имеет вид

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2A & 3 - \frac{4}{3}t & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3}t & 2A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 6-4t - \frac{2}{3}A & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}A & 3-4t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2}-4t & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 9-8t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \sqrt{t(9-4t)} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Предложение 2. *Интегрирование полученных матричных алгебр (3) приводит к семейству*

$$(x_4 + Q_2(x_1, x_2, x_3) + L(x_1, x_2)^3)^2 = (P_2(x_1, x_2))^3, \quad (4)$$

аффинно однородных гиперповерхностей в \mathbb{R}^4 . Здесь P_2 , Q_2 , L — полиномы, зависящие от указанных переменных и параметра t .

Замечание. Трубки в \mathbb{C}^4 над семейством (4) являются аналогами оснований однопараметрического семейства аффинно однородных трубчатых гиперповерхностей пространства \mathbb{C}^3 , полученного в работах [2] и [3].

Литература

1. Eastwood M.G. Homogeneous Hypersurfaces with Isotropy in Affine Four-Space / M.G. Eastwood, V.V. Ezhov // Труды МИАН. — 2001. — Т. 235. — С. 49–63.

2. Лобода А.В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А.В. Лобода, А.С. Ходарев // Изв. вузов. Матем. — 2003. — № 10. — С. 38–50.

3. Beloshapka V.K. Homogeneous hypersurfaces in \mathbb{C}^3 , associated with a model CR-cubic / V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — V. 20, № 3. — P. 538–564.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОЙСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ

Ю.В. Афанасенкова, Ю.А. Гладышев (Калуга,
КГУ им. К.Э. Циолковского)
dvoryanchikova_y@mail.ru

В сообщении приведен метод, известный как метод обобщенных степеней (ОС), построения последовательности базисных решений системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, известной как системы Мойсила-Теодореску.

Для выполнения этой задачи кватернионная форма записи уравнения Мойсила-Теодореску переведена в матричную форму. Система, с помощью определенной операции, названной присоединением приводится к виду, допускающему использования метода ОС. После

этого введены операции дифференцирования и права обратная операция я интегрирования, которые являются аналогами дифференцирования и интегрирования по комплексному переменному решению системы Коши-Римана Эти операции не выводят из множества решений системы Мойсила-Теодореску с заданными свойствами в определенной области. четырехмерного пространства. Возможность многократного повторения этих операций дает алгоритм для построения последовательности базисных решений системы Мойсила-Теодореску.

Способ построения решений линейных дифференциальных уравнений, названный методом обобщенных степеней (ОС), был развит первоначально Л. Берсом для случая одного независимого переменного [1]. В работах автора [2] он был обобщен для случая нескольких независимых переменных. В данном сообщении показано его применение для построения решений известной системы Мойсила-Теодореску [2] (далее М-Т).

В работе проведен переход от записи системы М-Т в кватернионной форме к матричной форме. Чтобы удовлетворить требованиям допустимости применения ОС, введена так называемая присоединенная система и получена пара коммутирующих операторов D_1, D_2 . Указаны правые обратные операторы I_1, I_2 , а также проекционные операторы P_1, P_2 . Достигнутое выполнение всех требований необходимых для построения бинарных ОС позволяет записать

$$X_1^{(\rho)} X_2^{(q)} C = \rho!q! I_1^\rho I_2^q C,$$

где C - обобщенная константа определяемая требованиями

$$D_1 C = D_2 C = 0$$

Далее по стандартной схеме [2] приведем симметризованные бинарные ОС вида $\bar{Z}^m Z^n C$

Последовательность степеней вида $Z^n C$ дает базисное решение системы М-Т в матричной форме. При выполнении условия по компонентной сходимости ряда

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} Z^i C_i$$

определяет регулярную по терминологию [2,4] решения системы М-Т. Приведенные частные примеры и указано на возможность обобщения результатов.

Литература

1. Bers L. On a class of functions defined by partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society. 56, №1, 1944;

2. Гладышев Ю.А. Метод обобщенных степеней Берса и его приложения в математической физике, Калуга, 2011;

3. G.C. Moisil, Sur les quaternions monogenes. Bull. Sci. Math. 55. 1931;

4. Гладышев Ю.А., Лопкарева Е.А. Об использовании аппарата обобщенных степеней Берса при построении решений краевых задач теории переноса методом Фурье // Вестник Калужского университета. 2018. №3. с.53-57.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ФДВ¹

Ю.Е. Безмельница, С.В. Корнев (Воронеж, ВГПУ)

bezmelnicya@inbox.ru, kornev_vrn@rambler.ru

Пусть (Ω, Σ, μ) — полное вероятностное пространство. Для каждого $h > 0$ обозначим символом \mathcal{C} пространство $C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ всех непрерывных функций $x : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с обычной нормой. Для функции $x(\cdot) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Пусть $\psi : \Omega \times [-h, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданная начальная функция такая, что оператор $\omega \in \Omega \rightarrow \psi(\omega, \cdot) \in \mathcal{C}$ измерим. Обозначим символом \mathcal{D}_ψ множество всех функций $x : \Omega \times [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что: (i) $x(\cdot, t)$ измерима п.в. $t \in [-h, +\infty]$; (ii) для каждого $\omega \in \Omega$ сужение $x(\omega, \cdot)$ на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ является абсолютно непрерывным; (iii) для каждого $\omega \in \Omega$ имеем $x(\omega, t) = \psi(\omega, t)$, $t \in [-h, 0]$.

Определение 1. (см. [1]) Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \rightarrow C(Y)$ называется *случайным мультиоператором*, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, где $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ — наименьшая σ -алгебра на $\Omega \times X$, включающая все множества $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{B}(X)$ обозначает Борелевскую σ -алгебру на X . Если, кроме того, $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \rightarrow C(Y)$ полунепрерывно сверху для всех $\omega \in \Omega$, то \mathcal{F} — *случайный \mathcal{U} -мультиоператор*.

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания (проект № FZGF-2020-0009)

© Безмельница Ю.Е., Корнев С.В., 2021

Рассмотрим задачу Коши для случайного функционально-дифференциального включения вида:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega, t, x_t) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$x(\omega, t) = \psi(\omega, t), \quad t \in [-h, 0], \quad (2)$$

для всех $\omega \in \Omega$, где $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям: (F1) $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ случайный u -мультиоператор; (F2) существует отображение $c : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такое, что $c(\omega, \cdot) -$ локально интегрируемо на \mathbb{R}_+ для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot, t) -$ измеримо п.в. $t \in I$, и для каждого $\omega \in \Omega$ имеем $\|\mathcal{F}(\omega, t, \varphi)\| := \sup\{|z| : z \in \mathcal{F}(\omega, t, \varphi)\} \leq c(\omega, t)(1 + |\varphi|)$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2. Отображение $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *случайным потенциалом*, если выполняются следующие условия: (j) $V(\cdot, z) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измеримо для каждого $z \in \mathbb{R}^n$; (jj) $V(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является C^1 -отображением для каждого $\omega \in \Omega$.

Обозначим \mathfrak{V} набор всех случайных потенциалов $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(\omega, x) = -\infty$ для каждого $\omega \in \Omega$.

Заметим, что для каждого $\omega \in \Omega$ для данной функции $V \in \mathfrak{V}$, для каждого $r_\omega > 0$ существует $k_\omega(r) > r_\omega$ такой, что если $\alpha_r(\omega) := \inf\{V(\omega, x), \|x\| \leq r_\omega\}$, то $V(\omega, x) < \alpha_r(\omega)$, $\|x\| \geq k_\omega(r)$.

Пусть теперь $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — заданная функция такая, что: (g₁) $g(\cdot, t) -$ измерима п.в. $t \in \mathbb{R}_+$; (g₂) $g(\omega, \cdot) -$ абсолютно непрерывна; (g₃) $\inf\{g(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}\} \geq 1$.

Определение 3.(ср. [2]) Случайный потенциал $V \in \mathfrak{V}$ называется *случайным интегральным направляющим потенциалом* для включения (1) вдоль функции g , если для каждого $\omega \in \Omega$ существует $r_{V_\omega} > g(\omega, 0)\|\psi(\omega, 0)\|$ такое, что для каждой функции $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющей условиям: (I) существует наибольшее конечное число $\tau_1 := \tau_1(\omega, x) > 0$ такое, что $g(\omega, t)\|x(\omega, t)\| \leq r_{V_\omega}$ для всех $t \in [0, \tau_1]$; (II) существует конечное число $\tau_* := \tau_*(\omega, x) > \tau_1$ такое, что $g(\omega, \tau_*)\|x(\omega, \tau_*)\| = k_{V_\omega} := k_\omega(r_{V_\omega})$; (III) $\|x'(\omega, t)\| \leq \|\mathcal{F}(\omega, t, x_t)\|$ п.в. $t \in \mathbb{R}_+$, выполняется условие направляемости:

$$\int_{\tau_\#^x}^{\tau_*^x} \langle \nabla V(\omega, x), g'(\omega, s)x(\omega, s) + g(\omega, s)f(s) \rangle ds \geq 0$$

для любого суммируемого сечения $f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, x_s)$, где $\tau_\#^x := \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x], \|g(\tau)x(\tau)\| = r_{V_\omega}\}$.

Теорема 4. Если $V \in \mathfrak{V}$ — случайный интегральный направляющий потенциал для включения (1) вдоль функции g , то каждое

решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет оценке

$$\|x(\omega, t)\| \leq k_{V_\omega} \cdot \frac{1}{g(\omega, t)}, \quad \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+.$$

Литература

1. Andres J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Górniewicz // Topol. Meth. Nonl. Anal. — 2012. — № 40. — P. 337–358.

2. Obukhovskii V. On asymptotics of solutions for some classes of differential inclusions via the generalized guiding functions method / V. Obukhovskii, M. Kamenskii, S. Kornev, Y.-C. Liou // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2017. — V. 18, № 5. — P. 967-975.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА-ПУАССОНА¹

Ю.О. Беляева, А.Л. Скубачевский (Москва, РУДН)

yilia-b@yandex.ru; belyaeva-yuo@rudn.ru

Система уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре является моделью кинетики заряженных частиц высокотемпературной плазмы в пробочной ловушке.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченная область и пусть в бесконечном цилиндре $G \times \mathbb{R}$ задано однородное магнитное поле $B(x) = (0, 0, h)$, где $h > 0$ не зависит от x ($x \in G \times \mathbb{R}$). Рассмотрим первую смешанную задачу для системы уравнений Власова-Пуассона в сечении цилиндра. Для $x \in \bar{G}$, $v \in \mathbb{R}^2$ и $0 < t < T$ будем рассматривать следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x f^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{hv^\perp}{c}, \nabla_v f^\beta \right) &= 0 \\ -\Delta \varphi(x, t) &= 4\pi e \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{\beta} \beta f^\beta(x, v, t) dv \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$f^\beta(x, v, 0) = f_1^\beta(x, v), \quad x \in \bar{G}, v \in \mathbb{R}^2.$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

© Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л., 2021

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x, t) = 0, \quad x \in \partial G.$$

Здесь $f^\beta = f^\beta(x, v, t)$ — функция распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t ; $\varphi(x, t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; вектор $v^\perp = (v_2, -v_1)$; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света.

Мы исследуем вопрос существования стационарных решений описанной выше задачи. В рамках доклада будет доказано существование стационарных решений данной задачи с ненулевым потенциалом самосогласованного электрического поля в окрестности уже известных решений с нулевым потенциалом.

Классические стационарные и нестационарные решения для смешанных задач в бесконечном цилиндре исследовались в работах [1], [2]. Были построены стационарные решения с нулевым потенциалом самосогласованного электрического поля, в том числе решения с носителями функций распределения не достигающими границы цилиндра и компактными носителями [1], [2]. Существование стационарных решений с ненулевым потенциалом исследовалось в [3]. В работе [4] рассматривается система уравнений Власова-Пуассона для двухкомпонентной высокотемпературной плазмы с внешним магнитным полем в следующих двух случаях: трехмерном торе, соответствующему токамаку, и трехмерном цилиндре, соответствующему пробочной ловушке. Доказано существование стационарных решений системы Власова-Пуассона в указанных выше областях с функциями распределения заряженных частиц с компактным носителем.

Литература

1. Belyaeva Yu.O. Stationary solutions of the Vlasov-Poisson system for two-component plasma under an external magnetic field in a half-space / Yu.O. Belyaeva// Mathematical Modelling of Natural Phenomena — 2017. — Т. 12, № 6. — С. 37–50.
2. Skubachevskii A.L. Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field / A.L. Skubachevskii// Russ. Math. Surv.— 2014. — Т. 69, № 2. — С. 291–330.
3. Knopf P. Confined steady states of a Vlasov-Poisson plasma in an infinitely long cylinder / P. Knopf// Math Meth Appl Sci. — 2019. — doi:10.1002/mma.5728
4. Belyaeva Yu.O. A general way to confined stationary Vlasov-Poisson plasma configurations / Yu.O. Belyaeva, B. Gebhard, A.L. Sku-

**АНАЛОГ ЗАДАЧИ ХОЛЬМГРЕНА ДЛЯ
ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹**

А.С. Бердышев, А.Р. Рыскан (Алматы, КазНПУ им. Абая)
berdyshev@mail.ru, ryskan.a727@gmail.com

В данной работе в конечной области исследуются вопросы разрешимости аналога задачи Хольмгрена для четырехмерного вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка

$$H(u) = y^m z^k t^l u_{xx} + x^n z^k t^l u_{yy} + x^n y^m t^l u_{zz} + x^n y^m z^k u_{tt} = 0, \quad (1)$$

$m, n, k, l \equiv \text{const} > 0$, в которой в одной части границы рассматриваемой области задаются значения искомой функции, а в другой кусочно-гладкой части границы – нормальные производные. Используя соответствующее фундаментальное решение для четырехмерного обобщенного уравнения Геллерстедта (1), найденного ранее в работе [1], построена функция Грина сформулированной задачи. При исследовании разрешимости поставленной задачи существенным образом используются различные новые свойства гипергеометрической функции Лауричеллы [2]

$$\begin{aligned} F_A^{(4)}(a; b_1, b_2, b_3, b_4; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t) = \\ = \sum_{m, n, p, q}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p+q} (b_1)_m (b_2)_n (b_3)_p (b_4)_q}{(c_1)_m (c_2)_n (c_3)_p (c_4)_q m! n! p! q!} x^m y^n z^p t^q, \\ (|x| + |y| + |z| + |t| < 1). \end{aligned}$$

Литература

1. Hasanov A. Fundamental solutions for a class of four-dimensional degenerate elliptic equation / A. Hasanov, A.S. Berdyshev, A. Ryskan. // Complex Var. Elliptic Equ. — 2020. — Vol. 65, No. 4. — P. 632–647.
2. Appell P. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d’Hermite / P. Appell, J. Kampe de Feriet. — Paris: Gauthier–Villars, 1926. — 440 p.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Казахского Национального педагогического университета имени Абая (договор № 6 от 06.04.2021).

© Бердышев А.С., Рыскан А.Р., 2021

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ¹

А.М. Бирюков (Москва, НИУ МЭИ)

birukovalmix@mail.ru

Введём в рассмотрение задачу Коши для систем комплексных линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(t, z, D)u = h(t, z)$$
$$u(t_0, z) = \varphi(z)$$

в банаховых пространствах аналитических функций типа пространств Харди-Лебега с весом. Здесь $A(t, z, D)$ – функциональный или дифференциальный оператор.

Норма в пространстве решений поставленной задачи задаётся следующим образом:

$$\|u\|_{\delta; m, R, q; p} = \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{\delta; m_j, R, q; p} =$$
$$\sum_{j=1}^N \sup_{|t-t_0| < \delta} \left(\sup_{0 < r < +\infty} \left(\left(\int_0^{2\pi} |u_j(t, re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} (1+r)^{-m_j} \exp\{-Rr^q\} \right) \right).$$

Таким образом, функции из данного банахова пространства являются целыми по переменной z и могут допускать рост экспоненциального типа на бесконечности.

Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты дифференциального или функционального оператора $A(t, z, D)$, при выполнении которых исходная задача будет корректной в заданной шкале функциональных пространств, то есть установлен критерий корректности. Таким образом, описана структура систем комплексных дифференциальных уравнений с частными производными, для которых имеет место корректность поставленной задачи Коши.

Ранее аналогичные задачи, но в пространствах с супремум-нормами, изучались в работе [1].

Литература

1. Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной области / Ю.А. Дубинский. — М. : Изд-во МЭИ, 1996. — 180 с.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 19-11-00033).
© Бирюков А.М., 2021

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА
ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В
ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОМ КОЛЛЕКТОРЕ¹**

Ю.О. Бобренёва, Л.В. Еникеева, А.А. Мазитов,

Р.М. Узьянбаев, И.М. Губайдуллин (Уфа,

УГНТУ, ИНК УНЦ РАН)

byulyao12@mail.ru

Работа посвящена моделированию флюидодинамического двухфазного процесса в среде с двойной пористостью. В нефтегазовой промышленности при разработке любого объекта, основными задачами являются выделение продуктивных пластов и залежей, подсчет запасов и проектирование системы разработки. Трещиновато-пористые коллектора характеризуются интенсивным обменным потоком жидкости между трещинами и пористыми блоками.

Рассматриваются двухфазные уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-поровых коллекторах [1], записанные в дивергентной форме:

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_o S_o^f)}{\partial t} + \nabla(\rho_o U_o^f) + \rho_o \cdot \sigma \lambda_o^m (Pf - Pm) = \rho_o q_j \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_w S_w^f)}{\partial t} + \nabla(\rho_w U_w^f) + \rho_w \cdot \sigma \lambda_w^m (Pf - Pm) = \rho_w q_j \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\varphi^m \rho_o S_o^m)}{\partial t} - \rho_o \cdot \sigma \lambda_o^m (Pf - Pm) = \rho_o q_j \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\varphi^m \rho_w S_w^m)}{\partial t} - \rho_w \cdot \sigma \lambda_w^m (Pf - Pm) = \rho_w q_j \quad (4)$$

Уравнения (1) – (2) отвечают за перенос нефти и воды в системе трещин, а уравнения (3) – (4) за работу поровой части (матрицы), которая ведет себя как емкость и в процессе работы трещин их подпитывает.

Для решения задачи (1) – (4) строится неявная разностная схема [2], которая сводится к трехточечному уравнению:

$$AP_{i-1} - CP_i + BP_{i+1} = -F_i, i = 1, \dots, M \quad (5)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 21-71-20047).

© Бобренева Ю.О., Еникеева Л.В., Мазитов А.А., Узьянбаев Р.М., Губайдуллин И.М., 2021

где M — количество блоков на главной диагонали, A_i, B_i, C_i — матрицы размерности N , P_i, f_i — векторы размерности N . Для решения системы линейных алгебраических уравнений с блочной трех-диагональной матрицей предлагается использовать метод скалярной прогонки.

Применение прогонки к решению разностной задачи (1) приводит к двум основным трудностям: неэкономичностью по числу действий (т.е. большое время счета) и, главным образом, необходимостью в больших ресурсах машинной памяти. Если в расчете матрица имеет большую размерность, то необходимо выделять больше внутренней памяти, а это в свою очередь приводит к увеличению времени расчета. Помимо размера матрицы, представленные формулы имеют большое количество арифметических действий, что ведет к увеличению потребляемой памяти и времени расчета. Отсюда возникает необходимость в распараллеливании рассматриваемого алгоритма.

Для примера выбрано одномерное уравнение пьезопроводности. На тестовой задаче — уравнении пьезопроводности продемонстрированы три разных алгоритма распараллеливания скалярной прогонки: 1) алгоритм решения задачи с использованием блочного подхода; 2) алгоритм решения задачи для двумерного случая; а также 3) метод распараллеливания с использованием редуцированной системы.

Литература

1. Warren J.E, Root P.J. The behaviour of naturally fractured reservoirs. Society of Petroleum Engineers Journal. 1963. P. 245–255.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978 г.

О РАЗВИТИИ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАБОТАХ

А.И. НЕКРАСОВА¹

Е.М. Богатов (Губкин, ГФ НИТУ МИСиС;

Старый Оскол, СТИ НИТУ МИСиС)

embogatov@inbox.ru

К 1910 г. теория малых решений нелинейных интегральных уравнений (НИУ) оформилась в самостоятельную ветвь математики усилиями А.М. Ляпунова и Э. Шмидта [1]. В рамках метода Ляпунова-Шмидта была осуществлена редукция НИУ, решением которого

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-011-00402).

© Богатов Е.М., 2021

являются функции из бесконечномерного пространства, к нелинейному алгебраическому уравнению в конечномерном пространстве, решением которого являются обычные числа.

Другой метод был разработан А.И. Некрасовым при моделировании волн установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости (1919-1928) [2]. До Некрасова в подобных задачах отбрасывались нелинейные члены, что оставляло открытым само существование установившихся волн при наличии потенциала скоростей. В первой своей работе на эту тему (1919) Некрасов использовал идею Вилля: область, занятая одной волной конформно отображается внутрь единичного круга так, что свободная поверхность жидкости соответствует границе этого круга. При этом возникают два сопряжённых тригонометрических ряда, соотношение между которыми (вместе с использованием функции Жуковского) привело Некрасова к уравнению:

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{12\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \Phi(\varepsilon)}{1 + \mu \int_0^\varepsilon \sin \Phi(\omega) d\omega} K(\varepsilon, \theta) d\varepsilon, \quad (1)$$

где μ — вещественный параметр, $K(\varepsilon, \theta) = \ln \left| \frac{1 - \cos(\varepsilon - \theta)}{1 - \cos(\varepsilon + \theta)} \right|$; $\Phi(\theta)$ - угол наклона касательной к профилю волны [2, с. 255].

Для исследования уравнения (1) Некрасов разработал самостоятельную теорию. Её суть состояла в поиске решений уравнения (1) в виде ряда по степеням $\lambda = \mu - 3$ вида

$$\Phi(\theta, \lambda) = \sum_{k=1}^n \lambda^k \Phi_k(\theta)$$

и доказательстве его сходимости методом мажорант. Для определения $\Phi_k(\theta)$ Некрасовым была получена рекуррентная система нелинейных уравнений.

Аналогичные результаты были получены независимо Т. Леви-Чивита (1925) несколькими иными методами [3]. В начале 1960-х гг. во Франции было осуществлено подробное сопоставление результатов Некрасова и Леви-Чивита, которое показало их равносильность [4].

В начале 1940-х гг. метод Некрасова был "переоткрыт" Н.Н. Назаровым, который стал применять его для аналитических операторов Брату-Урысона. В середине 1950-х гг. метод Некрасова-Назарова был распространён на абстрактные операторные уравнения в банаховых пространствах [5].

Во второй половине 1950-х гг. М.А. Красносельский высказал гипотезу о том, что для уравнения вида (1) и его обобщений формальные решения в виде рядов всегда являются истинными решениями при достаточно малых значениях параметров [6, с.711]. Справедливость этой гипотезы была продемонстрирована В.В. Покорным (1958), который распространил теорию формальных рядов с числовыми коэффициентами, развитую С. Бохнером и У. Мартиным, на случай рядов с функциональными коэффициентами [6]. В. В. Покорный также показал, что система рекуррентных уравнений, используемая в методе Некрасова-Назарова, эквивалентна уравнению разветвления Шмидта и даже совпадает с ним, если уравнение разветвления разложить в ряд по соответствующему параметру.

В 1957 г. теории Некрасова и Ляпунова-Шмидта были соотнесены Н.Н. Моисеевым. Он обнаружил, что путём специального выбора переменных в задаче о стационарных волнах (1), соответствующая математическая модель может быть сведена к уравнению

$$x = \lambda Ax,$$

где A - оператор Ляпунова-Шмидта. Моисеев установил, что все известные к тому времени результаты теории установившихся гравитационных волн периодического типа могут быть получены методами Ляпунова-Шмидта и теорема существования нелинейных волн является прямым следствием этой теории [7].

Новый шаг в исследовании уравнения (1) был связан с результатами М.А. Красносельского из области топологических методов решений НИУ [8]. Он доказал, что оператор Некрасова A из правой части (1) допускает разложение по формуле Тейлора :

$$A(\varphi, \mu) = \mu B(\varphi, \mu) + C(\varphi, \mu) + D(\varphi, \mu),$$

где B – линейный, вполне непрерывный оператор; $C(\varphi, \mu)$ – оператор k -го порядка относительно φ ; $D(\varphi, \mu)$ – оператор порядка, большего, чем k .

Это позволило использовать ряд фактов теории, основанной на свойствах степени отображения. Доказанные Красносельским теоремы о структуре множества ненулевых решений уравнения (1) и его линеаризованного аналога помогли обнаружить новые свойства решений уравнения (1) – *качественного* характера.

Литература

1. Богатов Е.М. О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков/ Е.М. Богатов, Р.Р. Мухин // Чебышевский сб. — 2021. Т. 22, № 2.

2. Некрасов А. И. Собрание сочинений, Т. 1. / А.И. Некрасов. — М. : Изд-во АН СССР, 1961. —444 с.
3. Levi-Civita T. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie/ Т. Levi-Civita // Mathematische Annalen. — 1925. V. 93, Iss. 1. — P. 264–314.
4. Jolas P. Contribution à l'étude des oscillations périodiques des liquides pesants avec surface libre /P. Jolas // La Houille Blanche. — 1962. Iss. 5. — P. 635–655.
5. Ахмедов К. Т. Аналитический метод Некрасова-Назарова в нелинейном анализе / К. Т. Ахмедов // Успехи мат. наук. — 1957. Т. 12, № 2. — С. 135–153.
6. Покорный В. В. О сходимости формальных решений нелинейных интегральных уравнений / В.В. Покорный // Докл. АН СССР. —1958. Т. 120, № 4. — С. 711–714.
7. Моисеев Н. Н. О течении тяжелой жидкости над волнистым дном / Н.Н. Моисеев // Прикладная математика и механика. —1958. Т. 21, № 1. — С. 15–20.
8. Красносельский М.А. Топологические методы в теории интегральных уравнений. / М.А. Красносельский —М. : ГИТЛ, 1956. — 392 с.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ АГЕНТНО – ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

С.В. Богомолов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
bogomo@cs.msu.su

Агентно – ориентированные подходы к моделированию таких явлений, как распространение инфекций, нервного импульса по сердечной мышце, конкуренции в биологических сообществах, экономических взаимодействий, давно привлекают внимание исследователей. Вычислительным инструментарием выступают как методы на основе интегро – дифференциальных уравнений, так и с помощью методов Монте – Карло. Последние используются, как правило, на алгоритмическом уровне, без достаточной математической формализации, что затрудняет их обоснование, прежде всего с точки зрения точности проводимых расчётов и их соответствия моделируемому явлению.

Одной из старейших и наиболее разработанных областей знания в этом контексте является газовая динамика, в которой накоплен огромный как аналитический, так и вычислительный опыт.

Описание всех газодинамических явлений основано на формализации молекулярных столкновений. Молекулярно-динамические модели слишком подробны. Для их сокращения эффективным инструментом является использование вероятностных представлений.

Простая и понятная модель газа из твёрдых сфер является первым этапом построения математической формализации более сложных физических систем. Независимая схема испытаний Бернулли с интенсивностями, зависящими от прицельных параметров и относительных скоростей пар взаимодействующих молекул, определяет систему стохастических дифференциальных уравнений по скачкообразным мерам. Эта система представляет собой математическую формализацию столкновительных явлений. Из этого следует стохастическое и неслучайное уравнение Больцмана с корреляциями и флуктуациями. Этот вывод уравнения является альтернативой традиционному, основанному на балансных соображениях.

Чтобы выявить математические и вычислительные особенности исследуемой проблемы, важно написать её в безразмерном виде. Эта процедура приводит к появлению числа Кнудсена, физическим смыслом которого является отношение длины свободного пробега молекул к характерному размеру задачи. Иерархия микромакромоделей строится в соответствии с изменением этого параметра от значений порядка единицы (микро) до величин порядка 0,1 (мезо) и далее до 0,01 (макро). Аккуратное движение по этому пути приводит к более точным, по сравнению с традиционными, математическим моделям, что влияет на их большую вычислительную пригодность. В частности, макроскопические уравнения получают более мягкими для расчётов, чем классические уравнения Навье-Стокса. Цепочка сквозных, многомасштабных микро - мезо - макромоделей возникает в соответствии с разными числами Кнудсена. В результате получаются уравнения, отличающиеся от системы уравнений Навье - Стокса. Главной особенностью этого вывода является более точное осреднение по скорости благодаря аналитическому решению стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Такой подход существенно отличается от традиционного, использующего не сам случайный процесс, а его функцию распределения. Акцент ставится на ясности допущений при переходе от одного уровня детализации к другому.

Эта иерархия математических утверждений порождает соответствующую цепочку вычислительных методов, стохастических и детерминированных. Разрывный метод частиц особенно эффективен.

Тем самым мы приходим к набору уравнений, стохастических и неслучайных, покрывающих большую часть математической физики. При этом нам не требуется никаких коэффициентов вязкости, теплопроводности, диффузии, только - диаметр молекулы, либо диаметр эффективного сечения рассеяния. Отсутствие параметров, которые надо добывать из реальных данных, как это происходит в обычных агентно – ориентированных моделях, делает нашу модель в этом смысле эталонной, базовой с методологической точки зрения. Её усложнение с привлечением экспериментальных данных, или калибровка, позволяет описывать не только динамику газа из твёрдых шаров, но и реальных физических систем.

Ключевые слова: уравнения Больцмана, Колмогорова - Фоккера - Планка, Навье - Стокса, магнитной гидродинамики и квазигазодинамики, сила Лоренца; случайные процессы, СДУ по пуассоновской и винеровской мерам, метод частиц.

Литература

1. Богомолов С. В. Уравнение Больцмана без гипотезы молекулярного хаоса / С. В. Богомолов, Т. В. Захарова // Матем. моделирование. — 2021. — Т. 33, № 1. — С. 3–24.

О ФРЕДГОЛЬМОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ¹

А.В. Болтачев (Москва, РУДН)

boltachevandrew@gmail.com

Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие, Δ — неотрицательный оператор Лапласа-Бельтрами, ассоциированный с римановой метрикой. Исследуется краевая задача для уравнения колебаний на цилиндре $[0, \tau] \times M$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = f, \quad (1)$$

с условиями

$$u|_{t=0} = g_1, \quad (2)$$

$$\left(Au + B \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{t=\tau} = g_2, \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00574 А).

© Болтачев А.В., 2021

где g_1, g_2 — заданные функции на M , f — заданная функция на цилиндре $[0, \tau] \times M$, а τ — заданное число (ср. [1] и [2]). Операторы A и B — псевдодифференциальные операторы на M порядков 1 и 0 соответственно.

В работе исследуется разрешимость задачи (1)-(3). Даются условия фредгольмовой разрешимости в соответствующих функциональных пространствах.

Более точно, задача сводится к некоторому уравнению на границе области. Полученное уравнение на границе оказывается ассоциированным с квантованными каноническими преобразованиями (см. [3]). Мы применяем результаты цитированной работы, чтобы дать условия фредгольмовости оператора на границе и, следовательно, условия фредгольмовости задачи (1)-(3).

Литература

1. Антоневич А.Б. «Линейные функциональные уравнения. Операторный подход» — Минск : Университетское, 1988. — С. 195-201.
2. Соболев С.Л. «Пример корректной краевой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе» // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 109, № 4. — С. 707-709.
3. A.Yu. Savin, E. Schrohe, B.Yu. Sternin Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations. Bull. Sci. Math. 2019.

НЕПОЛНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ГРАФЕ¹

Н.П. Бондаренко (Самара, Самарский университет;
Саратов, СГУ)

bondarenkonp@info.sgu.ru

Обозначим через \mathcal{G} граф с конечным множеством вершин \mathcal{V} и множеством ребер $\{e_j\}_{j=1}^m$ с рационально зависимыми длинами $\{l_j\}_{j=1}^m: l_j = 2n_j\pi, n_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, m}$. Граф может содержать циклы, петли и кратные ребра. На каждом ребре $e_j, j = \overline{1, m}$, введем параметр $x_j \in [0, l_j]$.

Обозначим через L краевую задачу для уравнений Штурма-Лиувилля

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, l_j), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

© Бондаренко Н.П., 2021

с обобщенными условиями склейки в вершинах графа \mathcal{G} (см. подробности в [1]). Здесь λ — спектральный параметр, $q_j \in W_2^{-1}(0, l_j)$ — вещественные обобщенные функции, т.е. $q_j = \sigma_j'$, $\sigma_j \in L_2(0, \pi)$, производная понимается в смысле распределений. Уравнения (1) можно представить в эквивалентной форме

$$-(y_j^{[1]}(x_j))' - \sigma_j(x_j)y_j^{[1]}(x_j) - \sigma_j^2(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, l_j),$$

где $y_j^{[1]} = y_j' - \sigma_j y_j$ — квазипроизводная.

Работа посвящена следующей неполной обратной задаче, которая состоит в восстановлении потенциала на одном граничном ребре графа по части спектра. Для определенности будем считать, что ребро e_1 — граничное.

Обратная задача 1. Пусть функции $\{\sigma_j\}_{j=2}^m$ известны априори. По заданному подспектру Λ найти σ_1 .

Метод исследования обратной задачи 1 основан на ее сведении к обратной задаче 2 для следующей краевой задачи $R(\sigma, f_1, f_2)$:

$$-(y^{[1]}(x))' - \sigma(x)y^{[1]}(x) - \sigma^2(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, l),$$

$$y(0) = 0, \quad f_1(\lambda)y^{[1]}(l) + f_2(\lambda)y(l) = 0,$$

где $\sigma := \sigma_1$, $y^{[1]} = y' - \sigma y$, $l := l_1$, $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — целые аналитические функции, построенные по $\{\sigma_j\}_{j=2}^m$ с учетом структуры графа \mathcal{G} .

Обратная задача 2. Пусть функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ известны априори. По заданному подспектру Λ задачи $R(\sigma, f_1, f_2)$ найти σ .

В качестве Λ берется подмножество не обязательно различных собственных значений $\{\lambda_{nk}\}_{n \geq 0, k \in \mathcal{K}}$ задачи L с асимптотикой

$$\sqrt{\lambda_{nk}} = n + r_k + \varkappa_{nk}, \quad r_k \in (0, 1), \quad \{\varkappa_{nk}\} \in l_2,$$

где \mathcal{K} — конечное множество. Показано, что решение обратной задачи 1 единственно при $|\mathcal{K}| = 4n_1$ и выполнении некоторых дополнительных условий (см. [1]). Для обратной задачи 1 получены: 1) теорема единственности, 2) конструктивный алгоритм решения, 3) глобальная разрешимость, 4) локальная разрешимость и устойчивость.

Литература

1. Bondarenko N.P. A partial inverse Sturm-Liouville problem on an arbitrary graph / N.P. Bondarenko // Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — published online. — URL: <https://doi.org/10.1002/mma.7231> (дата обращения: 25.03.2021).

ЯВЛЕНИЕ БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Е.З. Боревич (Санкт-Петербург, СПбГЭТУ)
danitschi@gmail.com

Рассматривается одномерная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках. Функции $E(x)$ и $n(x)$, описывающие соответственно напряженность электрического поля и плотность движущихся электронов, удовлетворяют при $0 < x < 1$ системе уравнений [1]

$$\begin{cases} (D(E)(n' + nE))' = 0, \\ E' = f - n \end{cases} \quad (1)$$

и граничным условиям

$$E(0) = E(1) = 0, \quad \int_0^1 E(x)dx = 0. \quad (2)$$

Константа $f > 0$ задает однородную плотность ионизированной примеси, $D(E) > 0$ — коэффициент диффузии, зависящий от электрического поля.

При любом значении параметра f задача (1)-(2) имеет тривиальное решение $E(x) = 0$, $n(x) = f$. Система (1)-(2) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} D(E)(-E'' + fE - E'E) = j, \\ E(0) = E(1) = 0, \quad \int_0^1 E(x)dx = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где произвольная константа j задает плотность потока электронов. Предположим, что плотность потока электронов линейно зависит от однородной плотности ионизированной примеси, т.е. $j = fc_0 + c$, c — произвольная константа.

Предположим, что

$$K = -\frac{c_0 D'(0)}{D^2(0)} - 1 > 0.$$

При сделанных предположениях задача (3) имеет бифуркационные решения при $f_n = 4\pi n^2/K$, $n \in N$.

Литература

1. Van Roosbroeck, W. Theory of flow of electrons and holes in Germanium and other semiconductors // Bell. Syst. Tech. — 1950. — Т 29. — С. 560–607.

© Боревич Е.З., 2021

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ВНУТРЕННИХ ПОРОГОВ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА¹

Д.И. Борисов (Уфа, ИМВЦ УФИЦ РАН)

borisovdi@yandex.ru

Пусть $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$, $x = (x', x_d)$ – декартовы координаты в \mathbb{R}^{d-1} и \mathbb{R}^d , где $d \geq 2$, и $\omega \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ – произвольная область, которая может быть как ограниченной, так и неограниченной. В случае, если граница области непустая, предполагается, что она имеет гладкость C^2 . Через $A_{ij} = A_{ij}(x')$, $A_j = A_j(x')$, $A_0 = A_0(x')$, $i, j = 1, \dots, d-1$, обозначим вещественные функции, заданные на $\bar{\omega}$, со следующей гладкостью: $A_{ij}, A_j \in C^1(\bar{\omega})$, $A_0 \in C(\bar{\omega})$. Для функций A_{ij} предполагается выполненным обычное условие эллиптичности.

На области $\Omega := \omega \times \mathbb{R}$ рассматривается оператор

$$\mathcal{H} = - \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} + i \sum_{j=1}^{d-1} \left(A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} A_j \right) + A_0 \quad \text{в } \Omega$$

с краевым условием Дирихле или с третьим краевым условием:

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} - a(x')u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{i,j=1}^{d-1} A_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} - i \sum_{j=1}^{d-1} A_j \nu_j u + \nu_d \frac{\partial u}{\partial x_d}, \quad (1)$$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ – единичная нормаль к $\partial\Omega$, а $a = a(x')$ – вещественная функция, непрерывная и равномерно ограниченная на $\partial\Omega$.

Предполагается, что нижняя часть спектра самосопряженного оператора

$$\mathcal{H}' = - \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + i \sum_{j=1}^{d-1} \left(A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} A_j \right) + A_0 \quad \text{в } \omega$$

с теми же краевыми условиями, что и в (1), состоит из дискретных собственных значений $\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_m < c_0$, а его существенный спектр располагается выше точки c_0 .

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).

© Борисов Д.И., 2021

В работе рассматривается малое несимметричное возмущение оператора \mathcal{H} вида $\mathcal{H}_\varepsilon := \mathcal{H} + \varepsilon\mathcal{L}(\varepsilon)$, где $\mathcal{L}(\varepsilon)$ – некоторый линейный, не обязательно симметричный оператор, ограниченный как действующий из $W_2^2(\Omega, e^{-\vartheta|x_a|} dx)$ в $L_2(\Omega, e^{\vartheta|x_a|} dx)$, а ϑ – некоторая фиксированная положительная константа. Существенный спектр оператора \mathcal{H}_ε имеет вид $\sigma_{ess}(\mathcal{H}_\varepsilon) = [\Lambda_1, +\infty)$, а вышеупомянутые числа Λ_j служат в нем порогами. Основной результат работы – детальное описание эффекта возникновения собственных значений и резонансов у оператора \mathcal{H}_ε вблизи порогов Λ_j . Получены необходимые и достаточные условия существования и отсутствия таких собственных значений и резонансов, описано их асимптотическое поведение. В частности показано, что совокупная кратность возникающих объектов может до двух раз превышать кратность порога как собственного значения оператора \mathcal{H}' .

Работа выполнена совместно с Д.А. Зезулиным и М. Знойлом (M. Znojil) [1].

Литература

1. Borisov D.I., Zezyulin D.A., Znojil M. Bifurcations of thresholds in essential spectra of elliptic operators under localized non-Hermitian perturbations // Stud. Appl. Math. May 2021. Volume 146, Issue 4. Pages 834-880. – accepted for publication. – doi: 10.1111/sapm.12367.

О ПОКОМПОНЕНТНОЙ РАВНОМЕРНОЙ РАВНОСХОДИМОСТИ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ РАЗРЫВНЫМ ОПЕРАТОРАМ ДИРАКА

Л.З. Буксаева (Баку, Азербайджанский Государственный Педагогический Университет,
leylabuksayeva.80@yahoo.com)

Пусть интервал $(0, 2\pi)$ точками $\{\xi_i\}_{i=0}^m, 0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = 2\pi$, разбит на интервалы $G_l = (\xi_{l-1}, \xi_l), l = \overline{1, m}$.

Рассмотрим оператора Дирака

$$Ly \equiv B \frac{dy}{dx} + P(x)y, x \in \bigcup_{l=1}^m G_l = G$$

где $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$, $b_{ii} = 0$, $b_{i,3-i} = (-1)^{i-1}$, $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $P(x) = \text{diag}(p(x), q(x))$ и $p(x)$ и $q(x)$ - комплекснозначные суммируемые на $(0, 2\pi)$ функции.

Следуя [1-2], будем понимать корневые (т.е. собственные и присоединенные) вектор-функции оператора L безотносительно к виду краевых условий и условий «сшивания» (см. [3]).

Пусть $L_2^2(0, 2\pi)$ - пространство двухкомпонентных вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 f_j(x) \overline{g_j(x)} dx$ и с нормой $\|f\|_2 \equiv \|f\|_{2,[0,2\pi]} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

Пусть рассматриваемая система $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию B_2 :

- 1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ полна и минимальна в $L_2^2(0, 2\pi)$;
- 2) система собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет двум неравенствам

$$|\text{Im}\lambda_k| \leq C_1, k = 1, 2, \dots; \quad \sum_{t \leq |\lambda_k| \leq t+1} 1 \leq C_2, \forall t \geq 0;$$

- 3) система $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L_2^2(0, 2\pi)$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$, состоит из корневых вектор-функций формально сопряженного оператора

$$L^* = B \frac{d}{dx} + \overline{P(x)}, \text{ т.е. } L^* v_k = \overline{\lambda_k} v_k + \theta_k v_{k+1}$$

Для произвольной вектор-функции $f(x) \in L_2^2(0, 2\pi)$ составим частичную сумму порядка биортогонального разложения по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x, f) &= \sum_{k=1}^n (f, v_k) u_k(x), x \in G; \\ \sigma_n(x, f) &= (\sigma_n^1(x, f), \sigma_n^2(x, f))^T, \\ \sigma_n^j(x, f) &= \sum_{k=1}^n (f, v_k) u_k^j(x), j = 1, 2, \\ u_k(x) &= (u_k^1(x), u_k^2(x))^T. \end{aligned}$$

Сравним сумму $\sigma_n^j(x, f)$, $j = 1, 2$, с модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда Фурье соответствующей $-j$

компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)y$

$$S_\nu(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y} f_j(y) dy$$

порядка $\nu = |\lambda|$.

Определение. Будем говорить, что j -я компонента разложения вектор-функции $f(x) \in L_2^2(0, 2\pi)$ в биортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ равносходится равномерно на любом компакте множества $G = \bigcup_{l=1}^m G_l$ с разложением соответствующей j -й компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, если на любом компакте $K \subset G$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n^j(\cdot, f) - S_{|\lambda_n|}(\cdot, f_j)\|_{C(K)} = 0. \quad (1)$$

В работе получены следующие результаты.

Теорема Пусть потенциал $P(x)$ принадлежит классу $L_p(0, 2\pi) \otimes C^{2 \times 2}$, $p > 2$, и система корневых вектор-функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию B_2 . Тогда для того чтобы выполнялось (1) для произвольной вектор-функции $f(x) \in L_2^2(0, 2\pi)$ на любом компакте множества G , необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K \subset G$ существовала постоянная $C(K)$, обеспечивающая справедливость для всех номеров k неравенства

$$\|u_k\|_{L_2^2(K)} \|v_k\|_{L_2^2(0, 2\pi)} \leq C(K).$$

Литература

- [1] Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I. // Дифференц.уравнения. 1980. — Т. 16, — № 5, С. 771–794.
- [2] Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II. // Дифференц.уравнения. 1980. — Т. 16, — № 6, С. 980–1009.
- [3] Курбанов В.М., Буксаева Л.З. О неравенстве Рисса и базисности систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака. // Дифференц.уравнения, 2019. — Т. 55, — № 8, С. 1079–1089.

СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА¹

М.В. Булатов, Л.С. Соловарова (Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
mvbul@icc.ru, soleilu@mail.ru

В докладе представлены результаты по исследованиям на предмет существования и единственности решения систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода. У данных систем матрица-ядро перед искомой вектор-функцией является квадратной.

Рассмотрим случаи одномерных и двумерных систем вида

$$\int_0^t L(t, \tau)v(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

и

$$\int_0^t \int_0^x K(t, x, \tau, s)u(\tau, s)dsd\tau = \varphi(t, x), \quad (2)$$
$$(t, x) \in \Omega = [0, T] \times [0, X]$$

где $L(\cdot)$, $K(\cdot)$ — $(n \times n)$ -матрицы, $v(t)$ и $u(t, x)$ — искомые, $f(t)$ и $\varphi(t, x)$ — заданные n -мерные вектор-функции.

Представлены результаты для систем (1),(2) с условием $\det L(t, t) \equiv 0$ и $\det K(t, x, t, x) \equiv 0$, соответственно.

Выделены классы систем (1), для которых представлены и обоснованы численные методы решения первого и второго порядков. Приведены численные расчеты.

Литература

1. Булатов М.В. Численное решение систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода I рода /М.В. Булатов//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1998. —Т.38, №4. —С. 607–611.

2. Булатов М.В. Численное решение систем интегральных уравнений первого рода /М.В. Булатов//Вычислительные технологии. — 2001. —Т.6, №4. —С. 3–8.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-51-552003).

© Булатов М.В., Соловарова Л.С., 2021

К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ

А.О. Бурый, Н.Г. Абрашина-Жадаева (Минск, БГУ)

zhadaeva@bsu.by

В настоящее время востребованы методы математического моделирования процессов протекающих в технологических операциях при лазерном излучении. Этому и посвящено настоящее сообщение.

Рассматривается математическая модель, которая характерна при различных технологических материалах [1] и может быть сведена к квазилинейному уравнению теплопроводности в параллелепипеде или цилиндре (см, например, [2] и цитируемую там литературу):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = L(T) = \sum_{i=1}^3 L_{\alpha}(T),$$

$$L_{\alpha}(T) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(a(T) \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}}) \quad (0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \quad 0 \leq t \leq t_k), \alpha = 1, 2, 3$$

где

$$T = \int_0^u c(\gamma) d\gamma, \quad a(T) = \frac{K(u)}{\rho c(T)},$$

$K(u)$ -коэффициент теплопроводности, ρ -плотность материала, $c(u)$ коэффициент теплоемкости. На поверхности происходит теплообмен по закону Стефана-Больцмана[1].

В [2] исследовались численные алгоритмы на основе локально одномерных разностных схем с применением итерационных процессов Ньютона. В настоящем сообщении при построении разностных схем применена методология [3]-[5], которая учитывает конкретные особенности задачи. Производится переход к линеаризованной неявной схеме с коэффициентами Ньютона-Котеса, для которой имеет место устойчивость разностного алгоритма, а далее, с оператором $A(t, T)$ из [3], строится безытерационный разностный алгоритм вида:

$$\tau^{-1}(\hat{y}_{\alpha} - y) + \sigma \tau (A_{\alpha}(t, y_0) y_{\alpha})_t + \sum_{i=1}^3 A_i(t, y_0) y_i = 0,$$

$$y = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i, \quad A(t, T) = \sum_{i=0}^3 A_i(t, T), \quad A_0(t, T_0) = A_0(t),$$

$\alpha = 0, 1, 2, 3$, $A_0(t)$ -линейный оператор, см [3].

Реализация схемы проста, она осуществляется последовательно от $\alpha = 0$ и далее $\alpha = 1, 2, 3$. Доказано, что алгоритм устойчив, справедливо утверждение теоремы 2.1 из [5]. Экспериментально показано, что численный алгоритм достаточно точно описывает реальный процесс прогрева поверхностного слоя детали при лазерной закалке и менее трудоемок в реализации по сравнению с методом, предложенном в [2].

Литература

1. Smithies D.J. Modelling the Distribution of Laser Light in Port-Wine Stains with the Monte Carlo Method / Smithies D.J. Butler P.H. / Physics in Medicine and Biology. // —1995 — Vol. 40. — P. 701-733.

2. Абрашин В.Н. Математическое моделирование и численные методы для расчета тепловых процессов при лазерной закалке деталей. / Абрашин В.Н., Е.Е.Козлова Е.Е., Лубочкин В.А. / Препринт ИМ АН // — 1989г., — Минск, Беларусь.

3. Абрашин В.Н. Экономичные аддитивные разностные схемы для многомерных нелинейных нестационарных задач. / Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 7. —907-1017.

4. Абрашин В.Н. Об одном классе аддитивных методов для нелинейных многомерных задач. // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 7. —879-887.

5. Абрашина-Жадаева Н.Г. Многокомпонентные векторные схемы для задач математической физики. // Автореферат на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — 2008.

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ¹

В.Б. Васильев, А.А. Ходырева (Белгород, НИУ БелГУ)
711012@bsu.edu.ru

Пусть $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2$, $h > 0$, $\tilde{A}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^2$ — периодическая функция с основным кубом периодов $h^{-1}\mathbb{T}^2$, $\tilde{A}(\xi) \in L_1(h^{-1}\mathbb{T}^2)$, $K \subset \mathbb{R}^2$ — первый квадрант в \mathbb{R}^2 , $x_1, x_2 > 0$. Дискретный псевдодифференциальный оператор на функциях дискретного аргумента $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWG-2020-0029).

© Васильев В.Б., Ходырева А.А., 2021

определяется формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} \int_{h^{-1}\mathbb{T}^2} \tilde{A}(\xi) e^{i(\tilde{y}-\tilde{x}) \cdot \xi} u_d(\tilde{y}) d\xi h^m, \quad \tilde{x} \in K_d \equiv K \cap h\mathbb{Z}^2,$$

функция $\tilde{A}(\xi)$ называется символом дискретного псевдодифференциального оператора.

Мы исследуем разрешимость дискретной задачи Дирихле вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_d \tag{1}$$

$$u_d(\tilde{x}_1, 0) = f_d(\tilde{x}_1) \quad \tilde{x}_1 > 0 \tag{2}$$

$$u_d(0, \tilde{x}_2) = g_d(\tilde{x}_2) \quad \tilde{x}_2 > 0 \tag{3}$$

с заданными функциями дискретного аргумента v_d, f_d, g_d в дискретных аналогах пространств Соболева–Слободецкого H^s в предположении, что эллиптический символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает специальную периодическую волновую факторизацию [1] с индексом \varkappa , удовлетворяющим условию $\varkappa - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$.

В работе приводятся достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1),(2),(3) и дается сравнение дискретного решения с непрерывным решением соответствующей задачи Дирихле-решением

Отметим, что в случае дискретного полупространства уравнение (1) было изучено в [2,3], кроме этого в [4] было дано сравнение решения аналогичной дискретной задачи с ее непрерывным аналогом.

Литература

1. Vasilyev V.B. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators / V.B. Vasilyev // AIP Conf. Proc. — 2017. — V. 1863. — P. 140014.

2. Vasilyev A.V. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space / A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev // Math. Model. Anal. — 2018. — V.23, No. 3. — P. 492–506.

3. Васильев В.Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное / В.Б. Васильев // Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2019. — Т. 160. — С. 18–27.

4. Васильев В.Б. О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах / В.Б. Васильев, О.А.Тарасова // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики и ее приложения. Тематические обзоры. — 2020. — Т. 174. — С. 12–19.

**О НОВОЙ ФОРМЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ
КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**
М.Ю. Ватолкин (Ижевск, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова)
vtyu6886@gmail.com

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $\mathcal{P} = (p_{ik})_0^n$ — нижняя треугольная матрица, $p_{ik} : I \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а $1/p_{ii}(\cdot)$ ($i \in 1 : n - 1$), $p_{ik}(\cdot)/p_{ii}(\cdot)$ ($i \in 1 : n, k \in 0 : i - 1$) локально суммируемы в I . Определим квазипроизводные ${}^k_{\mathcal{P}}x$ ($k \in 0 : n$) функции $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами

$${}^0_{\mathcal{P}}x \doteq p_{00}x, \quad {}^k_{\mathcal{P}}x \doteq p_{kk} \frac{d}{dt} ({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x) + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu} ({}^{\nu}_{\mathcal{P}}x) \quad (k \in 1 : n).$$

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение

$${}^n_{\mathcal{P}}x(t) = 0, \quad t \in I. \tag{1}$$

Его решением называется всякая функция $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^k_{\mathcal{P}}x$ ($k \in 0 : n - 1$) и почти всюду в I удовлетворяющая уравнению (1) (см. [1]).

Ранее получено (см. [2]) представление фундаментальной системы решений уравнения (1). Пусть матрица

$$\mathcal{Q} \doteq \text{diag}(p_{00}, p_{11}, \dots, p_{n-1, n-1}, 1).$$

Фундаментальная система решений уравнения

$${}^n_{\mathcal{Q}}x(t) = 0, \quad t \in I, \tag{2}$$

имеет вид (см. [1, 2])

$${}^0_{\mathcal{Q}}w_0(t) = 1, \quad {}^0_{\mathcal{Q}}w_1(t) = \int_a^t d\tau/p_{11}(\tau),$$

$${}^0_{\mathcal{Q}}w_i(t) = \int_a^t \frac{dt_0}{p_{11}(t_0)} \int_a^{t_0} \frac{dt_1}{p_{22}(t_1)} \cdots \int_a^{t_{i-2}} \frac{dt_{i-1}}{p_{ii}(t_{i-1})} \quad (i \in 2 : n - 1).$$

Пусть

$$A_{n-\nu-1, i}^0 \doteq {}^{\nu}_{\mathcal{Q}}w_i(t) \quad (\nu \in 0 : n - 1),$$

$$a_{ki}^j(t) \doteq \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \frac{p_{n-k,\nu}(t)}{p_{n-k,n-k}(t)} A_{n-\nu-1,i}^j(t) \quad (k \in 0 : n-1),$$

$$A_{0i}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t a_{0i}^j(s) ds,$$

$$A_{ki}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t \left(a_{ki}^j(s) + \frac{A_{k-1,i}^{j+1}(s)}{p_{n-k,n-k}(s)} \right) ds$$

$$(k \in 1 : n-1, \quad i \in 0 : n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots).$$

Пусть функции $p_{ii}(t) > 0$ почти всюду в I ($i \in 1 : n-1$), $1/p_{ii}(t)$ ($i \in 1 : n-2$), $p_{ik}(t)/p_{ii}(t)$ ($i \in 1 : n, k \in 0 : i-1$) локально ограничены в существенном на I . Тогда (см. [2]) фундаментальная система решений уравнения (1) представима в виде

$${}^0_{\mathcal{P}}u_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1,i}^j(t) \quad (t \in I, i \in 0 : n-1). \quad (3)$$

В настоящих тезисах предлагается представление фундаментальной системы решений уравнения (1) в виде сумм других рядов, которые сходятся к функциям ${}^0_{\mathcal{P}}u_i(t)$ ($t \in I, i \in 0 : n-1$) быстрее, чем ряды, находящиеся в правой части равенства (3).

Пусть сейчас $\mathcal{Q} \doteq \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$, где $\mathcal{Q}_1 \doteq \text{diag}(p_{00}, p_{11}, \dots, p_{n-1,n-1}, 1)$, матрица $\mathcal{Q}_2 = (q_{ij})_0^n$, строится следующим образом: $q_{ij} \doteq p_{ij} \cdot \delta_{i,j+1}$ ($i, j \in 0 : n$), где δ_{ij} есть символ Кронекера.

Известно, что фундаментальная система решений уравнения (2) в этом случае имеет вид (см. [1])

$$\begin{aligned} {}^0_{\mathcal{Q}}w_0(t) &= \exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right), \quad {}^0_{\mathcal{Q}}w_i(t) = \\ &= \int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{p_{22}(t_2)} \cdots \int_a^{t_{i-1}} \frac{dt_i}{p_{ii}(t_i)} \exp \left(- \sum_{\nu=1}^{i+1} \int_{t_{\nu-1}}^{t_{\nu}} \frac{p_{\nu,\nu-1}(\tau)}{p_{\nu\nu}(\tau)} d\tau \right) \\ &\quad (t_0 = t, t_n = a, i \in 1 : n-1). \end{aligned}$$

Пусть сейчас

$$A_{n-\nu-1,i}^0(t) \doteq \nu_Q w_i(t) \quad (\nu \in 0 : n-2),$$

$$a_{ki}^j(t) \doteq \sum_{\nu=0}^{n-k-2} \frac{p_{n-k,\nu}(t)}{p_{n-k,n-k}(t)} A_{n-\nu-1,i}^j(t) \quad (k \in 0 : n-2),$$

$$A_{0i}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t a_{0i}^j(s) ds,$$

$$A_{ki}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t \left(a_{ki}^j(s) + \frac{A_{k-1,i}^{j+1}(s)}{p_{n-k,n-k}(s)} \right) ds$$

$$(k \in 1 : n-2, \quad i \in 0 : n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема. Пусть $p_{ii}(t) > 0$ почти всюду в I ($i \in 1 : n-1$), $1/p_{ii}(t)$ ($i \in 1 : n-2$), $p_{ik}(t)/p_{ii}(t)$ ($i \in 1 : n, k \in 0 : i-1$) локально ограничены в существенном на I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (1) представима в виде

$${}^0_P u_i(t) = A_{n-1,i}^0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j A_{n-2,i}^j(t) \quad (t \in I, i \in 0 : n-1).$$

Утверждение полученной теоремы может быть использовано, например, для приближённого построения элементов фундаментальной системы решений уравнения (1).

Литература

1. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В.Я. Дерр // Изв. института математики и информатики УдГУ. — 1999. — № 1(16). — С. 3–105.
2. Ватолкин М.Ю. О представлении решений квазидифференциального уравнения / М.Ю. Ватолкин, В.Я. Дерр // Изв. вузов. — 1995. — № 10(401). — С. 27–34.

**ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ КОВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
ДЛЯ ВЕКТОРНОГО И СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ**

Ю.П. Вирченко, А.Э. Новосельцева (Белгород, БелГУ)

virch@bsu.edu.ru

Изучается специальный класс квазилинейных дифференциальных операторов $\mathbb{L}[\cdot]$ первого порядка. Операторы действуют в функциональном пространстве $[C_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^{N+3}$ пар $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}); \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \rangle$, где $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \langle u_j(\mathbf{x}); j = 1, 2, 3 \rangle$ — векторное поле и $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}); s = 1 \div N \rangle$ — набор скалярных полей $\rho^{(s)}(\mathbf{x})$, $s = 1 \div N$ поле на \mathbb{R}^3 . Поля, входящие в этот набор, непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$. С изучаемым классом операторов, обозначаемым нами $\mathfrak{K}_{N,1}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$, связывается класс эволюционных систем

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \left(\mathbb{L}_j[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] \right)(\mathbf{x}, t), \quad \dot{\rho}^{(s)}(\mathbf{x}, t) = \left(\mathbb{L}^{(s)}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] \right)(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

$s = 1 \div N$ квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которым подчинены пары $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle$ вектор-функций $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \langle u_j(\mathbf{x}, t); j = 1, 2, 3 \rangle$, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, t) = \langle \rho^{(s)}(\mathbf{x}, t); s = 1 \div N \rangle$, зависящие от дополнительного параметра $t \in \mathbb{R}$ (времени), со значениями в $[C_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)]^{N+3}$.

Операторы класса $\mathfrak{K}_{N,1}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ определяются формулами

$$\mathbb{L}_j[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_l u_k(\mathbf{x}) + b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k \rho^{(s)} + H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad (2)$$

$$\mathbb{L}^{(s)}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}] = a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_l u_k(\mathbf{x}) + b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k \rho^{(s')} + H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad (3)$$

где $j = 1, 2, 3$; $\nabla_l = \partial/\partial x_l$, $l = 1, 2, 3$ и принимается положение о суммировании по повторяющимся как нижним, так и верхним индексам $l, k \in \{1, 2, 3\}$, $s' = 1 \div N$.

Принадлежность операторов $\mathbb{L}[\cdot]$ к классу $\mathfrak{K}_{N,1}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ определяется тем, что они обладают свойством *однородности* (отсутствием явной зависимости коэффициентов $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ от $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) и $t \in \mathbb{R}$, а также свойством *ковариантности*. Последнее формулируется, в общем случае, в терминах представлений группы \mathbb{O}_3 ортогональных преобразований \mathbb{R}^3 . Так как системы уравнений связывают наборы полей, в которые входит только одно векторное поле, то свойство ковариантности таких систем и связанных с ними операторов $\mathbb{L}[\cdot]$ означает,

что, при преобразовании значений поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ковариантным образом согласно матрицам $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$ при неизменных значениях полей, входящих в набор $\boldsymbol{\rho}$, образы действия дифференциальных операторов $L^{(s)}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]$, $s = 1 \div N$ остаются неизменными, а образы действия $\langle L_j[\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}]; j = 1, 2, 3 \rangle$ набора операторов $\langle L_j[\cdot]; j = 1, 2, 3 \rangle$ преобразуется как вектор в \mathbb{R}^3 согласно той же матрицы \mathcal{A} .

В работе дается описание класса $\mathfrak{K}_{N,1}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ операторов в терминах допустимых для каждого из них наборов коэффициентов $a_{jk;l}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a_{k;l}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_{jk}^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_k^{(s,s')}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $H_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, $H^{(s)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$. Так как для фиксированных значений полей \mathbf{u} и $\boldsymbol{\rho}$, для каждой фиксированной пары значений $s, s' \in 1, \dots, N$ при поворотах пространства \mathbb{R}^3 значения функций $H^{(s)}$ остаются неизменными, значения наборов функций H_j , $b_k^{(s,s')}$ преобразуются как векторы в \mathbb{R}^3 , значения наборов функций $a_{k;l}^{(s)}$, $b_{jk}^{(s)}$ и наборов функций $a_{jk;l}$ преобразуются как тензоры в \mathbb{R}^3 , соответственно, 2-го и 3-го рангов, то общий вид этих коэффициентов дается в терминах разложения по соответствующему каждому из них целому рациональному базису форм-инвариантных функций с коэффициентными функциями зависящими от единственного локального инварианта группы вращений векторного поля $\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t)$.

Установлены необходимые и достаточные условия гиперболичности системы уравнений (2), (3), в терминах коэффициентных функций указанных разложений, то есть установлены условия, при которых $(N + 3) \times (N + 3)$ -матрица, имеющая блочную структуру

$$\begin{pmatrix} q_k a_{jk;l} & q_k b_{jk}^{(s')} \\ q_k a_{k;l}^{(s)} & q_k b_k^{(s,s')} \end{pmatrix},$$

при любом фиксированном векторе $\mathbf{q} = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$ и для любых значениях набора $\langle \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^N \rangle$ диагонализуема и имеет только вещественные собственные числа.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.¹

В.В. Власов (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики)
vikmont@yandex.ru

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, получены результаты о структуре и локализации их спектра. На этой основе установлены результаты о существовании сильных и обобщенных решений этих уравнений, а также получены результаты о представлении решений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и не вещественной частям спектра упомянутых оператор-функций (см. [1]–[4]). Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1]) и имеют ряд других важных приложений.

Представлены результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Установлено экспоненциальное убывание полугруппы при известных предположениях для ядер интегральных операторов. На основе полученных результатов установлена корректная разрешимость исходной начальной задачи для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с соответствующими оценками решения. Приводятся примеры применения полученных результатов для интегро-дифференциальных уравнений с экспоненциальными и дробно-экспоненциальными ядрами интегральных операторов (см. [5]).

Литература

1. Власов В.В. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан — М. : МАКС Пресс, 2016. — 488 с.
2. Власов В.В. Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

© Власов В.В., 2021

вязкоупругости / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т.55, № 4. — С. 574–587.

3. Власов В. В. Спектральный анализ и разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 496. — С. 16–20.

4. Власов В.В. О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, предствимыми интегралами Стилтгеса / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т.57, № 4. — С. 536–551.

5. Власов В. В. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56, № 8. — С. 1122–1126.

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ В БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ ДОВЕРИЯ¹

Ю.Е. Гагарин, У.В. Никитенко, М.А. Степович (Калуга,

КФ МГТУ им. Н. Э. Баумана,

Калуга, КФ МГТУ им. Н. Э. Баумана,

Калуга, КГУ им. К. Э. Циолковского)

gagarin_je@bmstu.ru

Рассмотрим байесовскую сеть доверия, в которой вершинами являются события A_j , $j = \overline{1, M}$. Для каждой вершины определена априорная вероятность $P(A_j)$. Вершины сети связаны условными плотностями вероятностей $P(x/A_j)$, параметрический вид которых известен. Обозначим $\eta_j(x, \Theta) = P(x/A_j)P(A_j)$, где Θ - вектор неизвестных параметров размера S . Исходные данные являются результатами конкретных экспериментов, и как любые измерения содержат случайные ошибки, которые необходимо учитывать. Для получения несмещенных оценок параметров Θ с учетом ошибок в значениях функций и аргументов воспользуемся методами конфлюэнтного анализа. По несмещенным оценкам параметров Θ определим точечные и интервальные оценки функций $\eta_j(x, \Theta)$:

$$P(\eta_j(x, \Theta) - t_\gamma \sqrt{D(\eta_j(x, \Theta))} \leq \eta_j(x, \Theta) \leq \eta_j(x, \Theta) + t_\gamma \sqrt{D(\eta_j(x, \Theta))}),$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271, при финансовой поддержке РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

© Гагарин Ю.Е., Никитенко У.В. Степович М.А., 2021

где γ – доверительная вероятность, t_γ – квантиль распределения Стьюдента, $D(\eta_j(x, \Theta))$ – дисперсия значения функции $\eta_j(x, \Theta)$, которая в случае некоррелированности S – параметров может быть вычислена по формуле:

$$D(\eta_j(x, \Theta)) = \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial \eta_j(x, \Theta)}{\partial \theta_k} \right)^2 \Big|_{\Theta = \hat{\Theta}} D(\theta_k)$$

Байесовские сети доверия позволяют принимать решение с минимальным уровнем ошибки. Примем, что потери отсутствуют, если выбрано правильное решение при наблюдении конкретного значения признака x и потери единичны, если решение неверно. При таких условиях вероятность ошибки определяется по формуле:

$$P(e) = 1 - \sum_{j=1}^M \int_{R_j} \eta_j(x, \Theta) dx.$$

При определении вероятности ошибки нужно принимать во внимание погрешности функций $\eta_j(x, \Theta) \pm \Delta \eta_j(x, \Theta)$. С учетом погрешностей $\Delta \eta_j(x, \Theta)$ вероятность ошибки будет определяться по формуле:

$$P(e) \pm \Delta P(e) = 1 - \sum_{j=1}^M \int_{R_j \pm \Delta R_j} [\eta_j(x, \Theta) \pm \Delta \eta_j(x, \Theta)] dx$$

Литература

1. Gagarin Yu.E. Considering information uncertainty when assessing risk in bayesian belief network / Yu.E. Gagarin, U.V. Nikitenko, M.A. Stepovich // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems – 2020 J. Phys.: Conf. Ser.1479 012054

2. Gagarin Yu.E. Conditional probabilities interval estimation in Bayesian belief networks using stochastic data / Yu.E. Gagarin, U.V. Nikitenko, M.A. Stepovich // Пятая Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-5): материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23–27 ноября 2020 г. –С. 269–271.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ СФЕР МЕЗОФАЗЫ ИГОЛЬЧАТОГО КОКСА¹

А.Ш. Галин, Л.В. Еникеева, М.Р. Еникеев (Уфа, УГНТУ)
aidar.galins@gmail.com

В процессе переработки нефтяного сырья на этапе коксования образуется нефтяной кокс. Среди прочих видов нефтяного кокса игольчатый кокс является наиболее подходящим для изготовления крупноразмерных графитированных электродов, которые масштабно применяются в металлургии из-за своих высокоэкологических свойств. В ходе формирования игольчатого кокса протекает промежуточная фаза, именуемая мезофазой. Именно регулирование скорости роста и слияния мезофазных сфер является одним из важнейших этапов в производстве игольчатого кокса. Идентификация сфер мезофазы с помощью алгоритмов машинного обучения таких, как гистограмма направленных градиентов и метод опорных векторов оптимизирует производство и сокращает время, затраченное на анализ игольчатого кокса.

Игольчатый кокс — это высокоструктурированный углеродный продукт с низким содержанием металлов и серы. Данный вид кокса на высоких температурах при повышенном коэффициенте термического расширения увеличивает электропроводимость графитированных электродов.

Мезофаза характеризует переход кокса из жидкого в твердое состояние с образованием мезофазных сфер. Размеры мезофазы определяют прочностные, микроструктурные и другие характеристики коксов. Такие свойства, как химический состав первоначального сырья, температурный режим, вязкость реакционной массы влияют на мезофазные превращения. Для оценки микроструктуры коксов используется методика, заключающаяся в визуальном определении структурных элементов на оптическом микроскопе.

Применение алгоритмов машинного обучения в задаче идентификации мезофазных сфер игольчатого кокса на снимках, полученных с помощью оптической микроскопии, может сэкономить время, затраченное специалистами на визуальный метод, сократить неточности в измерениях и оптимизировать производство игольчатого кокса.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-60014).

© Галин А.Ш., Еникеева Л.В., Еникеев М.Р., 2021

В данной статье используются два метода машинного обучения для распознавания объектов на изображении: гистограмма направленных градиентов (Histogram of oriented gradients, HOG) и метод опорных векторов (Support vector machine, SVM).

Гистограмма направленных градиентов. Градиенты пикселей на снимке содержат два значения: величину и направление. Полученные градиенты распределяются по столбцам в зависимости от угловых значений направлений и формируют гистограмму. Во избежание влияния вариаций освещенности снимка на величины гистограммы производится нормализация. Выходным значением работы алгоритма HOG является дескриптор, который объединяет в себе нормализованные гистограммы.

Метод опорных векторов. Метод SVM осуществляет классификацию объектов снимка на основе значений дескриптора. Обучение классификатора реализуется на дескрипторах изображения отдельных сфер мезофазы, представляющих собой положительную выборку данных, и на дескрипторах неинформативных изображений, являющихся отрицательной выборкой данных. Снимок образца игольчатого кокса, полученный с помощью оптической микроскопии, загружается в программу обученного классификатора. Результат классификатора есть изображение игольчатого кокса с отмеченными мезофазными сферами.

Литература

1. Dalal N., Triggs B. Histograms of oriented gradients for human detection. — Montbonnot, France. — 2005. — P. 2–3.
2. Кисельков Д.М. Углеродные материалы на основе каменноугольного сырья / Д.М. Кисельков, И.В. Москалев, В.Н. Стрельников — Пермь : Изд-во ПФИЦ УрО РАН. — 2013. — С. 2–4.
3. Guyon I., Weston J., Barnhill S., Vapnik V. Gene Selection for Cancer Classification using Support Vector Machines. // Machine Learning 46 (1-3). Netherlands: Kluwer Academic Publishers. — 2002, — P. 395–397

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ¹

Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова (Воронеж, ВГПУ, ВГТУ)

g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

Пусть $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{Z})$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом модуля двусторонних комплексных последовательностей со стандартным скалярным произведением и порождаемой им нормой. Пусть в \mathcal{H} задан линейный оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ формулой $(Ax)(n) = ax(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in D(A)$, $a \in \mathbb{C}$, с областью определения $D(A) = \{x \in \ell_2(\mathbb{Z}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |nx(n)|^2 < \infty\}$. Возмутим оператор A ограниченным оператором B , действующим по формуле $(Bx)(n) = c_1(n)x(n-1) + c_2(n)x(n+1) + b(n)x(-n)$, где последовательности $c_1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $c_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $b: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ суммируемы с квадратом. Оператор B есть оператор с инволюцией.

Символом $Endl_2$ обозначена банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в ℓ_2 , а символом $\sigma_2(\ell_2) \subset Endl_2$ – идеал операторов Гильберта-Шмидта. Очевидно, что $B \in \sigma_2(\ell_2)$.

Спектр $\sigma(A)$ оператора A представим в виде $\sigma(A) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \{\lambda_n\}$, $\lambda_n = an, n \in \mathbb{Z}$, а его собственными векторами являются векторы стандартного базиса пространства $\ell_2(\mathbb{Z})$. Пусть $P_n = P(\{an\}, A)$ – спектральный проектор (проектор Рисса), построенный по спектральному множеству $\{an\}$ оператора A , и обозначим $P_{(k)} = \sum_{|i| \leq k} P_i$.

С помощью метода подобных операторов [1]-[4] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует такое $k \geq 0$, что разностный оператор $A - B$ подобен блочно-диагональному оператору $A - P_{(k)}XP_{(k)} - \sum_{|i| > k} P_iXP_i = A - V$, где $V \in \sigma_2(\ell_2)$ и преобразование подобия осуществляет оператор $U \in Endl_2$, такой что $U - I \in \sigma_2(\ell_2)$.*

Теорема 2. *Собственные значения оператора $A - B$ имеют асимптотическое представление*

$$\lambda_i = ai + \xi_i, |i| > k,$$

где последовательность $(\xi_i, |i| > k)$ принадлежит l_1 .

Теорема 3. *Собственные векторы $\tilde{e}_i, |i| > k$ оператора $A - B$ удовлетворяют оценке*

$$\|\tilde{e}_i - e_i\| \leq \xi'_i,$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

© Гаркавенко Г.В., Ускова Н.Б., 2021

где последовательность $\{\xi'_i, |i| > k\}$ принадлежит l_2 . Векторы $\tilde{e}_i, i \in \mathbb{Z}$ образуют в $l_2(\mathbb{Z})$ базис Бари, в частности, базис Рисса, и p -базис при $p \geq 2$.

Отметим, что указанный оператор $A - B$ представляет иллюстративный интерес с точки зрения применимости метода подобных операторов, потому что для него можно построить много различных допустимых троек [2]-[3] с разными пространствами допустимых возмущений.

Литература

1. Гаркавенко Г. В. О спектральных свойствах разностного оператора с растущим четным потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики.—Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2015.—С. 14–16.

2. Гаркавенко Г. В. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. —2016.—Т. 16., № 3.—С. 101–111.

3. Гаркавенко Г. В. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова //—Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16., № 4.—С. 395–402.

4. Гаркавенко Г. В. О системе проекторов, построенной по спектральным множествам возмущенного оператора /Г.В. Гаркавенко // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.—Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2018.—С. 77–80.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ¹

Е.Н. Гетманова, В.В. Обуховский (Воронеж, ВГПУ)

ekaterina_getmanova@bk, valerio-ob2000@mail.ru

В настоящей работе исследуется периодическая задача для случайного дифференциального включения следующего вида:

$$x'(\omega, t) \in \varphi(\omega, t, x(\omega, t)) + \mathcal{F}(\omega, t, x(\omega, t)), \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания (проект № FZGF-2020-0009).

© Гетманова Е.Н., Обуховский В.В., 2021

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, \quad (2)$$

где отображение $\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условию T -периодичности по второму аргументу и выполнены следующие условия: $\varphi 1)$ $\varphi: \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — случайный c -оператор (см. [1]); $\mathcal{F} 1)$ $\mathcal{F}: \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ — случайный u -мультиоператор; $\mathcal{F} 2)$ существует функция $k: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что (j) $k(\omega, \cdot) \in L^2$ -интегрируема для любого $\omega \in \Omega$, (jj) $k(\cdot, t)$ — измерима п.в. $t \in I$, и $\|\mathcal{F}(\omega, t, x)\| := \sup\{|z|: z \in \mathcal{F}(\omega, t, x)\} \leq k(\omega, t)(1 + \|x\|)$ для всех $\omega \in \Omega$, $t \in I$ и $x \in \mathbb{R}^n$, где $I = [0, T]$.

Под случайным решением задачи (1), (2) понимается функция $\xi: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что (i) оператор $\omega \in \Omega \rightarrow \xi(\omega, \cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$ измерим; (ii) для каждого $\omega \in \Omega$ абсолютно непрерывная функция $\xi(\omega, \cdot) \in C(I; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (1), (2) для п.в. $t \in I$.

Из условий $(\mathcal{F} 1)$, $(\mathcal{F} 2)$ следует, что мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}: \Omega \times C(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(L^2(I, \mathbb{R}^n))$, заданный как $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, x(s)) \text{ п.в. } s \in I\}$ корректно определен, $\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2 = \sup\{\|f\|_2 : f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\}$.

Согласно $(\varphi 1)$ можно определить мультиоператор суперпозиции $\mathfrak{P}: \Omega \times C(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(L^2(I, \mathbb{R}^n))$, соответствующий включению (1), следующим образом: $\mathfrak{P}(\omega, x) = \{h \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : h(s) = \varphi(\omega, s, x(s)) + f(s) \text{ п.в. } s \in I \text{ для некоторого } f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\}$.

Символом C_T обозначим пространство непрерывных T -периодических функций $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$. Через

$\|x\|_2 = \left(\int_0^T \|x(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$ обозначим норму в L^2 . Пусть $\mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x) = \{g_{\omega} \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : g_{\omega}(s) \in \partial \mathcal{G}(\omega, x(s)) \text{ для п.в. } s \in I\}$, где символ $\partial \mathcal{G}(\omega, x)$ — обобщенный градиент Кларка функции $\mathcal{G}(\omega, \cdot)$ в точке (см. [2]).

Определение 1. (ср. [3]) Случайный негладкий потенциал $\mathcal{G}: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (1), если найдется $N > 0$ такое, что для всех $\omega \in \Omega$ и всех абсолютно непрерывных $x \in C_T$ с $\|x\|_2 \geq N$, выполнено соотношение

$$\int_0^T \langle g_{\omega}(s), h_{\omega}(s) \rangle ds > 0$$

для всех суммируемых сечений $h_{\omega} \in \mathfrak{P}(\omega, x)$ и $g_{\omega} \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x)$.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — случайный негладкий невырожденный потенциал с ненулевым случайным топологическим индексом (см. [1]). Пусть выполнены следующие условия:

1) существуют константы $\varepsilon > 0$, $K > 0$ и $\beta \geq 1$ такие, что

$$\|\tilde{g}_\omega\| \geq \varepsilon \|\tilde{x}\|^\beta - K \quad \text{и} \quad \langle \varphi(\omega, s, \tilde{x}), \tilde{g}_\omega \rangle \geq \varepsilon \|\tilde{g}_\omega\|^2,$$

для любых $\omega \in \Omega$, $s \in I$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\tilde{g}_\omega \in \partial \mathcal{G}(\omega, x)$.

2) для любого $\omega \in \Omega$ и абсолютно непрерывной функции $x(\omega, \cdot) \in C_T$, выполнено:

$$\limsup_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2} < \varepsilon^2 T^{(1-\beta)/2}.$$

Тогда задача (1), (2) имеет случайное решение.

Литература

1. Andres J. and Górniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Górniewicz // Topol. Meth. Nonl. Anal. — 2012. — 40. — P. 337–358.

2. Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis / F. H. Clarke // 2nd edn. Classics in Applied Mathematics **5**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990.

3. Корнев С.В. Негладкие интегральные направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях / С.В. Корнев // Автоматика и телемеханика. — 2015. — N 9. — С. 31–43.

О ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДИРАКА

Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева (Калуга,
КГУ им. К.Э. Циолковского)
losh-elena@yandex.ru

Для построения обобщенных степеней (ОС), определенных дифференциальным уравнением Дирака квантовой электродинамики, хотя это и не обязательно, более удобно его взять в несколько модифицированном виде

$$\left. \begin{aligned} e^{-2ikx_4} \frac{dv_1}{dx_4} + 2\overline{D}_3 v_2 &= 0, \\ 2D_3 v_1 + e^{2ikx_4} \frac{dv_2}{dx_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $k = \frac{mc}{\hbar}$, $x_4 = ct$ - временная координата, v_1, v_2 - двухкомпонентные спиноры

$$v_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} e^{ikx_4}, v_2 = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} e^{ikx_4}, \quad (2)$$

где $\psi_i, i = \overline{1,4}$ - обычные комплексные компоненты спинора Дирака [1].

Операторы D_3 и \overline{D}_3 вида

$$D_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2\frac{\partial}{\partial z_2} \\ -2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \overline{D}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & -2\frac{\partial}{\partial z_2} \\ 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (3)$$

определены пространственными координатами $x_1, x_2, x_3, z_2 = x_1 + ix_2, \bar{z}_2 = x_1 - ix_2$.

Если ввести матричные 4-мерные операторы

$$D_1 = \begin{pmatrix} -e^{-2ikx_4} \frac{dE}{dx_4} & 0 \\ 0 & e^{2ikx_4} \frac{dE}{dx_4} \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \overline{D}_3 \\ D_3 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

то система (1) примет вид

$$(D_1 + D_2)V = 0, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Запись системы (1) в форме (5) необходимый этап в построении ОС. Для дальнейших построений введем так же присоединенную систему

$$(\tilde{D}_1 + D_2)\tilde{V} = 0, \quad (6)$$

где оператор \tilde{D}_1 получен перестановкой элементов на главной диагонали.

Необходимым условием возможности построения ОС является перестановочность операторов D_1 и D_2 . Однако в данном случае эти операторы не коммутируют. Но существует возможность, согласно [2,3], провести операцию присоединения и увеличить размерность пространства, взяв их в виде

$$D_{1c} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ \tilde{D}_1 & 0 \end{pmatrix}, D_{2c} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{D}_3 \\ D_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В этом случае спинор имеет 4 компоненты $v_i, i = \overline{1,4}$, (операция удвоения размерности спинора). Операторы D_{1c}, D_{2c} коммутируют и следовательно могут быть использованы для построения ОС. В работе показано, что D_{1c}, D_{2c} правые обратные I_{1c}, I_{2c}

$$D_{1c}I_{1c} = 1, D_{2c}I_{2c} = 1. \quad (8)$$

Последнее условие для построения ОС это наличие не пустого пересечения ядер операторов D_{1c}, D_{2c} . Элементы этого множества, которые называются обобщенными константами C имеют вид

$$\begin{aligned} D_{1c}C &= D_{2c}C = 0, \\ \overline{D}_3C_1 &= D_3C_2 = \overline{D}_3C_3 = D_3C_4 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Бинарные ОС, порожденные операторами D_{1c}, D_{2c} определимы как спиноры

$$X_1^{(\rho)}X_2^{(q)}C = \rho!q!I_{1c}^\rho I_{2c}^q C \quad (10)$$

с очевидными свойствами

$$\begin{aligned} D_{1c}X_1^{(\rho)}X_2^{(q)}C &= \rho X_1^{(\rho-1)}X_2^{(q)}C, \\ D_{2c}X_1^{(\rho)}X_2^{(q)}C &= q X_1^{(\rho)}X_2^{(q-1)}C. \end{aligned} \quad (11)$$

Обратим внимание, что в процессе построения ОС схема их конструирования повторяется дважды. Следующий этап, который напоминает построение обобщенных констант состоит во введении симметризованных бинарных степеней

$$\overline{Z}_s^m Z_s^n C = (X_1 + X_2)^m (X_1 - X_2)^n C. \quad (12)$$

Так же обратим внимание, что запись (12) чисто символическая и для нахождения $\overline{Z}_s^m Z_s^n$ следует представить (12) в виде

$$Z_s^m \overline{Z}_s^n C = \sum_{i=0}^{m+n} a_i^{(m,n)} X_1^{m+n-i} X_2^{(i)} C. \quad (13)$$

Числовые коэффициенты $a_i^{(m,n)}$ можно найти по простым формулам [2]. Базисная последовательность решений системы Дирака может быть получена по символической форме

$$V^{(n)} = \overline{Z}^{(n)} C_n. \quad (14)$$

Решения уравнения Дирака, представленные как линейные комбинации (14), будут рассмотрены в следующих сообщениях.

Литература

1. Соколов А.А., Иваненко Д.Д. квантовая теория поля /Соколов А.А. — М.—Л. : ГИТТЛ, 1952. — 780 с.
2. Гладышев Ю.А. Формализм-Бельтрами-Берса / Ю.А. Гладышев — Калуга : Изд-во КГПУ имю К.Э. Циолковского, 1997. — 250 с.
3. Гладышев Ю.А. О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса / Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева // Вестник Калужского университета. — 2020. — №2(47). — С. 77–80.

ОБ УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Е. Гликлих, Д.С. Сергеева (Воронеж, ВГУ)
yeg@math.vsu.ru, daha192000@mail.ru

Предварительные сведения о производных в среднем (в частности, о текущей скорости D_S и квадратичной производной в среднем D_2) имеются в [1,2]. Там также описана естественная модификация понятия непрерывности случайного потока на бесконечности, введенного Л. Шварцем.

Пусть матричный пучок $\lambda L + M$ в \mathbb{R}^n , где L вырождена, а M не вырождена, регулярен и удовлетворяет условию ранг-степень (см. [3]). Тогда после применения преобразования Чистякова (см. [3]) эти матрицы преобразуются к виду $L = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $M = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}$, где I_d и I_{n-d} — единичные матрицы, действующие в подпространствах \mathbb{R}^d и \mathbb{R}^{n-d} , соответственно. Так как M не вырождена, J также не вырождена. Рассмотрим матрицу $\bar{\Theta}$ в \mathbb{R}^n вида $\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где Θ — симметрическая положительно определенная матрица, действующая в \mathbb{R}^d . Рассмотрим уравнение вида

$$\begin{cases} LD_S \xi(t) = M \xi(t) + f(t, \xi(t)) \\ D_2 \xi(t) = \bar{\Theta} \end{cases}, \quad (1)$$

где $f(t, x) = (f_1(t, x_1, x_2), f_2(t, x_1, x_2))$ — гладкое отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Уравнение (1) распадается на два:

$$\begin{cases} LD_S \xi_1(t) = J \xi_1(t) + f_1(t, \xi_1(t), \xi_2(t)) \\ D_2 \xi(t) = \Theta \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} LD_S \xi_2(t) = \xi_2(t) + f_2(t, \xi_1(t), \xi_2(t)) \\ D_2 \xi_2(t) = 0. \end{cases}$$

Так как $D_2 \xi_2(t) = 0$, ξ_2 является детерминированным (не случайным) процессом и при выполнении условия, введенного в [4], оказывается постоянным вектором из \mathbb{R}^{n-d} . При выполнении тех же условий из [4], существует гладкое отображение $\bar{f}(t) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, такое, что $f_1(t, x_1, x_2) = \bar{f}(t, x_1)$. Таким образом, (1) сводится к

$$\begin{cases} LD_S \xi_1(t) = J \xi_1(t) + \bar{f}(t, \xi_1(t)) \\ D_2 \xi(t) = \Theta. \end{cases} \quad (2)$$

В [5] показано, что при введенных выше условиях уравнение (2) имеет решение, если начальное условие является случайным элементом с гладкой и нигде не равной нулю плотностью распределения.

Теорема. *Для того, чтобы и прямой, и обратный потоки, порожденные уравнением (1), были одновременно полны и непрерывны на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ существовали положительные гладкие собственные функции $u(t, x)$ и $\bar{u}(t, x)$ такие, что при всех (t, x) выполняются неравенства $(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A})u < C$ и $(-\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathcal{A}})\bar{u} < \bar{C}$ для некоторых положительных констант C и \bar{C} , где \mathcal{A} и $\bar{\mathcal{A}}$ — генераторы прямого и обратного потоков, порожденных уравнением (2).*

Литература

1. Gliklikh Yu.E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics / Yu.E. Gliklikh. — London : Springer-Verlag, 2011. — XXIII+436 p.
2. Гликлик Ю.Е. Производные в среднем случайных процессов и их применения / Ю.Е. Гликлик. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. — 194 с.
3. Чистяков В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 317 с.
4. Филипковская М.С. Об условиях глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М.С. Филипковская // Материалы международной конференции «Воронежская

зимняя математическая школа С.Г. Крейна». — Воронеж : ВГУ. — 2014. — С. 362–372.

5. Азарина С.В. О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями / С.В. Азарина, Ю.Е. Гликлик // Математические заметки. — 2016. — Т. 100, № 1. — С. 3–12.

СКОРОСТЬ РАВНОМЕРНОЙ РАВНОСХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Х.Р. Годжаева (Баку, Азербайджанский Государственный
Педагогический Университет,
mehdizade.xedice@gmail.com)

В работе рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор четного порядка на интервале $G = (0, 1)$. Изучаются вопросы равномерной равносходимости на компакте ортогонального разложения по собственным функциям данного оператора с тригонометрическим рядом. Для функции из классов $W_p^1(G)$, $p \geq 1$, установлена скорость равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$.

Рассмотрим на интервале $g = (0, 1)$ формальный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(2m)} + P_2(x)u^{(2m-2)} + \dots + P_{2m}(x)u$$

с вещественными коэффициентами $P_l(x) \in L_1(G)$, $l = \overline{2, 2m}$, $m \geq 1$.

Обозначим через $D_{2m}(G)$ класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своим производными до $(2m - 1)$ -го порядка включительно на отрезке $\overline{G} = [0, 1]$.

Под собственной функцией оператора L отвечающей собственному значению λ будем понимать любую тождественно не равную нулю функцию $y(x) \in D_{2m}(G)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly + \lambda y = 0$ (см. [1], [2]).

Пусть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная в $L_2(G)$ система, состоящая из собственных функций оператора L а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующая система собственных значений, причем $(-1)^{m+1} \lambda_k \geq 0$.

Через $W_p^1(G)$, $p \geq 1$, обозначим класс абсолютно непрерывных на \overline{G} функций $f(x)$ для которых $f'(x) \in L_p(G)$.

Обозначая $\mu_k = ((-1)^{m+1} \lambda_k)^{\frac{1}{2m}}$, введем частичную сумму ортогонального разложения функции $f(x) \in W_p^1(G), p \geq 1$, по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$:

$$\sigma_\nu(x, f) = \sum_{\mu_k \leq \nu} f_k u_k(x), \quad \nu > 0$$

где $f_k = (f, u_k) = \int_0^1 f(x) \overline{u_k(x)} dx$.

Пусть $\Delta_\nu(x, f) = \sigma_\nu(x, f) - S_\nu(x, f)$, где $S_\nu(x, f), \nu > 0$ частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ т.е.

$$S_\nu(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0 < 2\pi k \leq \nu} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx),$$

$$a_k = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если $\max_{x \in K} |\Delta_\nu(x, f)| \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow +\infty$, то будем говорить, что разложения функции $f(x)$ в ортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и в тригонометрический ряд Фурье равномерно сходятся на компакте $K \subset G$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $f(x) \in W_p^1(G), p \geq 1$, и система $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условию

$$\left| f(x) u_k^{(2m-1)}(x) \right|_0^1 \leq C_1(f) \mu_k^\alpha \|u_k\|_\infty, \quad 0 \leq \alpha < 2m - 1, \quad \mu_k \geq 1. \quad (1)$$

Тогда разложения функции $f(x)$ в ортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и в тригонометрический ряд Фурье равномерно сходятся на любом компакте $K \subset G$ и справедлива оценка

$$\max_{x \in K} |\Delta_\nu(x, f)| = O(\nu^{\beta-1}), \quad \nu \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

где $\beta = 0$ если система $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ равномерно ограничена; $\beta = 1/2$ если система $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ не является равномерно ограниченной.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in W_p^1(G)$ и выполняются условия (1) и

$$\sum_{n=2}^\infty n^{-1} \omega_1(f', n^{-1}) < \infty.$$

Тогда разложения функции в ортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и в тригонометрический ряд Фурье равномерно сходятся на любом компакте $K \subset G$ и справедлива оценка (2).

Литература

1. Ильин В.А., Йо И. Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов Штурма-Лиувилля для абсолютно непрерывной функции. // Дифференциальные уравнения, 1979. — Т. 15, — № 7, С. 1175–1193.

2. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I. // Дифференц.уравнения. 1980. — Т. 16, — № 5, С. 771–794.

О КОГРАДИЕНТНОСТИ И КОНТРГРАДИЕНТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹

В.А. Горелов (Москва, НИУ "МЭИ")

gorelov.va@mail.ru

В теории трансцендентных чисел одним из основных методов остаётся метод Зигеля-Шидловского (см., например, [1]), с помощью которого можно доказывать трансцендентность и алгебраическую независимость значений целых функций некоторого класса (т.н. Е-функций). Для применения этого метода необходимо, чтобы рассматриваемые функции составляли решение системы дифференциальных уравнений и были алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Вопрос об алгебраической независимости решений линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений имеет большое значение также в дифференциальной алгебре, аналитической теории дифференциальных уравнений, теории специальных функций и математическом анализе в широком смысле. Как показано в работах Е. Колчина [2], а также Ф. Бейкерса, В. Браунвела и Г. Хекмана [3], этот вопрос во многом сводится к проверке условия коградиентности и контрградиентности.

Две системы линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ называются коградиентными (соответственно контрградиентными), если для произвольных фундаментальных матриц Φ_1, Φ_2 этих систем выполняется одно из равенств

$$\Phi_1 = gB\Phi_2C, \quad \Phi_1(\Phi_2C)^T = gB, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № FSWS - 2020-0022).

© Горелов В.А., 2021

где $C \in GL(\mathbb{C})$, $B \in GL(\mathbb{C}(z))$, $g = g(z)$ — функция с условием $g'/g \in \mathbb{C}(z)$. Аналогично понятия коградиентности и контрградиентности определяются для линейных однородных дифференциальных уравнений произвольного порядка.

В некоторых статьях автора, посвящённых обобщённым гипергеометрическим дифференциальным уравнениям, фактически использовалось другое, более узкое определение коградиентности и контрградиентности. Согласно этому определению, в равенствах (1)

$$g(z) = z^r e^{\gamma z} \quad \text{или} \quad g(z) = z^r \exp(\gamma z^p + \gamma_1 z^{p_1}), \quad (2)$$

где $r, \gamma, \gamma_1 \in \mathbb{C}$, $p, p_1 \in \mathbb{N}$.

В частности, более узкое определение использовалось в работах [4, лемма 14], [5], [6], [7], где автором доказаны теоремы о коградиентности и контрградиентности, многие из которых имели необходимые и достаточные условия.

В настоящее время автором установлена эквивалентность этих определений.

Литература

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа / А.Б. Шидловский. — М. : Наука, 1987. — 448 с.
2. Kolchin E.R. Algebraic groups and algebraic dependence / E.R. Kolchin // Amer. J. Math. — 1968. — V. 90, № 4. — P. 1151–1164.
3. Beukers F. Siegel normality / F. Beukers, W.D. Brownawell, G. Heckman // Annals of Math. — 1988. — V. 127. — P. 279–308.
4. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений обобщённых гипергеометрических функций / В.А. Горелов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, вып. 1. — С. 94–108.
5. Горелов В.А. On contiguity relations for generalized hypergeometric functions / В.А. Горелов // Problemy Analiza - Issues of Analysis. — 2018. — V. 7(25), № 2. — P. 39–46.
6. Горелов В.А. Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами уравнений Бесселя и Куммера / В.А. Горелов // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 258–262.
7. Горелов В.А. Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами обобщённых гипергеометрических уравнений / В.А. Горелов // Чебышевский сборник. — 2020. — Т. 21, вып. 1. — С. 135–144.

О МОДЕЛИ ЗАСОЛЕНИЯ ГРУНТА¹

С.А. Гриценко (Москва, НИУ МЭИ)
sv.a.gritsenko@gmail.com

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $S = \partial\Omega$ представляет собой объединение порового пространства Ω_f , твердого скелета Ω_s и их общей границы Γ : $\Gamma = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s$, $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \cup \Gamma$. Области Ω_f и Ω_s являются связными непересекающимися множествами: $\Omega_f \cap \Omega_s = \emptyset$.

В области Ω_f для скорости жидкости $\mathbf{v}(x, t)$, давления $p(x, t)$, концентрации соли $c(x, t)$ рассматривается следующая система уравнений:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{v} + (\alpha_\nu (\operatorname{div} \mathbf{v}) - p) \mathbb{I} \right) + \rho \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega_f, t \in (0, T); \quad (2)$$

$$\mathbf{v}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega_f, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = 0, p(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega_f, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \alpha_D \Delta c, \quad x \in \Omega_f, t \in (0, T), \quad (5')$$

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega_f, \quad (6')$$

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad x \in \Omega_f, \quad (7)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_f$, $\mu(c)$ — безразмерная вязкость, \mathbb{I} - единичная матрица, α_D , α_p , α_ν , α_τ , α_μ — безразмерные положительные константы.

Для выполнения в дальнейшем усреднения скорость и давление продолжают в твердую часть нулем, а для концентрации используется вспомогательное предположение о наличии малой диффузии в твердом скелете, характеризующейся малым параметром $\lambda > 0$. Обычно некоторое количество солей содержится в грунте в твердой

¹ при поддержке госзадания МИНОБРНАУКИ РФ (проект № FSWF-2020-0022).

© Гриценко С.А., 2021

фазе, они могут быть сорбированными на частицах грунта и десорбироваться с их поверхности. Вместо уравнения (5') рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \operatorname{div} ((\alpha_D \chi + \lambda(1 - \chi)) \nabla c), \quad x \in \Omega, t \in (0, T), \quad (5)$$

в котором $\chi(x)$ есть характеристическая функция области Ω_f , а вместо краевого условия (6') — краевое условие

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in S. \quad (6)$$

Теорема 1. *Задача (1) — (7) имеет обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\begin{aligned} \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} (\alpha_{\tau} |\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2) dx + \alpha_{\nu} \int_0^T \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 dx dt + \\ + \alpha_{\mu} \nu_0 \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx dt \leq M_0(\nu_0, T) F^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$0 \leq c(x, t) \leq 1, \quad (2.4)$$

$$\max_{0 < t < T} \int_{\Omega} c^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} (\alpha_D \chi + \lambda(1 - \chi)) |\nabla c|^2 dx dt \leq M(\nu_0, T) F^2. \quad (2.5)$$

Литература

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. — М. : Наука, 1977. — 664 с.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская. — М. : Наука, 1967. — 736 с.

**КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ
ФЛАТТЕРА ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ.**

А.В. Давыдов (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова)
esse101@yandex.ru

В данном докладе мы рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + M_1 \frac{d}{dt}u(t) + M_2 \left(A^2 u(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) A^2 u(\tau) d\tau \right) + M_3 T u(t) = f(t), \quad (1)$$

где M_1 , M_2 , M_3 — некоторые константы, $\Gamma(t)$ — интегрируемая функция, а $u(t)$ и $f(t)$ — это векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве H .

Рассмотрим конкретный вид $\Gamma(t)$:

$$\Gamma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\gamma_k t}, \quad c_k, \gamma_k > 0, \quad \gamma_{k+1} > \gamma_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < \infty.$$

Это требование необходимо, чтобы решения уравнения были устойчивы.

Добавив к уравнению (1) начальные условия

$$u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1, \quad (2)$$

мы получим задачу Коши.

Оператор A^2 в нашем случае является самосопряженным положительным оператором, а оператор A^{-2} , обратный к нему, является компактным. Оператор T представим в виде $T = U A^{\frac{1}{2}}$.

Применение преобразования Лапласа к уравнению (1) приводит нас к оператор-функции

$$L(z) = z^2 I + M_1 z + M_2 (1 - K(z)) A^2 + M_3 T,$$

которая является символом исходного уравнения. Здесь $K(z)$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$.

Определение 1. Вектор-функцию $u(t)$ назовем слабым решением задачи (1), (2), если она принадлежит пространству Соболева с экспоненциальным весом $e^{-2\gamma t} - W_{2,\gamma}^1([0, +\infty), A)$, для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$, удовлетворяет соотношению $u(0) = \varphi_0$, и для любой векторной функции $v(t) \in W_{2,\gamma}^1([0, +\infty), A)$ выполнено

$$\begin{aligned} \Phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} & 2\gamma(u'(t), v(t)) - (u'(t), v'(t)) - (\varphi_1, v(0))_H + M_1(u'(t), v(t)) + \\ & + M_2 \left((Au(t), Av(t)) - \left(\int_0^t \Gamma(t-\tau) Au(\tau) d\tau, Av(t) \right) \right) + \\ & + M_3(Tu(t), v(t)) - (f(t), v(t)) = 0. \end{aligned}$$

Здесь все скалярные произведения (кроме третьего слагаемого) берутся в пространстве $L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$ с экспоненциальным весом $e^{-2\gamma t}$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. *Существует такое $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, что $f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma_2}([0, +\infty), H)$.*
2. *$\varphi_0 \in D(A^2)$ и $\varphi_1 \in D(A)$.*

Тогда существует такое $\gamma_3 \in \mathbb{R}$, что для любого $\gamma \geq \max(\gamma_2, \gamma_3)$ задача (1), (2) однозначно разрешима в пространстве $W_{2,\gamma}^1([0, +\infty), A)$ (то есть существует единственное слабое решение задачи (1), (2)) и для её решения справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^1([0, +\infty), A)} \leq d(\|f\|_{L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H),$$

где d не зависит от начальных данных.

Теорема 2. *Предположим $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$. Тогда существует положительная константа y_0 , такая что спектр $\sigma(L)$ операторной функции $L(z)$, лежащий в верхней полуплоскости $\{z : \text{Im } z > y_0\}$, может быть представлен в виде совокупности точек $\{\tilde{\mu}_n^+, n > n_0\}$, так что*

$$\tilde{\mu}_n^+ = i\sqrt{M_2 a_n} - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k}{2} - \frac{M_1}{2} + O(a_n^{-1/2}).$$

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ¹

Б.М. Даринский, А.В. Лобода, Д.С. Сайко (Воронеж,
ВГУ, ВГТУ, ВГУИТ)

darinski@mail.ru

В ряде математических и прикладных задач представляют интерес вопросы классификации с различных точек зрения (см. [1], [2]) полиномиальных решений уравнения Лапласа. Ниже обсуждаются некоторые топологические характеристики гармонических многочленов от трех вещественных переменных, связанные с количеством компонент связности, на которые разбивается линиями нулевого уровня таких многочленов единичная сфера S^2 .

Топологический подход к исследованию различных систем оказался плодотворным в классификации их возможных структур. Так, в прикладных работах [2], [3] построена полная классификация кристаллов по их акустическим свойствам.

Пример 1. Разбиения сферы S^2 , соответственно, на 4 и 3 части, порождаемые гармоническими полиномами $P_2^{(1)}(x) = x_1x_2$ и $P_2^{(2)}(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$ показаны на Рис.1.

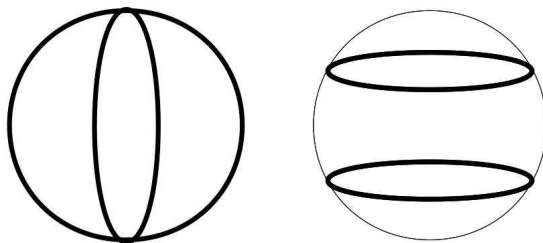


Рис. 1. Разбиения сферы многочленами второй степени

Теорема. *Для произвольного ненулевого гармонического полинома второй степени разбиение сферы S^2 на области знакопостоянства этого полинома имеет в точности один из двух возможных топологических типов, представленных в примере 1.*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

© Даринский Б.М., Лобода А.В., Сайко Д.С., 2021

Пример 2. Разбиения сферы S^2 линиями нулевого уровня гармонических полиномов третьей степени на 2, 4, 6, 8 областей знакопостоянства показаны на Рис.2.

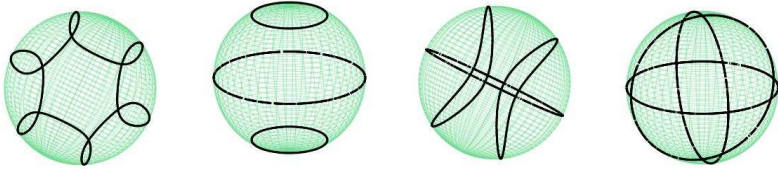


Рис. 2. Разбиения сферы многочленами третьей степени

В квантово-химических исследованиях рассматриваемые гармонические полиномы (как вещественные, так и комплекснозначные) формируют волновую функцию электрона. Квадрат модуля этой функции является плотностью вероятности ρ нахождения частицы в некоторой точке на единичной сфере. В случае комплексных гармонических полиномов плотность вероятности принимает нулевые значения в некоторых точках на сфере, которые определяются пересечениями линий нулевого уровня вещественной и мнимой компонент полинома. Эти точки являются критическими и позволяют с использованием теоремы Эйлера составить список возможных вариантов совокупности максимумов и седловых точек плотности вероятности на единичной сфере.

Пример 3. Рассмотрим комплекснозначный гармонический полином следующего вида

$$P_2^{(3)} = a(r^2 - 3x_1^2) + ib(r^2 - 3x_2^2)$$

Его вещественная часть рассекает сферу двумя окружностями, перпендикулярными оси x_1 , а мнимая компонента — аналогичными окружностями, перпендикулярными оси x_2 . В результате сфера пересекается на десять областей, ограниченных дугами окружностей. Пересечение этих линий происходит в восьми точках. В этих точках квадрат модуля $P_2^{(3)}$ принимает минимальные нулевые значения. Для выполнения формулы Эйлера об особых точках на сфере необходимо наличие десяти максимумов и шестнадцати седловых точек. На картине пересечений линий нулевого уровня точкам максимумов соответствуют площадки а седловым точкам — отрезки этих линий.

На Рис.3 представлена такая картина в этом случае (левая фигура). Здесь дуги на сфере отвечают седловым точкам функции ρ , точ-

ки пересечения – минимальным значениям этой функции, ограниченные площадки – ее максимумам. Другой вариант расположения точек нулевых значений плотности вероятности представлен правой фигурой. Максимальное число точек данного типа равно восьми.

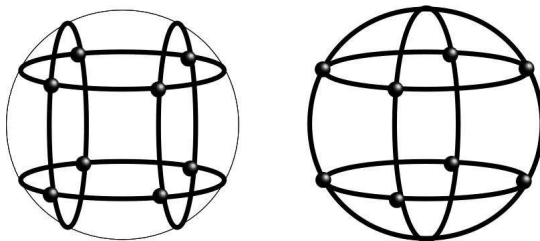


Рис. 3. Разбиения сферы комплексными многочленами

Литература

1. Лобода, А.В. Об унитарно-инвариантных гармонических многочленах четвертой степени / А.В. Лобода, Б.М. Даринский, Д.В. Козориз // Материалы Междунар. научн. конф. «ВЗМШ-2021». – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. – С. 193 - 194.

2. Борисович, Ю.Г. Применение топологических методов для оценки числа продольных упругих волн в кристаллах / Ю.Г. Борисович, Б.М. Даринский, О.В. Кунаковская // Теор. и матем. Физика. – 1993. Т. 94 (1). – С. 146–152.

3. Воротников, Д.А. Топологический подход к исследованию акустических осей в кристаллах / Д.А. Воротников, Б.М. Даринский, В.Г. Звягин // Кристаллография. – 2006. – Т. 51 (1). – С. 112–117.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ТОЧЕЧНОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ¹

А.Л. Джабраилов (Грозный, ЧГУ)
ahmed0065@mail.ru

Рассматриваются уравнения вида

$$y'(x) = f(x, y(x))y(x) + \int_a^b K(x, s, y(s))ds. \quad (1)$$

Предполагается, что функции $f(x, y)$, $K(x, s, y)$ по x на левом конце интервала (a, b) имеют сингулярность неинтегрируемого характера (подробнее, см. [1-3]). В области $D : \{x \in [a, b], s \in (a, b), |y| \leq d\}$, $d > 0$ — данное число, функции $f(x, y)$, $K(x, s, y)$ непрерывны и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

Методами работы [3], используя принцип Шаудера, доказываются существование решений $y(x)$ соответствующих интегральных уравнений. Непосредственным вычислением производных показано, что эти же решения являются также и решениями интегро-дифференциального уравнения (1), удовлетворяющими начальному условию $y(a) = 0$.

Литература

1. Исраилов С.В. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / С.В. Исраилов, С.С. Юшаев. — Нальчик. : Эльфа, 2004. — 449 с.
2. Исраилов С.В. Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений / С.В. Исраилов. — Махачкала. : АЛЕФ, 2014. — 440 с.
3. Исраилов С.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и некоторые вопросы математического моделирования / С.В. Исраилов, С.С. Юшаев, А.М. Гачаев. — Махачкала. : АЛЕФ, 2014. — 207 с.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи».

**О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ
СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА В КОНУСЕ¹**
М.Т. Дженалиев, М.Г. Ергалиев (Алматы, ИМММ)
ergaliev@math.kz

В работах [1]–[2] были исследованы вопросы разрешимости граничных задач для уравнения Бюргерса (для одномерного аналога системы уравнений Навье-Стокса) в вырождающихся областях.

В данной работе в соболевских классах мы изучаем вопросы разрешимости двумерной системы уравнений Навье-Стокса с однородными граничными условиями Дирихле в нецилиндрической вырождающейся области, представленной конусом с вершиной в начале координат.

Пусть $x = \{x_1, x_2\}$, и $Q_{xt} = \{x, t : |x| < t, 0 < t < T < \infty\}$ — перевернутый конус с вершиной в начале координат, Ω_t — сечение конуса при каждом фиксированном $t \in (0, T]$, Σ_{xt} — боковая поверхность конуса. Отметим, что в точке $t = 0$ область Q_{xt} вырождается в точку.

В области Q_{xt} рассматривается граничная задача для системы уравнений Навье-Стокса относительно двумерной вектор-функции скорости движения жидкости $u(x, t) = \{u_1(x, t), u_2(x, t)\}$ и функции давления жидкости $p(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - \nu \Delta u = f - \nabla p, \quad \{x, t\} \in Q_{xt}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \{x, t\} \in Q_{xt}, \quad (2)$$

$$u = 0, \quad \{x, t\} \in \Sigma_{xt}. \quad (3)$$

Пусть для почти всех $t \in (0, T]$, $\mathcal{V}_t = \{\varphi \mid \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega_t))^2, \operatorname{div} \varphi = 0\}$, $H_t =$ замыкание \mathcal{V}_t в $(L_2(\Omega_t))^2$, $V_t =$ замыкание \mathcal{V}_t в $(W_2^1(\Omega_t))^2$.

Для граничной задачи (1)–(3) установлена следующая теорема.

Теорема. Пусть $f \in L_\infty(0, T; H_t) \cap L_2(0, T; H_t)$, $\partial_t f \in L_2(0, T; V_t')$. Тогда в конусе граничная задача для системы уравнений Навье-Стокса (1)–(3) допускает единственное решение $\{u(x, t), p(x, t)\}$ в пространстве

$$u \in L_2(0, T; V_t) \cap H^1(0, T; V_t') \cap (W_2^{2,1}(Q_{xt}))^2, \quad p \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega_t)/X_t),$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP08855372, 2020–2022).

© Дженалиев М.Т., Ергалиев М.Г., 2021

где $W_2^1(\Omega_t)/X_t$ и $\|\psi(x)\|_{W_2^1(\Omega_t)/X_t} \equiv \inf_{k \in X_t} \|\psi(x) + k\|_{W_2^1(\Omega_t)}$ являются соответственно фактор-пространством и фактор-нормой по подпространству X_t , состоящим из всевозможных постоянных $k = \text{const}$ определяемых на множестве Ω_t .

Отметим, что доказательство теоремы основано на априорных оценках, при установлении которых использованы результаты работ [3]–[6].

Литература

1. Benia Y. Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain / Benia Y., Sadallah B.-K. // Electron. J. Diff. Equ. — 2018. — V. 2018, № 20. — P. 1–13.
2. Jenaliyev M.T. On the solvability of nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in the angular domain and related integral equations/ Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — Berlin : Springer, 2017. — P. 123–141.
3. Будаков Б. М. Сборник задач и упражнений по уравнениям математической физики/ Будаков Б. М., Тихонов А. Н., Самарский А. А. — М. : ФизМатЛит, 1972.
4. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного/ Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. — М. : ФизМатЛит, 1965.
5. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires/ Lions J.-L. — Paris : Dunod, 1969.
6. Temam R. Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis/ Temam R. — Amsterdam : North Holland Publishing Company, 1979.

ОБ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА В КОНУСЕ¹

М.Т. Дженалиев, К.Б. Иманбердиев,

А.С. Касымбекова (Алматы, ИМММ, КазНУ имени
аль-Фараби)

*mvwasharkhan@gmail.com, kanzharbek75ikb@gmail.com,
kasar1337@gmail.com*

Одномерная задача Дирихле в вырождающейся области была исследована в [1]–[4].

В данной работе в соболевских классах изучаются вопросы однозначной разрешимости граничной задачи Дирихле для двумерного уравнения Бюргерса в области, представленной конусом.

Постановка задачи и основной результат. Пусть $Q_{xt} = \{x, t : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < kt, 0 < t < T < \infty, 0 < k < \infty\}$ есть область, которая вырождается при $t = 0$, и $\Omega_t = \{|x| < kt\}$ является сечением области Q_{xt} для фиксированного значения переменной $t \in (0, T)$. $\Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (0, T)$, где $\partial\Omega_t$ есть граница круга Ω_t .

Мы исследуем разрешимость граничной задачи для двумерного уравнения Бюргерса:

$$\partial_t u + u[\nabla u \cdot \vec{e}] - \nu \Delta u = f, \quad \{x, t\} \in Q_{xt}, \quad (1)$$

$$u = 0, \quad \{x, t\} \in \Sigma_{xt}, \quad (2)$$

где $\vec{e} = \{1, 1\}$ — двумерный вектор с единичными компонентами, $[\nabla u \cdot \vec{e}] = \partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u$.

$$f \in L_2(Q_{xt}), \quad \nu = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Теорема (Основной результат.) Пусть $f \in L_2(Q_{xt})$ (3). Тогда граничная задача (1)–(2) имеет единственное решение

$$u \in H_0^{2,1}(Q_{xt}) \equiv \{L_2(0, T; H^2(\Omega_t) \cap H_0^1(\Omega_t)) \cap H^1(0, T; L_2(\Omega_t))\}.$$

Отметим, что доказательство теоремы основано на априорных оценках, при установлении которых использованы результаты работ [5]–[7].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP08855372, 2020–2022).

© Дженалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Касымбекова А.С., 2021

Литература

1. Burgers J.M. The nonlinear diffusion equation. Asymptotic solutions and statistical problems / J.M. Burgers. — Boston USA. : D.Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1974.
2. Benia Y. Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain / Benia Y., Sadallah B.-K. // Electron. J. Diff. Equ. — 2018. — V. 2018, № 20. — P. 1–13.
3. Jenaliyev M.T. On a boundary value problem for the heat equation and a singular integral equation associated with it / Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Iskakov S.A. // Appl. Math. Comput. — 2021. — V. 399, № 126009.
4. Jenaliyev M.T. On the solvability of nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in the angular domain and related integral equations / Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — Berlin : Springer, 2017. — P. 123–141.
5. Будак Б.М. Сборник задач и упражнений по уравнениям математической физики / Будак Б.М., Тихонов А.Н., Самарский А.А. — М. : ФизМатЛит, 1972.
6. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. — М. : ФизМатЛит, 1965.
7. Adams R.A. Sobolev spaces/ Adams R.A., Fournier J.J.F. — Amsterdam : Elsevier, 2003.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В $L_p(\mathbb{R})$

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)
art-dodonov@mail.ru

Получено (см. также [1], [2]) необходимое условие сходимости в $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, рядов наимпростейших дробей вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_k}, \quad z_k = x_k + iy_k, \quad y_k \neq 0. \quad (1)$$

Теорема 1. Если при $1 < p < \infty$ и $\varepsilon > 0$ ряд наимпростейших дробей (1) сходится к некоторой функции $\rho_\infty \in L_p$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{(1+\varepsilon)/q}(|z_k| + 1)} < \frac{A}{\varepsilon^{1/q}},$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $A = A(p, \|\rho_\infty\|_{L_p})$.

При $2 \leq p < 3$ существенно усилить теорему 1 уже нельзя. Именно, существует такой ряд вида (1), что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{1/p-\delta}(|z_k| + 1)} = \infty, \quad \delta > 0.$$

Литература

1. Додонов А.Е. О сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / А.Е. Додонов // Пробл. мат. ан. — 2015. — Т. 82. — С. 83–87.

2. Додонов А.Е. О сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / А.Е. Додонов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы XII международной Казанской летней научной школы-конференции. — Казань: Казанское математическое общество, 2015. — С. 178–180.

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)
art-dodonov@mail.ru

Наипростейшей дробью порядка $n \in \mathbb{N}$ называется рациональная функция вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}, \quad z_k \in \mathbb{C}.$$

Первое неравенство разных метрик для наипростейших дробей было получено В.И. Данченко в работе [1]. Оно имеет вид

$$\|\rho_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \beta_p \cdot \|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})}^q, \quad \beta_p := \frac{2p}{\sin^q(\pi/p)}, \quad p > 1, \quad (1)$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тем же методом, что и в [1], но с более тщательными выкладками, неравенство (1) было уточнено:

$$\|\rho_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 2^{1-q} \beta_p \cdot \|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})}^q. \quad (2)$$

Например, при $p = 2$ мажоранта в неравенстве (2) в 2 раза меньше мажоранты в (1).

Отметим, что с помощью оценки (2) методами работы [2] (см. теорему 2 и замечание к ней) получается более общее неравенство разных метрик:

$$\|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})}^q \leq A(p, r) \|\rho_n\|_{L_r(\mathbb{R})}^s, \quad 1 < r < p \leq \infty, \quad r^{-1} + s^{-1} = 1.$$

Литература

1. Данченко В.И. Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // В.И. Данченко // Матем. сб. — 1994. — Т. 185, №8. — С. 63–80.
2. Данченко В.И. Оценки L_p -норм наипростейших дробей // В.И. Данченко, А.Е. Додонов // Изв. вузов. Матем. — 2014. — №6. — С. 9–19.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ О ПРОТЕКАНИИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ ОБЛАСТЬ

А.А. Домнич, Е.С. Барановский, М.А. Артемов (Воронеж,
ВГУ, ВУНЦ ВВС «ВВА»)
andomnich@inbox.ru.ru

В рамках доклада будет обсуждаться подход к обоснованию разрешимости задач о протекании неравномерно нагретой вязкой жидкости через заданную пространственную область.

Будет рассмотрена задача о течении жидкости через область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) с локально-липшицевой границей $\partial\Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta) \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{T} = \mu(\theta) \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \mathbf{I} \text{ в } \Omega, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta - \operatorname{div} (k(\theta) \nabla \theta) = \omega(\mathbf{x}, \theta) \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{Tn})_\tau = -\varkappa(\theta) \mathbf{u}_\tau \text{ на } \partial\Omega \setminus S, \\ \theta = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus S, \\ \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{u}|^2/2 + p = h \text{ на } S, \\ k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = -\psi \text{ на } S, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ — скорость течения в точке $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$; $\theta = \theta(\mathbf{x})$ — отклонение температуры от среднего значения; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta)$ — плотность внешних сил; $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ — тензор напряжений Коши; $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформации, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2$; \mathbf{I} — единичный тензор; $p = p(\mathbf{x})$ — давление; $\mu(\theta) > 0$ — коэффициент вязкости; $k(\theta) > 0$ — коэффициент теплопроводности; $\chi(\theta) > 0$ — коэффициент проскальзывания; $\omega(\mathbf{x}, \theta)$ — мощность тепловых источников; $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$; S — плоский (прямолинейный при $d = 2$) участок границы, где происходит протекание, или объединение нескольких таких участков; $\psi, h: S \rightarrow \mathbb{R}$ — функции, характеризующие тепловой поток и напор на S соответственно. Нижний индекс τ обозначает касательную составляющую вектора, т. е. $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Рассмотрим также задачу о неизотермическом течении жидкости в плоском канале $-h \leq z \leq h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\mu[\theta(z)]u'(z))' = \xi, \quad z \in (-h, h), \\ - (k[\theta(z)]\theta'(z))' = \omega(z), \quad z \in (-h, h), \\ \mu[\theta(h)]u'(h) = -\chi[\theta(h)]u(h), \\ \mu[\theta(-h)]u'(-h) = \chi[\theta(-h)]u(-h), \\ k[\theta(h)]\theta'(h) = -\beta\theta(h), \\ k[\theta(-h)]\theta'(-h) = \beta\theta(-h), \end{array} \right. \quad (2)$$

где u — скорость течения вдоль оси x , θ — отклонение температуры от среднего значения, $-\xi$ — градиент давления ($\xi > 0$), т.е., $\partial p / \partial x = -\xi$, μ — коэффициент вязкости, k — теплопроводность, β — коэффициент теплопередачи на стенках канала, χ — коэффициент скольжения, ω — интенсивность теплового источника, символ $'$ обозначает производную по переменной z .

Подробное изложение полученных результатов приводится в статьях [1], [2].

Литература

1. Барановский Е. С. О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область / Е. С. Барановский, А. А. Домнич // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 3. — С. 317–327.

2. Domnich A. A. A nonlinear model of the non-isothermal slip flow between two parallel plate // A. A. Domnich, E. S. Baranovskii, M. A. Artemov // Journal of Physics: Conference Series — 2020. — V. 1479, Article ID 012005, doi: 10.1088/1742-6596/1479/1/012005.

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ¹

Ю.А. Дубинский (Москва, НИУ «МЭИ».)

julii-dubinskii@mail.ru

Предлагается рассмотреть ряд нелокальных краевых задач теории поля на плоскости, определённых ядрами функционалов следа в пространстве Соболева $W_2^1(G)$.

В случае регулярного функционала следа примером такой задачи является задача

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \\ \int_{\Gamma} (\mathbf{u}, \mathbf{n}) d\gamma &= 0, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|_{\Gamma} &= \alpha \mathbf{n}(\gamma), \gamma \in \Gamma, \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}(\gamma)$ — вектор нормали на границе области Γ . В этой задаче искомыми неизвестными являются вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in W_2^1(G)$ и число α .

В случае сингулярного следа для постановки задачи существенна теорема о следе, являющаяся «плоским» вариантом существования следа линейной комбинации

$$\mathbf{D}_{\Gamma} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - [\text{rot} \mathbf{u}; \mathbf{n}] - (\text{div} \mathbf{u}) \mathbf{n}$$

в случае трехмерных полей.

Для плоских полей $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$ такой сингулярный след имеет линейная комбинация

$$\mathbf{D}_{\Gamma} \mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - (\text{rot}_{\text{pl}} \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} - (\text{div} \mathbf{u}) \mathbf{n},$$

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWT-2020-0022).

© Дубинский Ю.А., 2021

где $\text{rot}_{\text{pl}} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ — плоский оператор Грина, а $\vec{\tau} = (\tau_1; \tau_2)$ — касательный вектор, согласованный с нормалью \mathbf{n} формулами $\tau_1 = -n_2, \tau_2 = n_1$.

Характерными примерами краевых задач, отвечающих ядру оператора \mathbf{D}_Γ , являются следующие задачи:

1.

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \\ \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}, \boldsymbol{\tau} \right) - \text{rot}_{\text{pl}} \mathbf{u} \right] d\gamma &= 0, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|_{\Gamma} &= \alpha \boldsymbol{\tau}(\gamma), \gamma \in \Gamma, \end{aligned}$$

где α — также искомое число.

2.

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \\ \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}, \mathbf{n} \right) - \text{div} \mathbf{u} \right] d\gamma &= 0, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|_{\Gamma} &= \alpha \mathbf{n}(\gamma), \gamma \in \Gamma. \end{aligned}$$

Литература

1. Дубинский Ю.А. О ядрах операторов следа и краевых задачах теории поля / Ю.А. Дубинский // Проблемы математического анализа. — 2020. — Т. 106. — С. 73–89.

2. Дубинский Ю.А. О ядрах функционалов следа и граничных задачах теории поля на плоскости / Ю.А. Дубинский // Труды МИАН им.В.А.Стеклова. — 2021. — Т. 312. — С. 158–169.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИНТЕЗА МЕТИЛ-ТРЕТ-БУТИЛОВОГО ЭФИРА (МТБЭ)¹

Д.А. Дубовцев, Л.В. Еникеева, И.М. Губайдуллин (Уфа,
Институт нефтехимии и катализа РАН, УГНТУ)
dubovcev2@yandex.ru, leniza.enikeeva@yandex.ru

Метил-трет-бутиловый эфир (МТБЭ) — эффективный нетоксичный высокооктановый компонент. Применение МТБЭ позволяет производить высокооктановый бензин на основе широкой гаммы базового бензина. Для производства МТБЭ используется реактор адиабатического типа. Моделирование реактора является актуальной задачей, решение которой позволяет составить адекватную математическую модель процесса, протекающего в реакторе, и как следствие, четко регулировать свойства получаемого продукта.

Для моделирования реактора синтеза МТБЭ было решено использовать диффузионную модель. Эта модель описывает реальную гидродинамическую ситуацию в проточном реакторе как некий промежуточный случай между режимами идеального перемешивания и вытеснения. Модель учитывает неравномерность распределения параметров процесса по объему устройства, а также наличие перемешивания среды в осевом направлении.

В реальном реакторе перемешивание происходит как в продольном, так и в радиальном направлениях, но учет этих типов диффузии сильно усложняет уравнения диффузионной модели. Поэтому предполагается, что распределение концентрации равномерно в радиальном направлении, а диффузия происходит только вдоль оси реактора. Перенос вещества из-за турбулентной и тайлеровской диффузии можно описать уравнениями, аналогичными уравнению для молекулярной диффузии, но со своими собственными коэффициентами. Разделить эти типы диффузии экспериментально невозможно, поэтому их целесообразно объединить в один коэффициент — коэффициент продольной диффузии D_L . Это единственный параметр однопараметрической модели диффузии. Если учесть диффузию в радиальном направлении, введя коэффициент D_R , то реактор будет описываться двухпараметрической диффузионной моделью [1].

Расчеты по этой модели намного сложнее, чем по ячеечной. Аналитическое решение уравнения диффузионной модели возможно

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-60014).

© Дубовцев Д.А., Еникеева Л.В., Губайдуллин И.М., 2021

только для стационарного реактора, в котором протекает реакция первого порядка, а ее скорость линейно зависит от концентрации. Уравнение имеет вид:

$$-w_z \frac{dC_A}{dz} + D_L \frac{d^2 C_A}{dz^2} - kC_A = 0. \quad (1)$$

Далее в этой статье мы рассмотрим модель, которая учитывает изменения температурных и концентрационных профилей [2, 3].

Из-за мягких температурных профилей и незначительных различий (как температуры, так и концентрации) между объемным жидким катализатором и твердым катализатором, для описания поведения реактора была выбрана псевдогомогенная модель. Эта модель, описывающая только осевой профиль радиально усредненных температур и концентраций:

$$\varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial t} + w \frac{\partial C_i}{\partial z} - D_{EZ} \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} = - \sum_{j=1}^N \nu_{ji} \xi v_j(C_i, T), \quad (2)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} + w \sum_{i=1}^{N_I} C_i C_{pi} \frac{\partial T}{\partial z} - \lambda_{EZ} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \quad (3)$$

$$= - \sum_{j=1}^{N_R} -\Delta_R H_j \xi v_j(C_i, T) - \frac{4U_W}{d_R} (T - T_C),$$

где C_i — концентрация компонента i в жидкой фазе, T — температура жидкости, ε — пористость, C_p — средняя теплоемкость слоя, ρ — плотность среды слоя, w — приведенная скорость жидкости, C_{pi} — мольная теплоемкость компонента i , D_{EZ} — коэффициент осевой дисперсии, λ_{EZ} — осевая теплопроводность.

Литература

1. Mertay R., Smoszna A. // International Journal of Chemical Reactor Engineering. V. 10(1).
2. Ahmed S.A., Ahmad S.A. // Indian Journal of Chemical Technology. T. 27(3). P. 210–218.
3. Labovsk J. // Chemical Papers. 2008. –V.62 (1). P. 51–57.

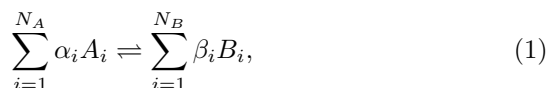
ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ¹

Л.В. Еникеева, И.М. Губайдуллин (Уфа,
Институт нефтехимии и катализа РАН, УГНТУ, НГУ)
leniza.enikeeva@yandex.ru

Эвристические алгоритмы широко применяются для решения задач высокой вычислительной сложности, когда вместо полного перебора вариантов, занимающего существенное время, а иногда и технически невозможного, применяется значительно быстрый, однако недостаточно обоснованный теоретически алгоритм.

Объектом исследования в данной работе являются обратные задачи химической кинетики, сводящиеся к задачам непрерывной глобальной оптимизации. В таких задачах зачастую отсутствует аналитическое решение, к тому же они характеризуются мультимодальностью, нелинейностью, недифференцируемостью, а также высокой размерностью поиска. К таким задачам предлагается использование эвристических методов оптимизации, таких как генетический алгоритм, алгоритм гравитационного и гармонического поиска, метод роя частиц и электромагнитный поиск.

В работе проводится моделирование сложных каталитических процессов: процесс пред-риформинга пропана [1], каталитическая изомеризация пентан-гексановой фракции, синтез метил-трет-бутилового эфира и сернокислородное алкилирование изобутана олефинами. В общем случае химическая реакция представляет собой совокупность стадий химических превращений. Отдельную стадию реакции можно представить в виде уравнения (1):



где A_i — исходные реагенты, B_i — продукты реакции, величины α_i и β_i являются стехиометрическими коэффициентами исходных веществ A_i и продуктов реакции B_i соответственно; N_A и N_B — число исходных веществ и продуктов реакции соответственно. Согласно закону действующих масс скорость простой реакции при постоянной температуре среды в любой момент времени пропорциональна

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-60014).

© Еникеева Л.В., Губайдуллин И.М., 2021

концентрациям реагирующих веществ в этот момент времени, возведенных в степень, соответствующую стехиометрическому коэффициенту:

$$\omega^+ = k^+ c_{A_1}^{\alpha_1} c_{A_2}^{\alpha_2} \dots = k^+ \prod_{i=1}^{N_A} c_{A_i}^{\alpha_i},$$

$$\omega^- = k^- c_{B_1}^{\beta_1} c_{B_2}^{\beta_2} \dots = k^- \prod_{i=1}^{N_B} c_{B_i}^{\beta_i},$$

где коэффициенты k^+ и k^- — константы скорости реакции, прямой и обратной. Эти константы определяют удельную скорость реакции — скорость при единичных концентрациях реагирующих веществ.

К прямым относятся задачи, в которых константы скорости отдельных стадий прямых k^+ и обратных стадий k^- известны. Таким образом, прямая задача химической кинетики — это расчет динамики процесса на основе информации о его механизме, константах скорости одностадийных реакций и о начальных условиях. Кинетическая модель сложной реакции, осуществляющейся в лабораторном каталитическом реакторе, представляющим собой закрытую систему, представляется уравнением (2):

$$\frac{dc}{dt} = \Gamma w(c, k), \quad (2)$$

где c — вектор-столбец концентраций веществ; Γ — транспонированная стехиометрическая матрица; $w(c, k)$ — вектор-столбец скоростей стадий. Обратной задачей называют процесс выбора механизма сложного процесса и определение его количественных характеристик — констант скорости одностадийных реакций на основе опытных данных о динамике протекания процесса.

Литература

1. Enikeeva L.V., Potemkin D. I., Uskov S. I., Snytnikov P. V., Enikeev M. R., Gubaydullin I. M. Gravitational search algorithm for determining the optimal kinetic parameters of propane pre-reforming reaction. *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis*, 2021, 132(1), P. 111–122.

О ПОТОКАХ В СЕТЯХ С БАРЬЕРНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ

Я.М. Ерусалимский, В.А. Русаков,

В.А. Скороходов (Ростов-на-Дону,

Южный федеральный университет)

yterusalimskiy@sfnedu.ru, vrusakov@sfnedu.ru

Графы и сети с барьерной достижимостью были введены в рассмотрение в работах [1-3]. Напомним, что такое граф с барьерной достижимостью.

На графе с барьерной достижимостью множество дуг U состоит из трех непересекающихся подмножеств U_N —нейтральных дуг, U_+ — «увеличивающих» дуг, U_B — барьерных дуг. Для каждой барьерной дуги графа u задана ее высота (высота барьера) — натуральное число h_u . Опишем, какие пути являются допустимыми на графе с барьерной достижимостью.

С каждым отрезком пути μ на графе с барьерной достижимостью связана характеристика этого отрезка пути $\chi_\mu(i)$, $i \in \mathbb{Z}_+$, которая определена индуктивно следующим образом:

1. $\chi_\mu(0) = 0$.

$$2. \chi_\mu(i+1) = \begin{cases} \chi_\mu(i), & \text{если } \mu(i+1) \in U_N; \\ \chi_\mu(i) + 1, & \text{если } \mu(i+1) \in U_+; \\ \chi_\mu(i) - h_{\mu(i+1)}, & \text{если } \mu(i+1) \in U_B \text{ и } \chi_\mu(i) \geq h_{\mu(i+1)}. \end{cases}$$

Третья строка в п. 2, в частности, означает, что в случае $\chi_\mu(i) < h_{\mu(i+1)}$ барьерная дуга закрыта для прохождения путем μ .

Наличие ограничения на прохождение по барьерным дугам вносит существенные изменения в рассмотрение задач о кратчайших путях, случайных блужданиях и потоковых задач в сетях с барьерной достижимостью. В работе [5] был предложен подход к рассмотрению потоковых задач в таких сетях, использующий развертку сети. Однако, развертка имеет существенно большие размеры и является графом со связанными дугами, что не позволяет применять классические алгоритмы нахождения максимального потока. Кроме этого, получается, что понятие поток в сети барьерной достижимости, фактически, остается не определенным.

Анализ показал, что определить его, оставаясь в рамках классического подхода Форда-Фалкерсона [4], невозможно. Мы определили поток в сети с барьерной достижимостью как вектор-функцию, заданную на множестве дуг сети и удовлетворяющую во внутренних

вершинах сети условиям сохранения потока, аналогичным условиям Форда-Фалкерсона [4] и учитывающую наличие барьерной достижимости.

Введенное определение хорошо описывает ситуацию, возникающую на дугах такой сети, а именно — поток в сетях с барьерной достижимостью представляет собой многослойную структуру, когда по дугам проходят одновременно потоки, обладающие разными уровнями накопленной энергии. Такое наслоение разноуровневых потоков является основной причиной падения пропускной способности сети при увеличении высоты барьеров.

Литература

1. Ерусалимский Я.М. Потоки в сетях с нестандартной достижимостью / Я.М. Ерусалимский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Ест. науки. — 2012. — № 1. — С. 17–21.

2. Ерусалимский Я.М. Общий подход к нестандартной достижимости на ориентированных графах / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Ест. науки. — 2005. — Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — С. 64–67.

3. Ерусалимский Я.М. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов, А.Г. Петросян, М.В. Кузьмина М.В. Ростов н/Д: Южный федеральный ун-т, 2009. — 195 с.

4. Форд Л.Р. Потоки в сетях / Л.Р. Форд, Д.Р. Фалкерсон. / пер. с англ. — М.: Мир, 1966. — 276 с.

5. Ерусалимский Я.М. Потоки в сетях со связанными дугами / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Ест. науки. Приложения. — 2003, № 8. — С. 9–12.

ЭТА-ИНВАРИАНТ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ С ПАРАМЕТРОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)

zhuykovcon@gmail.com, antonsavin@mail.ru

Понятие η -инварианта было введено в знаменитой работе Атьи, Патоди и Зингера [1] для эллиптических самосопряжённых псевдодифференциальных операторов (далее ПДО) на замкнутом мно-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00574).

© Жуйков К.Н., Савин А.Ю., 2021

гообразии. Он по определению является спектральным инвариантом и участвует во многих формулах индекса. Важное обобщение η -инварианта было дано Мельроузом в [2]. А именно, было предложено рассматривать семейства $D(p)$ ПДО с параметром $p \in \mathbb{R}$, и η -инвариант семейства определялся как специальная регуляризация числа вращения, представимого выражением

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr} \left(D^{-1}(p) \frac{dD(p)}{dp} \right) dp,$$

где семейство $D(p)$ является эллиптическим и обратимым при всех $p \in \mathbb{R}$.

Целью данной работы является определение η -инварианта для следующего класса семейств с параметром:

$$D(p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k(p) e^{2\pi i k p} : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X), \quad (1)$$

где X — гладкое замкнутое многообразие, $D_k(p)$ — семейство ПДО на многообразии X с параметром $p \in \mathbb{R}$. Семейства вида (1) возникают, например, в условиях эллиптичности ПДО со сдвигами на многообразиях с коническими точками (см. [3]).

Мы определяем η -инвариант семейств вида (1), вводя некоторые регуляризации для следа tr и интеграла, и получаем его основные свойства. А именно, η -инвариант в смысле данной работы удовлетворяет логарифмическому свойству и является обобщением η -инварианта Мельроуза (т.е. совпадает с последним в случае обычных ПДО с параметром). Также получена формула вариации η -инварианта при изменении семейства.

Литература

1. Atiyah M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry I / M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. —1975. — V. 77. — PP. 43–69.
2. Melrose R. The eta invariant and families of pseudodifferential operators / R. Melrose // Math. Research Letters. —1995. — V. 2, No 5. — PP. 541–561.
3. Савин А.Ю. Эллиптические G -операторы на многообразиях с изолированными особенностями / А.Ю. Савин, Б.Ю. Стернин // СМФН. —2016. — Т. 59. — С. 173–191.

О ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ УЧЕТЕ ПОЛИДИСПЕРСНОСТИ ПРИМЕСИ И ВЕТРОВОМ ПОДХВАТЕ С ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ¹

А.В. Заборский, А. В. Нестеров (Обнинск,
ООО НИПР Радико; Москва, РЭУ им. Г.В. Плеханова)
alexander.zaborskiy@mail.ru; andrenesterov@yandex.ru

Настоящая работа является продолжением работ [1],[2]. Строится асимптотическое разложение (АР) по малому параметру решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений, описывающей перенос полидисперсной примеси в атмосфере с учетом осаждения и подхвата с подстилающей поверхности, а так же коагуляции-диссоциации

$$\varepsilon \left(\frac{\partial c_a}{\partial t} + V(z) \frac{\partial c_a}{\partial x} - w(p) \frac{\partial c_a}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (K(z, p) \frac{\partial c_a}{\partial z}) \right) = L_p c_a, \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial c_s}{\partial t} = (K(z, p) \frac{\partial c_a}{\partial z} + w(p) c_a)|_{z=0}, \quad (2)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial c_s}{\partial t} = \alpha(p) c_a|_{z=0} - \beta(p) c_s, \quad (3)$$

$$c_a(x, z, 0, p) = c_a^0(x, z, p), c_s(x, 0, p) = c_s^0(x, p). \quad (4)$$

Здесь $c_a(x, z, t, p)$, $c_s(x, t, p)$ - концентрации примеси в атмосфере ($z > 0$) и на поверхности почвы ($z = 0$) соответственно, переменная p описывает дисперсность примеси. Линейный оператор L_p , действующий по переменной p , описывает процессы коагуляции — диссоциации примеси в атмосфере и имеет однократное нулевое собственное значение, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый положительный параметр. На данные задачи накладывается ряд условий. По сравнению с [1] в уравнениях (2), (3) степень малого параметра иная, что приводит к существенному изменению вида АР решения.

Построено АР по степеням малого параметра решения задачи (1)-(4) в виде суммы регулярного ряда

$$\bar{c}_a(x, z, t, p, \varepsilon) = \bar{c}_{a,0}(x, z, t, p) + \dots,$$

¹ Данное исследование выполнено в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования РФ на тему "Разработка методологии и программной платформы для построения цифровых двойников, интеллектуального анализа и прогнозирования сложных экономических систем", номер проекта FSSW-2020-0008.

© Заборский А.В., Нестеров А.В., 2021

$$\bar{c}_s(x, t, p, \epsilon) = \frac{a(p)}{b(p)}(\bar{c}_{a,0}(x, 0, t, p) + \dots$$

и различных пограничных функций [3]. Получены задачи для определения всех членов ФАР решения задачи Коши для системы (1)-(3). Остаточный член оценен по невязке.

Главный член АР $\bar{c}_{a,0}$ имеет вид $\bar{c}_{a,0} = \varphi_0(x, z, t)h_0(p)$, где $h_0(p)$ - собственная функция оператора L_p , отвечающая нулевому собственному значению, а $\varphi_0(x, z, t)$ удовлетворяет параболическому уравнению с нестандартным краевым условием при $z = 0$:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + V(z) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{w} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{K}(z) \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}) = 0,$$

$$R \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \Big|_{z=0} = (\tilde{K}(z) \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \tilde{w} \varphi_0) \Big|_{z=0},$$

$R, \tilde{K}(z), \tilde{w}$ выражаются через данные задачи.

Литература

1. Заборский А.В. Математическая модель переноса полидисперсной примеси в атмосфере при ветровом подхвате с подстилающей поверхности / А.В. Заборский, А.В. Нестеров // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимн. мат. школы.—Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021.— С. 120.
2. Возженников О.И. О граничном условии для уравнения турбулентной диффузии при пылящей подстилающей поверхности / О.И. Возженников, А.В. Нестеров // Метеорология и гидрология. — 1991 — № 3, С. 32–38.
3. Васильева А. Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева , В.Ф. Бутузов — М. : Изд-во МГУ, 1978, —262 с.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О СВОБОДНЫХ ДЛИННОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н.С. Задорожная (Ростов-на-Дону, РГУПС)
simon@sfedu.ru

В работе рассматривается краевая задача о влиянии вертикальной компоненты магнитного поля на спектр колебаний невязкой жидкости бесконечной электропроводности. Решается задача на собственные значения, возникающая в теории магнитогидродинамических (МГД) волн в идеальной жидкости.

В гидродинамике жидкость при исследовании ее движения моделируется как сплошная среда, микроскопическим строением которой пренебрегают [1,2]. В задаче рассматривается модель идеальной (в магнитогидродинамическом смысле) жидкости, которая не может передавать касательные напряжения, а все нормальные напряжения независимо от направления одинаковы в данной точке пространства и в данный момент времени.

С математической точки зрения задача о распространении волн в жидкости со свободной поверхностью представляет собой нелинейную краевую задачу для области с заранее неизвестной и зависящей от времени границей. В работе рассматривается линеаризованная задача о свободных колебаниях.

Рассмотрим слой жидкости постоянной глубины, находящейся на твердом неэлектропроводном основании. Свободная поверхность граничит со средой пренебрежимо малой плотности и электропроводности. Предполагается, что жидкость несжимаемая и бесконечно проводящая. Движение такой жидкости описывается уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + (\bar{v}^* \nabla^*) \bar{v}^* = -\nabla^* \left(\frac{p^*}{\rho} + \frac{\bar{H}^{*2}}{8\pi\rho} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\bar{H}^* \nabla^*) \bar{H}^* + \bar{g},$$

$$\operatorname{div}^* \bar{v}^* = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{H}^*}{\partial t^*} = \operatorname{rot}^* (\bar{v}^* \times \bar{H}^*), \quad \operatorname{div}^* \bar{H}^* = 0.$$

Здесь ρ — плотность, p^* — давление, \bar{v}^* — скорость, \bar{g} — ускорение силы тяжести, \bar{H}^* — напряженность магнитного поля. Звездочкой обозначены (там, где это необходимо) размерные величины, чтобы отличать их от соответствующих безразмерных величин.

В работе сформулирована и решена связанная линейная задача о свободных длинноволновых колебаниях идеальной (в магнитогидродинамическом смысле) жидкости, ограниченной снизу абсолютно твердым диэлектриком, а сверху вакуумом (неионизированным газом). Определены собственные числа (частоты) и собственные функции (моды) соответствующей неклассической спектральной краевой задачи для ОДУ 4-го порядка. Установлено наличие поверхностной, внутренних и нехарактерных внутренних мод [3,4,5].

Литература

1. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика / Т. Каулинг. — М. 1959.

2. Куликовский А.Г. Магнитная гидродинамика / А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов.— М.: Логос, 2005. — 325 с.

3. Баринов В.А. Математическое моделирование магнитогиродинамических поверхностных волн / В.А. Баринов, Н.Г. Тактаров. — Саранск, 1991. — 96 с.

4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями / Л. Коллатц. — М. : Наука, 1968. — 503 с.

5. Задорожная Н.С. Спектральная краевая задача колебаний невязкой жидкости бесконечной электропроводности / Н.С. Задорожная // Транспорт: наука, образование, производство : Сборник научных трудов. Т. 1: Технические и естественные науки. — Ростов-на-Дону : РГУПС, 2020. — С. 225–229.

**РАСЧЕТ ВОДОПРОНИЦАЕМОСТИ
ГРУНТОПЛЕНОЧНОГО ЭКРАНА В СЛУЧАЕ
НЕПОЛНОГО РАЗМЫВА ЗАЩИТНОГО ПОКРЫТИЯ
Н.С. Задорожная, Е.В. Кручинина (Ростов-на-Дону, РГУПС)
*simon@sfnedu.ru***

В настоящей работе предлагается решение задачи фильтрации через щель полимерного экрана, когда имеет место размыв защитного покрытия в случае сильнопроницаемого основания.

Установившуюся фильтрацию тяжелой несжимаемой жидкости описывает система дифференциальных уравнений

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \bar{v} = -\kappa \operatorname{grad} h, \quad (1)$$

где $h = \frac{p}{\rho g} + \gamma$, (\bar{v} — вектор скорости потока, p — давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, κ — коэффициент фильтрации, $\gamma = \rho g$ — удельный вес).

Вид комплексного потенциала имеет вид прямоугольника.

При решении используются метод мажорантных областей [1] и метод конформных преобразований [2].

Предположим сначала, что кривая размыва имеет вид, близкий к кривой, описываемой уравнением эллипса, и задана уравнением

$$ch \frac{\pi x}{\delta} = \frac{\cos \frac{\pi y}{\delta}}{\cos \frac{\pi h}{\delta}}, \quad (2)$$

где δ — толщина защитного слоя, h — глубина размыва.

Получаем с помощью конформных отображений точное решение задачи фильтрации.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда кривая имеет произвольную форму. Построим вспомогательные мажорантные области G_1 и G_2 следующим образом. Область G_1 получаем путем вдавливания линии наименьшего напора на участке размыва до совпадения с конфигурацией, заданной уравнением (2). Чтобы получить G_2 , выдавливаем линию наименьшего напора на участке размыва до совпадения с кривой, заданной уравнением

$$ch \frac{\pi x}{\delta} = \frac{\cos \frac{\pi y}{\delta}}{ch \frac{\pi l}{\delta}}, \quad (3)$$

где l — ширина размыва.

Согласно вариационным теоремам [3,4], область G_1 дает возможность найти верхние оценки напоров и нижние оценки расхода через щель экрана, область G_2 — нижние оценки напоров и верхние оценки расхода.

Искомое решение есть среднее арифметическое найденных оценок.

Литература

1. Положий Г.Н. Теория и применение p -аналитических и (p, q) -аналитических функций / Г.Н. Положий. — Киев : Наукова думка, 1973. — 423 с.
2. Лаврик В.Н. Справочник по конформным отображениям / В.Н. Лаврик, В.Н. Савенков. — Киев : Наукова думка, 1970. — 252 с.
3. Клодина Т.В. Теорема об изменении давления при деформации линии тока / Т.В. Клодина Т.В., Н.С. Задорожная // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2014. — С. 89–90.
4. Клодина Т. В. Теорема об оценке напоров для одного вида краевых условий области фильтрации / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Международная научно-практическая конференция «Инновационные процессы в научной среде» — Уфа : Аэтерна, 2014. — С. 29–32.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО УЛАМУ-ХАЙЕРСУ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ¹

Э.З. Зайнуллина, В.С. Павленко, А.Н. Сесекин,
Н.В. Гредасова (Екатеринбург, УрФУ, ИММ УрО РАН)
sesekin@list.ru

В работе рассматриваются достаточные условия устойчивости по Уламу-Хайерсу обобщенных решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием в правой части. В классе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с абсолютно непрерывными траекториями эти вопросы рассматривались в [1-3]. В настоящей работе в правой части уравнения содержатся обобщенные воздействия — обобщенные производные функций ограниченной вариации, под решениями понимаются поточечные пределы последовательностей абсолютно непрерывных решений, получающиеся в результате аппроксимаций обобщенных воздействий в правой части уравнения суммируемыми функциями [4]. От работы [5] полученные авторами результаты отличаются тем, что в [5] используется формализация решений, предложенная в [6], а здесь используется формализация решений, описанная в [4].

Литература

1. Jung S.-M. Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order II / S.-M. Jung // *Applied Mathematics Letters* — 2006. — vol. 19. — pp. 854–858.
2. Jung S.-M. “Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order III / S.-M. Jung // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 311, no. 1, pp. 139–146, 2005.
3. Wang G. Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order / G. Wang, M. Zhou, L. Sun // *Applied Mathematics Letters* — 2008. — vol. 21. — pp. 1024–1028.
4. Zavalishchine S.T. *Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications* / S.T. Zavalishchine, A.N. Seseкин — Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1997. — 256 p.
5. Zada A. Hyers–Ulam stability of impulsive integral equations / A. Zada, U. Riaz, F.U. Khan // *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana* — 2019. — vol. 12. — pp. 453–467.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371).

© Зайнуллина Э.З., Павленко В.С., Сесекин А.Н., Гредасова Н.В., 2021

6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк — Киев.: Вища школа, 1987. 288 с.

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ

Н.В. Зайцева (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)

zaitseva@cs.msu.ru

Рассмотрим в полуплоскости $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^n b_k u(x - h_k, t), \quad (1)$$

где a, b_k, h_k ($k = \overline{1, n}$) — заданные вещественные числа.

В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях (см., напр., [1, 2]). В неограниченных областях подробно изучены задачи для параболических [3] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений [4–6]. Гиперболические же уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига действуют по переменной времени [7]. В работах [8–10] рассмотрены гиперболические уравнения, содержащие суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной. Уравнение (1) содержит сумму дифференциального оператора и операторов сдвига по пространственной переменной. Введем обозначения:

$$\rho(\xi) := \left[\left(a^2 \xi^2 + \sum_{k=1}^n b_k \cos(h_k \xi) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n b_k \sin(h_k \xi) \right)^2 \right]^{1/4},$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sum_{k=1}^n b_k \sin(h_k \xi)}{a^2 \xi^2 + \sum_{k=1}^n b_k \cos(h_k \xi)},$$

$$G_1(\xi) := \rho(\xi) \sin(\varphi(\xi)), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi) \cos(\varphi(\xi)).$$

Теорема. При выполнении условия $a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^n b_k \cos(h_k\xi) > 0$ для любого вещественного значения параметра ξ , функции

$$F(x, t; \xi) := e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$H(x, t; \xi) := e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - x\xi)$$

удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.

Литература

1. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications / A.L. Skubachevskii. — Basel—Boston—Berlin : Birkhäuser, 1997. — 294 p.

2. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи матем. наук. — 2016. — Т. 71, вып. 5(431). — С. 3–112.

3. Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А.Б. Муравник // Соврем. матем. Фундам. направл. — 2014. — Т. 52. — С. 3–143.

4. Муравник А.Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики / А.Б. Муравник // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, вып. 5. — С. 747–762.

5. Muravnik A. On the half-plane Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms / A. Muravnik // Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — Vol. 12, no. 6. — P. 130–143.

6. Муравник А.Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве / А.Б. Муравник // Матем. заметки. — 2020. — Т. 108, вып. 5. — С. 764–770.

7. Власов В.В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В.В. Власов, Д.А. Медведев // Соврем. матем. Фундам. направл. — 2008. — Т. 30. — С. 3–173.

8. Зайцева Н.В. О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н.В. Зайцева // Докл. РАН. — 2020. — Т. 491, № 2. — С. 44–46.

9. Зайцева Н.В. Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н.В. Зайцева // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 745–751.

**ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ТЕОРЕМЫ
ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ПСЕВДО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Ю.В. Засорин (Воронеж, ВГУ)

York-York-York-1960@yandex.ru

Рассматривается проблема о возможности перенесения условия регулярности решений на бесконечности одного псевдодифференциального уравнения в частных производных на другое таким образом, чтобы при этом сохранялась единственность решения.

Пусть $x, \xi \in R^n$, и пусть $E'(R^n)$ означает либо шварцевское пространство $S'(R^n)$ распределений умеренного роста, либо пространство $Z'(R^n)$ аналитических функционалов. Пусть, далее, $P(D), Q(D), \Psi(D) : E'(R^n) \rightarrow E'(R^n)$ — линейные псевдодифференциальные операторы в частных производных в R^n , коммутирующие со сдвигами (в частности, они могут быть просто дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами):

$$P(D)u(x) = (P(\xi)\hat{u}(\xi))^\sim(x), \quad Q(D)u(x) = (Q(\xi)\hat{u}(\xi))^\sim(x),$$

где \hat{f} и \check{f} означает соответственно прямое и обратное преобразование Фурье распределения $f(x) \in E'(R^n)$. Пусть, далее, \mathcal{N}_P и \mathcal{N}_Q — множества вещественных нулей символов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ соответственно. Если $\mathcal{N}_P \subset \mathcal{N}_Q$, то оператор $P(D)$ будем называть *подчиненным* оператору $Q(D)$ и обозначать этот факт: $P(D) \prec Q(D)$; если же $\mathcal{N}_P = \mathcal{N}_Q$, то операторы $P(D)$ и $Q(D)$ будем называть *эквивалентными* и обозначать этот факт: $P(D) \sim Q(D)$.

Рассмотрим два однородных уравнения в $E'(R^n)$:

$$P(D)u(x) = 0, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

и

$$Q(D)u(x) = 0, \quad x \in R^n, \quad (2)$$

с одним и тем же условием регулярности решения на бесконечности:

$$\Psi(D)u(x) = o(|x|^{-\mu}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (\mu \geq 0), \quad (3)$$

которое будем понимать в смысле теории распределений.

Главный результат сформулирован в следующих утверждениях:

Теорема 1. (принцип подчиненности) Пусть $P(D) \prec Q(D)$. Тогда из единственности решения в классе $E'(R^n)$ задачи (2), (3) следует и единственность в этом же классе решения задачи (1), (3). И, наоборот, из неединственности решения задачи (1), (3) следует неединственность решения задачи (2), (3).

Теорема 2. (принцип эквивалентности) Пусть $P(D) \sim Q(D)$. Тогда в классе $E'(R^n)$ задачи (1), (3) и (2), (3) одновременно либо имеют только тривиальные решения, либо одновременно имеют нетривиальные решения.

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ДЕФОРМАЦИЯХ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ¹

М.Б. Зверева (Воронеж, ВГУ)

margz@rambler.ru

Проведено исследование двумерной модели деформаций стилтьесовской струны, когда отклонение любой точки струны от положения равновесия под воздействием внешней силы, определяемой функцией $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$, характеризуется двумя координатами $u_1(x)$, $u_2(x)$, где $0 \leq x \leq l$. Левый конец струны предполагается жестко закрепленным, т.е. $u_1(0) = u_2(0) = 0$. Правый конец струны находится внутри ограниченного, замкнутого, выпуклого множества $C \subset R^2$, принадлежащего плоскости, перпендикулярной оси Ox . Таким образом, выполнено условие $(u_1(l), u_2(l)) \in C$. В зависимости от приложенной внешней силы, правый конец струны или остается внутренней точкой множества C , или становится граничной точкой C . Функционал потенциальной энергии такой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \int_0^l \frac{p(x)u_1'^2(x)}{2} dx + \int_0^l \frac{p(x)u_2'^2(x)}{2} dx + \int_0^l \frac{u_1^2(x)}{2} dQ(x) + \\ & + \int_0^l \frac{u_2^2(x)}{2} dQ(x) - \int_0^l u_1(x) dF_1(x) - \int_0^l u_2(x) dF_2(x). \end{aligned}$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ (проект № 20-51-15003).

© Зверева М.Б., 2021

Реальная форма, принятая струной, является точкой минимума функционала Φ при условиях $u_1(0) = u_2(0) = 0$, $(u_1(l), u_2(l)) \in C$. Здесь функция $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды; функция $p(x)$ характеризует упругость струны.

Вариационными методами установлено, что реальная форма струны является решением задачи

$$\begin{cases} -p(x)u'(x) + \int_0^x u(s)dQ(s) = F(x) - F(0) - (pu')(0), \\ u(0) = 0, \\ u(l) \in C, \\ -p(l)u'(l) \in N_C(u(l)), \end{cases} \quad (1)$$

где $N_C(u(l))$ — нормальный конус к множеству C в точке $u(l)$, т.е.

$$N_C(u(l)) = \{\xi \in R^2 : \langle \xi, c - u(l) \rangle \leq 0 \quad \forall c \in C\}.$$

Здесь обозначено $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$; $p(x)u'(x) = (p(x)u'_1(x), p(x)u'_2(x))$,

$$\int_0^x u(s)dQ(s) = \left(\int_0^x u_1(s)dQ(s), \int_0^x u_2(s)dQ(s) \right).$$

Теорема. Пусть функции $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются непрерывными в точках $x = 0$ и $x = l$. Функции $p(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$; $\inf_{[0, l]} p(x) > 0$; функция $Q(x)$ не убывает на $[0, l]$. Тогда задача (1) имеет единственное решение.

Одномерный случай такого рода задачи был рассмотрен в работах [1–4].

Литература

1. Zvereva M. A string oscillations simulation with nonlinear conditions / M. Zvereva // *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*.— 2017. —V. 72. —P. 141–150.
2. Kamenskii M. A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type / M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // *Optimization*.— 2018. —V. 7, Is. 9. —P. 1321–1332.
3. Kamenskii M. On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions / M. Kamenskii, Y.-Ch. Liou, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // *Optimization*.— 2020. —V. 69, Is. 2. —P. 283–304.

4. Kamenskii M. On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end / M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization.— 2020. —V. 69, Is. 9. —P. 1935–1959.

ТЕРМОВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ¹

А.В. Звягин (Воронеж, ВГПУ)

zvyagin.a@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $Q_T = [0, T] \times \Omega$ рассматривается начально-краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\text{Div}(\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) - \varkappa(\theta) \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa(\theta)\text{Div}\left(v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) - 2\varkappa(\theta)\text{Div}(\mathcal{E}(v)W(v) - W(v)\mathcal{E}(v)) + \text{grad } p = f; \quad (1)$$

$$\text{div } v = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad x \in \Omega; \quad v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = 2\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g; \quad (4)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad x \in \Omega; \quad \theta|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Здесь v , θ и p — вектор- функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно, f — плотность внешних сил, g — источник внешнего тепла, $\varkappa > 0$ — время ретардации (запаздывания), $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\nu > 0$ — вязкость жидкости, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij})$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$ — тензор скоростей деформаций, $W(v) = (W_{ij})$, $W_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i)$ — тензор завихренности. Символ $A : B = a_{ij}b_{ij}$ для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$; $\text{Div } C$ — дивергенция тензора $C = (c_{ij}(t, x))$, то есть вектор $\text{Div } C = \left(\partial c_{1j}(t, x) / \partial x_j, \dots, \partial c_{nj}(t, x) / \partial x_j \right)$.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-60014).

© Звягин А.В., 2021

Исследуемая задача (1)–(5) описывает движение растворов полимеров (см. [1]–[3]). Стационарный случай изучаемой задачи исследовался в работах [3], [4]. Задача оптимального управления с обратной связью для частного случая была рассмотрена в [6].

Введём пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

1. $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$,
с нормой $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0, T; V^1)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^{-1})}$;
2. $E_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega)), 1 < p < +\infty\}$,
с нормой $\|\theta\|_{E_2} = \|\theta\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} + \|\theta'\|_{L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))}$.

Теорема 1. Пусть функция $\nu(\theta), \kappa(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$, $0 < \nu(\theta) \leq M_1$ и $0 < \kappa(\theta) \leq M_2$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $g \in L_1(0, T; L_1(\Omega))$, $v_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и при $1 < p < 10/9$ для $n = 3$ существует слабое решение $(v, \theta) \in E_1 \times E_2$ задачи (1)–(5).

Литература

1. Звягин А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т. 59, Н. 5. — С. 1066–1085.
2. Звягин А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели движения растворов полимеров, удовлетворяющей принципу объективности / А.В. Звягин // Математические Заметки. — 2019. — Т. 105, В. 6. — С. 839–856.
3. Звягин А.В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере / А.В. Звягин // Известия вузов. Математика. — 2016. — № 10. — С. 70–75.
4. Звягин А.В. О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Известия вузов. Математика. — 2011. — № 2. — С. 103–105.
5. Звягин А.В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А.В. Звягин // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2012. — № 2. — С. 118–121.
6. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта / А.В. Звягин // ДАН. — 2016. — Т. 468, Н. 3. — С. 251–253.

О ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ФОЙГТА С БЕСКОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

В.Г. Звягин, Е.И. Костенко (Воронеж, ВГУ)

ekaterinalarshina@mail.ru

В $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T > 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$ рассматривается задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v -$$

$$\mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} \varepsilon(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f(t, x); \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad (2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)), \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (3)$$

$$v(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (t, x) \in \Gamma = (-\infty, T] \times \partial\Omega. \quad (4)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1, \dots, v_n)$ и $p(t, x)$ искомые скорость и давление рассматриваемой среды, $\varepsilon(v) = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации, где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, $\mu_0 > 0, \mu_1 \geq 0, 0 < \alpha < 1$, а $z(\tau; t, x)$ — решение Задачи Коши. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, то есть вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы.

Введем следующие функциональные пространства:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V), v' \in L_2(-\infty, T; V^*)\}, \text{ при } n = 2;$$

$$W_2 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^*)\}, \text{ при } n = 3.$$

Здесь $L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^*)$ — пространство, состоящее из функций v , определённых почти всюду на $(-\infty, T]$ и принимающих значение в V^* , сужение которых на любой отрезок $[r, T] \in (-\infty, T]$ принадлежит $L_{4/3}(r, T; V^*)$. Пусть $W = W_1$ при $n = 2$ и $W = W_2$ при $n = 3$.

Определение 1. Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^*)$. Слабым решением задачи (1)–(4) называется функция $v \in W$, удовлетворяющая при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in (-\infty, T]$ тождеству

$$\langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx +$$

$$+\mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} \varepsilon(v)(s, z(s; t, x)) ds \varepsilon(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle,$$

где z — РЛП, порожденный v .

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^*)$. Тогда задача (1)- (4) имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in W$.

Разрешимость в слабом смысле частных случаев рассматриваемой в работе модели была доказана в работах [1], [2]. Разрешимость на конечном временном отрезке для данной модели была получена в работе [3]. Альфа- модели для рассматриваемой в работе задачи были изучены в работах [4]- [6].

Литература

1. Звягин В.Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко // Диф. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 12. — С. 1633–1645.

2. Звягин В.Г. О слабых решениях начально- краевой задачи для уравнения движения вязкоупругой жидкости / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380, № 3. — С. 308–311.

3. Звягин В.Г. О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Диф. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 215–220.

4. Звягин А.В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа- модели Фойгта движения вязкоупругой среды / А.В. Звягин // УМН. — 2019. — Т. 74, № 3. — С. 189–190.

5. Звягин А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа- модели Фойгта / А.В. Звягин // Изв. РАН. Сер. мат. — 2021. — Т. 85, №. 1. — С. 66–97.

6. Звягин А.В. О разрешимости одной альфа- модели движения жидкости с памятью / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, Д.М. Поляков // Изв. вузов. Матем. — 2018. — № 6. — С. 78–84.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ; Воронеж, ЛТУ)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Для динамической системы

$$A\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t) + f(t), \quad (1)$$

© Зубова С.П., Раецкая Е.В., 2021

где $A, B : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, $\nexists A^{-1}$, с условиями $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$ определено программное управление $u(t)$ и программное состояние $x(t)$.

В момент времени $t = 0$ динамическая система может занять положение $x^* \neq x_0$. Требуется построить управление $u^*(t)$ такое, что новое состояние системы $x^*(t)$ стремится со временем к программному состоянию. Новые состояние $x^*(t)$ и управление $u^*(t)$ — есть решение задачи

$$A\dot{x}^*(t) = Bx^*(t) + Du^*(t) + f(t), \quad (2)$$

$$x^*(0) = x^*.$$

Управление $u^*(t)$ называется экспоненциально стабилизирующим, если

$$\|x(t) - x^*(t)\| \leq c \cdot e^{-wt}, \quad w > 0.$$

Формируется задача для $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$, $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$:

$$A\dot{\tilde{x}}(t) = B\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t), \quad (3)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0 - x^*, \quad \|\tilde{x}(t)\| \leq c \cdot e^{-wt}. \quad (4)$$

Теорема 1. *Существуют $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ задачи (3), (4) тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$k_1) \exists(\lambda \in \dot{U}(0)) [\text{Ker}(A - \lambda B) = \{0\}];$$

$$i_1) \text{rank}(A \quad D) = n;$$

$$k_3) \forall(\lambda \in \mathbb{C}) \forall(v \in \mathbb{R}^l) \exists(y, z) [(B - \lambda A)y + Dz = Av].$$

Искомые $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ строятся методом каскадной декомпозиции [1-3]. Затем находятся $u^*(t)$ и $x^*(t)$.

Литература

1. Zubova, S. P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition / S. P. Zubova, E. V. Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2017. — V. 78, № 7. — P. 1189–1202.

2. Zubova, S. P. Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method / S. P. Zubova // Doklady Mathematics, Pleiades Publishing, Ltd. — 2012. — V. 86, № 3. — P. 846–849.

3. Зубова, С. П. Стабилизация линейной системы управления / С. П. Зубова // Учёные записки РГСУ. Москва. — 2010. — № 8 (84). — С. 60–69.

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ
С БЕСКОНЕЧНОЙ ОРБИТОЙ ГРАНИЦЫ¹**

Е.П. Иванова (Москва, МАИ, РУДН)
elpaliv@yandex.ru

Рассматривается краевая задача для дифференциально - разностного уравнения:

$$A_R u = - \sum_{i,j=1}^n (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \quad (1)$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q), \quad (2)$$

Q – ограниченная область в \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой границей, $f \in L_2(Q)$, разностные операторы $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ вида:

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M_{ij}} a_{ijh} (u(x+h) + u(x-h)) \quad (a_{ijh} \in \mathbb{R}), \quad (3)$$

где $M_{ij} \subseteq M$ – конечное множество векторов с несоизмеримыми координатами. Решение u задачи (1)-(2) ищется в пространстве Соболева $\dot{H}^1(Q)$ и определяется стандартным образом.

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами исследовались в работах А.Л. Скубачевского [1].

В отличие от задач, изучаемых в [1], уравнение (1) содержит несоизмеримые сдвиги аргументов, что значительно осложняет исследование.

Однако, в случае, когда орбита границы области под действием сдвигов разностного оператора конечна, применимы методы, разработанные для задач с целочисленными сдвигами.

В частности, краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с несоизмеримыми сдвигами может быть сведена к краевой задаче для дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями [3].

Для этого строится специальное разбиение области на непересекающиеся подобласти. В этих подобластях решение сохраняет гладкость [2].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-01-00288).

© Иванова Е.П., 2021

Для случая, когда орбита границы под действием сдвигов разностного оператора бесконечна, характер задачи принципиально меняется. В частности, ее решения могут иметь всюду плотное множество точек разрыва производной.

Предложен метод получения условий сильной эллиптичности (выполнения неравенства Гординга) основанный на построении системы взаимосвязанных матричных полиномов [4]. Эти условия являются устойчивыми относительно малых возмущений сдвигов разностного оператора и позволяют аппроксимировать рассматриваемые задачи задачами с рациональными (соизмеримыми сдвигами).

Литература

1. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических дифференциально -разностных уравнений и их приложения / Скубачевский А.Л.// Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, № 5. — С. 3–112.

2. Иванова Е.П. О гладких решениях дифференциально -разностных с несоизмеримыми сдвигами аргументов /Иванова Е.П.// Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 1. —С. 145–148.

3. Иванова Е.П. Краевые задачи для дифференциально -разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, сводящиеся к нелокальным задачам /Иванова Е.П. // СМФН. — 2019. — Т. 65, — С. 613–622.

4. Ivanova E.P. On coercivity of differential -difference equations with incommensurable translations of arguments /Ivanova E.P.// Journal of Mathematical Sciences —2019. — Vol. 239, No. 6. — P. 802–816.

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСАХ В ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ¹

Н.Р. Изварина, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)

izvarinanat@gmail.com, a.yu.savin@gmail.com

Объектом изучения являются комплексы в относительной эллиптической теории. Эта относительная теория была определена Стерниним [2, 4] как теория краевых задач с условиями на подмножествах различной размерности (впервые эта задача рассматривалась для полигармонического уравнения Соболевым [5]).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

© Изварина Н.Р., Савин А.Ю., 2021

Для таких комплексов представлено определение эллиптичности. Для комплекса (1) мы даём следующий результат.

Теорема 1. *Если комплекс (1) эллиптивен, то он фредгольмов.*

Был рассмотрен один интересный пример эллиптических комплексов, так называемый, конус отображения. Более того, в качестве примера мы рассматриваем относительный комплекс де Рама, доказываем его фредгольмовость, а также устанавливаем соответствующую теорему де Рама.

Литература

1. Новиков С.П. Эллиптические операторы и подмногообразия / С.П. Новиков, Б.Ю. Стернин // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 171, №3. — С. 525–528.

2. Стернин Б.Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности / Б.Ю. Стернин // — М. : Тр. ММО., 1966. — Т. 15. — С. 346–382.

3. Стернин Б.Ю. Эллиптические морфизмы (оснащение эллиптического оператора) для подмногообразий с особенностями / Б.Ю. Стернин // Докл. АН СССР., 1971. — Т. 200, №1. — С. 45–48.

4. Стернин Б.Ю. Относительная эллиптическая теория и проблема С.Л. Соболева / Б.Ю. Стернин // Доклады АН СССР., 1976. — Т. 230, №2. — С. 287–290.

5. Соболев С.Л. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений / С.Л. Соболев // УМН, 1938. — №4. С. 275–277.

ОБ ЭЛЕКТРОННОМ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОМ КОМПЛЕКСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Н.И. Ильинкова, И.И. Рушнова, Т.А. Чехменок

(Минск, БГУ)

n.ilyinkova52@gmail.com, Rushnova@bsu.by, TChekhmenok@gmail.com

Дисциплина «Математический анализ» является базовым основанием для всех последующих математических и физических дисциплин в структуре образовательной программы факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета. В настоящее время, когда онлайн-обучение дополняет/заменяет аудиторный формат работы, электронные учебно-

методические комплексы (ЭУМК) являются той составляющей, которая обеспечивает возможность получения студентами качественного образования. ЭУМК «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной» [1] разработан в соответствии с учебными планами факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета и отражает ту тематику, которая содержится в действующей учебной программе курса математического анализа за первый семестр обучения [2]. ЭУМК состоит из четырех разделов: теоретический раздел, практический раздел, раздел контроля знаний и вспомогательный раздел. В теоретическом разделе содержится краткий конспект лекций, сопровождаемый вопросами к каждой главе, что позволяет студентам проверить степень усвоения основных понятий математического анализа. В практической части изложен подробный план занятий, определены темы, задачи, решаемые в аудитории и задачи для самостоятельной работы [3]. Материал, указанный в программе дисциплины, не может быть в полном объеме изложен в том количестве лекций, которое предусмотрено учебным планом. Поэтому отдельные вопросы описательного и понятийно-терминологического характера отнесены к рассмотрению на практических занятиях, а также рекомендованы для самостоятельной работы студентов. По этой причине в практической части ЭУМК рассмотрению подобных вопросов уделено особое внимание, приведены разобранные задачи с подробным решением. Приводятся подсказки и комментарии к решению задач, что помогает более глубокому уяснению их сути. В разделе контроля знаний содержатся примерные варианты контрольных работ, коллоквиумов, вопросы к зачету и экзамену. Для подготовки к контрольным мероприятиям приводятся тренировочные варианты контрольных работ, коллоквиумов, экзаменационных заданий. Для более детального изучения рассматриваемого материала во вспомогательном разделе предложен перечень учебных пособий и Нам представляется, что электронный учебно-методический комплекс будет весьма полезным для организации как аудиторной, так и дистанционной формы работы студентов физических и радиофизических специальностей, а также окажет весомую помощь при изучении высшей математики студентами и многих других технических и физико-математических специальностей.

Литература

1. Ахраменко В.К., Ильинкова Н.И., Рушнова И.И., Чехменок Т.А. ЭУМК по учебной дисциплине: Математический анализ. Дифференциальное и

интегральное исчисление функций одной переменной. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/250914>. №014112112020, Деп. в БГУ 12.11.2020.

2. Егоров А.А., Ильинкова Н.И., Рыбаченко И.В., Чехменок Т. А. Математический анализ: учебная программа. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/247693>, 30.06.2020.

3. Высшая математика. Сборник задач: учеб. пособие. В 3 ч. Ч.1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной // В.К. Ахраменко [и др.]; под ред. Н.Г. Абрашиной-Жадаевой, В.Н. Русака. — Мн.: БГУ, 2013. — 359 с.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРАМИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова (Магнитогорск,
МГТУ им. Г.И. Носова)
sikadchenko@mail.ru

Для обратных спектральных задач, порожденных операторами Штурма - Лиувилля L_{2m} произвольного четного порядка $2m$

$$L_{2m}(u_{2m}) \equiv (-1)^m \frac{d^{2m} u_{2m}}{ds^{2m}} + p_{2m}(s)u_{2m} = \mu_{2m}u_{2m}, \quad 0 < s < \pi, \quad (1)$$

$$u_{2m}^{(2\nu-1)}(0) = u_{2m}^{(2\nu-1)}(\pi) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}, \quad m \in N \quad (2)$$

разработан алгоритм решения обратных задач позволяющие в узлах дискретизации восстановить значения потенциалов $p_{2m}(s)$.

В алгоритме используются собственные значения μ_{2m_n} краевых задач (1), (2), принадлежащих отрезкам $[c_{2m}, d_{2m}]$, собственные значения $\{\lambda_{2m_n}\}_{n=0}^{\infty}$ и собственные функции $\{v_{2m_n}\}_{n=0}^{\infty}$, соответствующих невозмущенных задач

$$(-1)^m \frac{d^{2m} v_{2m}}{ds^{2m}} = \lambda_{2m} v_{2m}, \quad m \in N, \quad 0 < s < \pi, \quad (3)$$

$$v_{2m}^{(2\nu-1)}(0) = v_{2m}^{(2\nu-1)}(\pi) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Известно, что собственные значения λ_{2m_n} и соответствующие им собственные функции v_{2m_n} задач (3), (4), имеют вид

$$\lambda_{2m_n} = n^{2m}, \quad v_{2m_n} = \sigma_n \cos(ns), \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad \sigma_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad n > 0.$$

Система функций $\{\sigma_n \cos(ns)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства $L_2[0, \pi]$. При этом все функции v_{2m_n} удовлетворяют граничным условиям (4).

Теорема 1. *Приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_{2m_n}$ спектральной задачи (1). (2) находятся по линейным формулам*

$$\tilde{\mu}_{2m_n}(n) = \left(L_{2m}(v_{2m_n}), v_{2m_n} \right) + \tilde{\delta}_{2m_n}, \quad n \in N, \quad (5)$$

где $\tilde{\delta}_{2m_n} = \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_{2m_k}(n-1) - \tilde{\mu}_{2m_k}(n)]$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_{2m_n} = 0$.

Формулы (5) для системы $\{v_{2m_n}\}_{n=0}^{\infty}$ имеют вид

$$\tilde{\mu}_{2m_n}(n) = n^{2m} + \sigma_n^2 \int_0^{\pi} p_{2m}(s) \cos^2(ns) ds + \tilde{\delta}_{2m_n}. \quad (6)$$

На основе равенств (6) строим интегральные уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_0^{\pi} K(x_{2m}, s) p_{2m}(s) ds = \tilde{f}_{2m}(x_{2m}), \quad x_{2m} \in [c_{2m}, d_{2m}]. \quad (7)$$

Здесь $K(x_{2m_n}, s) = \sigma_n^2 \cos^2(ns)$. Считается, что ядра $K(x_{2m}, s)$ интегральных уравнений (7) непрерывны в $\Pi_{2m} = [c_{2m}, d_{2m}] \times [0, \pi]$ и $p_{2m} \in W_2^{2m}[0, \pi]$, $\tilde{f}_{2m}(x_{2m_n}) = \tilde{\mu}_{2m_n}(n) - n^{2m} - \tilde{\delta}_{2m_n}$, $\tilde{f}_{2m}(x_{2m}) \in L_2[c_{2m}, d_{2m}]$. Приближенные решения $\tilde{p}_{2m}^{\alpha_{2m}}$ интегральных уравнений (7) ищутся методом регуляризации Тихонова. Составив сглаживающие функционалы Тихонова, и, находя $\tilde{p}_{2m}^{\alpha_{2m}}$ из условий, что они реализуют функционалам минимальные значения, получим системы линейных алгебраических уравнений для нахождения значений $\tilde{p}_{2m_n}^{\alpha_{2m}}$ в узлах дискретизации $t_n \in [0, \pi]$

$$\sum_{n=1}^{N_s} \left\{ \alpha_{2m} [l_n(t_k) - q_l''(t_k)] + G_n(t_k) \right\} \tilde{p}_{2m_n}^{\alpha_{2m}} = \tilde{F}_{2m_k}(t_k), \quad k = \overline{1, N_s}.$$

Здесь α_{2m} – параметр регуляризации, $G_n(t) = \sum_{k=1}^{N_s} \gamma_{2m_k} K(x_{2m_k}, t) H_{kn}$, $\tilde{F}_{2m}(t) = \sum_{k=1}^{N_s} \gamma_{2m_k} K(x_{2m_k}, t) \tilde{f}_{2m_k}$, $H_{kn} = \int_0^{\pi} l_n(s) K(x_{2m_k}, s) ds$, γ_{2m_k} – весовые множители в квадратурной формуле трапеций с переменным шагом на отрезках

$[c_{2m}, d_{2m}]$, $l_n(t)$ – лагранжевые коэффициенты. Для проверки разработанных алгоритмов были восстановлены значения одинаковых потенциалов $p_{2m}(s) = s^2 + 5s + 2$ в узлах дискретизации для различных порядков $2m$ ($m = 1, 2, 3, 4, 8, 16$) дифференциальных операторов в обратных спектральных (1), (2). Результаты проведенных вычислительных экспериментов подтверждают правильность идеи разработки нового метода решения обратных спектральных задач на основе формул (5).

**ОБ АЛГОРИТМАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
БАРБАШИНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ¹**

В.А. Калитвин (Липецк,
ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
kalitvin@gmail.com

К интегро-дифференциальным уравнениям Барбашина с частными интегралами и системам уравнений такого вида приводятся некоторые задачи теории вероятностей, теории систем с существенно распределенными параметрами и другие проблемы [1].

Найти решение уравнений такого вида в явном виде удается в редких случаях. Поэтому актуальной задачей является построение схем приближенного и алгоритмов численного решения этих уравнений.

В работе рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s)x(t, s) + \int_c^d k(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma + f(t, s), \quad x(a, s) = \varphi(s),$$

где $t \in J, s \in [c, d], J$ – конечный или бесконечный промежуток числовой оси, $c(t, s), k(t, s, \sigma), f(t, s)$ и $\varphi(s)$ – заданные на $D = J \times [c, d], D \times [c, d], D$ и $[c, d]$ соответственно измеримые функции, а интеграл понимается в смысле Лебега. Исследование этой задачи приведено в книге [1]. Здесь задача интерпретировалась как задача Коши в банаховом пространстве, что приводило к необходимости рассмотрения ее решения в обобщенном смысле. Например, в предположении непрерывности заданных функций задача имеет единственное непрерывное вместе со своей частной производной по

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

© Калитвин В.А., 2021

t решение $x(t, s)$ [1]. Найти же решение задачи в явном виде, как правило, не удастся. Однако при $I = [a, b]$ и непрерывных заданных функций задача достаточно эффективно решается численно. Например, с использованием языка программирования python легко реализуется следующая схема численного решения задачи:

1) отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ разбиваются на части точками $t_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}$) и $s_j = c + jg$ ($j = 0, 1, \dots, m, g = \frac{d-c}{m}$);

2) вычисляются значения $x(t_0, s_j) = x(a, s_j) = \varphi(s_j), j = 0, 1, \dots, m$;

3) значения $x(t_{i+1}, s_j)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m$) вычисляются последовательно при $i = 0$ и $j = 0, 1, \dots, m$; $i = 1$ и $j = 0, 1, \dots, m$; ...; $i = n-1$ и $j = 0, 1, \dots, m$ с применением равенства

$$x(t_{i+1}, s_j) = x(t_i, s_j) + h \left[c(t_i, s_j) + g \sum_{k=0}^{m-1} k(t_i, s_j, s_k) x(t_i, s_k) + f(t_i, s_j) \right],$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m.$$

При этом процесс вычислений продолжается до тех пор, пока значения $x(t_i, s_j)$ вычисленные при h, g и $h/2, g/2$ в одних и тех же точках, будут отличаться на число, меньшее заданной точности ϵ .

Другой подход решения этой задачи основан на том, что подстановкой

$$x(t, s) = \int_a^t y(\tau, s) d\tau + \varphi(s) \quad (2)$$

уравнение (1) с начальным условием $x(a, s) = \varphi(s)$ сводится к интегральному уравнению

$$y(t, s) = c(t, s) \int_a^t y(\tau, s) d\tau + \int_a^t \int_c^d k(t, s, \sigma) y(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + f(t, s), \quad (3)$$

$f(t, s) = c(t, s)\varphi(s) + \int_c^d k(t, s, \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma + g(t, s)$, а под решением уравнения (3) понимается непрерывная на D функция $y(t, s)$, удовлетворяющая этому уравнению. Таким образом, ИДУБ с начальным условием $x(0, s) = \varphi(s)$ и непрерывным на D вместе с частной производной по t решением $x(t, s)$ и интегральное уравнение (3) с непрерывным решением $y(t, s)$ эквивалентно в том смысле, что их решения связаны равенством (2).

В этом случае достаточно рассмотреть численное решение интегрального уравнения (3). Это уравнение есть частный случай

изученных в [3] интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Алгоритмы решения этих уравнений приведены в [3-5].

Далее строится алгоритм численного решения для задачи Коши

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s)x(t, s) + \int_c^d k(t, s, \sigma, x(t, \sigma))d\sigma + f(t, s), \quad x(a, s) = \varphi(s),$$

где $t \in [a, b]$, $s \in [c, d]$, $c(t, s)$, $k(t, s, \sigma, u)$, $f(t, s)$ и $\varphi(s)$ — заданные на $D = [a, b] \times [c, d]$, $D \times [c, d] \times (-\infty, +\infty)$, D и $[c, d]$, соответственно, непрерывные функции, а функция $k(t, s, \sigma, u)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|k(t, s, \sigma, u) - k(t, s, \sigma, v)| \leq M|u - v|, \quad M = \text{const}.$$

В [1] показано, что при этих условиях задача имеет единственное непрерывное вместе со своей частной производной по t решение $x(t, s)$. Найти решение в явном виде удастся в редких случаях, однако удобно находить численное решение задачи. С использованием языка программирования python легко реализуется следующий алгоритм решения:

1) область D разбивается на части прямыми

$$t_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad \text{и} \quad s_j = c + jg \quad (j = 0, 1, \dots, m),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$ и $g = \frac{d-c}{m}$;

2) в узлах сетки вычисляются значения $x(t_0, s_j) = \varphi(s_j)$ ($j = 0, 1, \dots, m$), а значения $x(t_{i+1}, s_j)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m$) вычисляются последовательно при $i = 0, j = 0, 1, \dots, m; i = 1, j = 0, 1, \dots, m; \dots; i = n-1, j = 0, 1, \dots, m$ с применением равенства

$$x(t_{i+1}, s_j) = x(t_i, s_j) + h \left[c(t_i, s_j) + g \sum_{k=0}^m k(t_i, s_j, s_k, x(t_i, s_k)) + f(t_i, s_j) \right],$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m.$$

Процесс вычислений продолжается до тех пор, пока значения $x(t_i, s_j)$, вычисленные при h, g и $h/2, g/2$ в одних и тех же точках, будут отличаться на число, меньшее заданной точности ϵ .

Другой способ численного решения основан на переходе к эквивалентному уравнению с частными интегралами

$$x(t, s) = \int_a^t \int_c^d l(t, s, \tau, \sigma, x(\tau, \sigma))d\tau d\sigma + g(t, s) \equiv (Ax)(t, s),$$

где

$$l(t, s, \tau, \sigma, x(\tau, \sigma)) = e^{\int_{\tau}^t c(u,s)du} k(\tau, s, \sigma, x(\tau, \sigma)),$$
$$g(t, s) = \int_a^t e^{\int_{\tau}^t c(u,s)du} f(\tau, s) d\tau + \varphi(s) e^{\int_{\tau}^t c(u,s)du}$$

Это уравнение имеет единственное непрерывное решение, так как A^n является сжимающим оператором при некотором n . Решение такого уравнения находится методом итераций. При этом интегралы вычисляются с использованием известных квадратурных и кубатурных формул.

С применением этих алгоритмов были разработаны программы на языке программирования python и проведены вычисления на контрольных примерах, показывающие достаточно хорошие результаты. Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

Литература

1. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations /J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. —New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. —Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. —Липецк : ЛГПУ, 2006. —177 с.

4. Калитвин В.А. Об алгоритмах численного решения одного класса уравнений с частными интегралами // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXI» (3–9 мая 2020 г.) / Воронежский государственный университет; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Воронеж: АНО «Наука-Юнипресс», 2020. — С.89-91.

5. Калитвин В.А. О численном решении некоторых классов линейных уравнений с частными интегралами механики сплошных сред // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам [Электронный ресурс]: тез. докл./ Суздаль, 3 – 8 июля 2020 г.; Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН; Владимир. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. –С. 66-67.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ ТЕПЛОМ КОНТАКТЕ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ¹

В.В. Калманович, А.А. Картанов (Калуга,
КГУ им. К.Э. Циолковского)
v572264@yandex.ru

Ранее нами был предложен метод решения задачи теплопроводности в многослойной среде с непрерывными условиями согласования между слоями [1], [2], [3], а также первой краевой задачи при неидеальном тепловом контакте слоев [4]. Метод основывается на совместном использовании матричного метода, метода обобщенных степеней Берса [5] и метода разделения переменных Фурье. Преимущество такого подхода состоит в том, что он позволяет в единой аналитической форме получить решение для процессов переноса в многослойных средах со сдвиговой, осевой или центральной симметрией с любым конечным числом слоев. В данной работе показана возможность использования такого метода для решения задачи теплопроводности с краевыми условиями третьего типа и условиями согласования третьего типа между слоями (т.е. при неидеальном тепловом контакте слоев).

Литература

1. Калманович В.В. О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники / В.В. Калманович, М.А. Степович // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). — 2018. — № 3. — С. 194–201.

2. Калманович В.В. Об использовании метода Фурье для решения одной нестационарной задачи теплопроводности в многослойной среде / В.В. Калманович, Ю.А. Гладышев // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции Воронежская весна математической школы Понtryгинские чтения — XXXI. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2020. — С. 106–107.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

© Калманович В.В., Картанов А.А., 2021

3. Гладышев Ю.А. О применении матричного метода для математического моделирования процессов теплопереноса / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов : Научная книга, 2020. — С. 118–121.

4. Калманович В.В. О возможности использования матричного метода решения задачи теплопроводности в многослойной среде / В.В. Калманович, А.А. Карганов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 140–141.

5. Bers L. On a class of functions defined by partial differential equations / L. Bers, A. Gelbart // Transactions of the American Mathematical Society. — 1944. — Vol. 56. — P. 67–93.

МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ СВОЙСТВАМИ¹

Е.А. Карпов (Воронеж, ВГУ)

karpov.evg98@mail.ru

В настоящее время проектирование несущих конструкций является важнейшей частью строительного процесса. Особенно важно исследование поведения таких конструкций под воздействием нагрузок различной природы. Известно, что одним из базовых элементов любой несущей конструкции является балка. Математическое описание которой, обычно, формализуется в рамках теории Тимошенко [1] или теории Эйлера-Бернулли [1].

В настоящей работе за основу используется модель колебаний балки с использованием теории Эйлера-Бернулли в предположении, что балка жестко закреплена в двух концах и обладает нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} u_{xxxx} + u_{tt} = g(x, t), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(L, t) = u_{xx}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ – отклонение балки от положения равновесия, индексы обозначают частные производные, $g(x, t)$ есть функция характеризующая нагрузку, a^2 – величина пропорциональная плотности

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00158).

© Карпов Е.А., 2021

$\rho(x) = const$ и обратно пропорциональная площади поперечного сечения, $t > 0$ есть время моделирования, L – длина балки.

Также, в работе предлагается модифицированная модель колебаний балки с учетом распределенных гистерезисных свойств, которые возникают во внутренней структуре материала во время деформаций. Учет этих свойств приводит к модификации уравнения (1) в следующей форме:

$$\begin{cases} \Gamma_{xx}[u_{xx}] + u_{tt} = g(x, t), & t > 0, x \in [0, L] \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(L, t) = u_{xx}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

где Γ – гистерезисный преобразователь, который формализуется следуя двум подходам к моделированию гистерезиса: конструктивному и феноменологическому. В рамках конструктивного подхода используется модель Прандтля-Ишлинского [2], в рамках феноменологического – модель Боук-Вена [3].

В настоящей работе приводятся результаты моделирования поведения колебаний классической (1) и гистерезисной (2) балок под воздействием периодической, импульсной и сейсмической (см. Рис.1) нагрузок. В ходе исследования было установлено, что учет гистерезисных свойств приводит к регуляризации динамики колебаний.

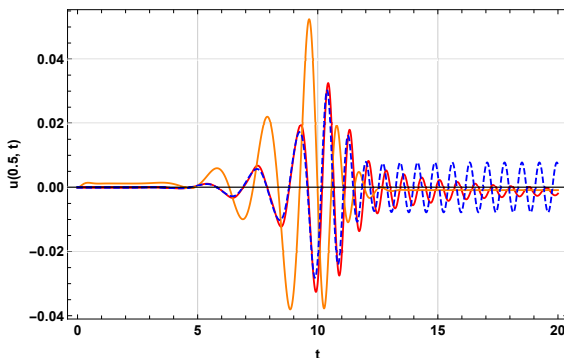


Рис. 1. График отклонения дискретной точки балки с координатами 0.1 от положения равновесия в зависимости от времени (синяя кривая – классическая модель балки (1), оранжевая кривая – гистерезисная модель балки с использованием преобразователя Прандтля-Ишлинского, красная кривая – гистерезисная модель балки с использованием преобразователя Боук-Вена).

зисных свойств приводит к регуляризации динамики колебаний.

Литература

1. Timoshenko, S. History of strength of materials / S. Timoshenko. – McGraw-Hill New York, 1953. – 452 p.
2. Красносельский М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.
3. Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Barsukov A.I. Bouc-Wen model of hysteretic damping / A.M. Solovyov, M.E. Semenov, P.A. Meleshenko, A.I. Barsukov // Procedia Engineering – 2017 – Vol.201 – p. 549-555

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СВОЙСТВ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА

А.А. Катрахова, В.С. Купцов (Воронеж, ВГТУ)
Vckuptsov@rambler.ru

В данной работе для модификационных функций Бесселя первого рода получены некоторые оценки и асимптотики погрешностей.

Рассмотрим модификационные функции Бесселя любого (не обязательно целого) порядка n . Известно, что они могут быть представлены в виде суммы ряда (1).

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m! \Gamma(m+n+1)}, \quad (1)$$

в котором Γ — это функция Эйлера.

Для функции Бесселя целого порядка выполняется соотношение $J_n(-x) = J_n(x)$.

Модификационная функция Бесселя первого порядка (целочисленного неотрицательного индекса n) может быть определена с помощью одного или двух интегральных представлений, которые приводятся заменой переменной интегрирования к одному из видов

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{t \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi \quad \text{или} \quad J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{tx} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева первого рода.

Авторами рассмотрены и доказаны некоторые оценки и асимптотики для функций $J_n(t)$. Перечислим их:

1. При любых положительных t функция $J_n(t)$ положительна и монотонна по индексу:

$$J_n(t) > J_{n+1}(t) > 0.$$

2. При $t > 0$ справедлива оценка

$$J_n(t) < J_0(t) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^t}{\sqrt{t}}.$$

3. При любых положительных t и α справедлива оценка.

$$J_n(t) \leq \frac{2\alpha^n}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{t(\alpha+\alpha^{-1})/2}}{\sqrt{t(\alpha+\alpha^{-1})/2}}.$$

4. Для любых n при $t \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$J_n(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} - \frac{(n^2 - \frac{1}{4})e^t}{2t\sqrt{2\pi t}} + (n+1)^4 e^t O(t^{-n-5/2}),$$

где $O(t^{-n-5/2})$ — величина, которая стремится к нулю равномерно по n то есть с некоторой абсолютной постоянной $C > 0$: $[O(t^{-n-5/2})] \leq Ct^{-n-5/2}$.

ТОЧНЫЕ И ε -РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В.И. Качалов (Москва, НИУ «МЭИ»)

vikachalov@rambler.ru

Известные в математике теоремы Пуанкаре о разложении [1, 2] гарантируют голоморфную зависимость от малого параметра решений нелинейных эволюционных задач вида

$$\begin{aligned} \partial_t u &= F(t, u, \varepsilon), \\ u|_{t=0} &= u^0, \end{aligned} \tag{1}$$

при условии, что оператор F , действующий в банаховом пространстве E , является ограниченным и голоморфным образом зависит от своих переменных. Однако, в большинстве задач математической

физики указанный оператор является неограниченным, что значительно усложняет исследование зависимости решения уравнения от параметра ε .

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Au + \varepsilon B(u, Hu), \quad t \in (0, T], \\ u|_{t=0} &= u^0 \in E, \end{aligned} \quad (2)$$

где A — замкнутый неограниченный оператор с плотной в E областью определения D_A ; $B(u, v)$ — ограниченный билинейный оператор, действующий из $E \times E$ в E ; оператор H может быть как ограниченным, так и неограниченным.

В соответствии с методом малого параметра [3] будем искать решение задачи (2) в виде ряда по степеням ε :

$$u(t, \varepsilon) \simeq u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots + \varepsilon^n u_n(t) + \dots \quad (3)$$

Определение. Если ряд (3) сходится равномерно на отрезке $[0, T]$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, то его сумму будем называть ε -регулярным решением начальной задачи (2) и обозначать через $u^r(t, \varepsilon)$ (в отличие от точного решения $u(t, \varepsilon)$).

Теорема 1. Если A — инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы, а оператор H ограничен, то задача Коши (2) имеет ε -регулярное решение, совпадающее с ее единственным точным решением: $u^r(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon)$.

Следующая теорема дает возможность построения приближенных решений уравнения (2), когда оператор H является неограниченным [4].

Теорема 2. Пусть в уравнении (2) оператор H является неограниченным замкнутым с областью определения $D_H \supset D_A$ и пусть, наряду с этим уравнением, задано уравнение

$$\begin{aligned} \partial_t v &= Av + \varepsilon B(v, Gv), \quad t \in (0, T], \\ v|_{t=0} &= v^0, \end{aligned} \quad (4)$$

в котором оператор G является ограниченным. Тогда, если $u(t, \varepsilon)$ — точное решение задачи Коши (2), то существует константа $C_\varepsilon > 0$ такая, что $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon)\| \leq C_\varepsilon \varepsilon \|(H - G)u(t, \varepsilon)\|, \quad (5)$$

где $v(t, \varepsilon)$ — решение задачи (4).

Из оценки (5) следует, что если последовательность ограниченных операторов G_m сильно сходится к оператору H , то при достаточно малых ε решение $u(t, \varepsilon)$ будет мало отличаться от решений $v_m(t, \varepsilon)$ задач (4) с $G = G_m$.

Литература

1. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибииков. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. — 232 с.
2. Треногин В.А. Фундаментальный анализ / В.А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 496 с.
3. Ломов С.А. Основы математической теории пограничного слоя / С.А. Ломов, И.С. Ломов — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2011. — 456 с.
4. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т. 2 / Р. Рихтмайер. — М. : Мир, 1984. — 381 с.

ДИНАМИКА ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ МОДЕЛИ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ¹

А.А. Кащенко (Ярославль, ЯрГУ)

a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Рассмотрим математическую модель трех связанных осцилляторов с нелинейной запаздывающей обратной связью

$$\begin{cases} \dot{u}_j + u_j = \lambda F(u_j(t - T)) + \gamma(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \\ u_0 \equiv u_3, \quad u_4 \equiv u_1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь u_j ($j = 1, 2, 3$) — скалярные переменные, параметры λ и T положительны, параметр $\gamma > -\frac{1}{3}$ отличен от нуля, нелинейная гладкая функция F является финитной: она тождественно равняется нулю вне отрезка $[-p, p]$ (где $p > 0$ — некоторая константа).

Работа посвящена изучению нелинейной динамики модели (1) в предположении, что параметр λ достаточно велик. Мы строим асимптотику решений этой модели при $\lambda \rightarrow +\infty$ с начальными условиями из специального множества (являющегося подмножеством фазового пространства $C([-T, 0]; \mathbb{R}^3)$) в случаях положительной ($\gamma > 0$) и отрицательной ($\gamma < 0$) связи между осцилляторами.

При $\gamma > 0$ мы доказываем, что в модели (1), как и в случае двух связанных осцилляторов [1], существует момент времени, после

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-1028.2020.1.

© Кащенко А.А., 2021

которого главные части асимптотики всех осцилляторов совпадают. Мы интерпретируем это как синхронизацию осцилляторов.

При $-\frac{1}{3} < \gamma < 0$ мы находим главную часть оператора сдвига по траекториям в терминах трехмерного отображения, действующего на параметрах, определяющих начальные условия. Мы исследуем его динамику и находим условия существования в исходной системе (1) релаксационных периодических решений и нерегулярных релаксационных решений.

Литература

1. Kashchenko A.A. Dependence of Dynamics of a System of Two Coupled Generators with Delayed Feedback on the Sign of Coupling / A.A. Kashchenko // Mathematics. — 2020. — V. 8, № 10. — P. 1790.

КЛАСС МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ КВАЗИРЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С АПОСТЕРИОРНЫМ КРИТЕРИЕМ ОСТАНОВА ИТЕРАЦИЙ¹

М.М. Кокурин (Йошкар-Ола, МарГУ)

kokurin@nextmail.ru

Изучаются нелинейные операторные уравнения вида $F(x) = f$ относительно $x \in X$, где $f \in Y$ и $F : X \rightarrow Y$ — дифференцируемый по Фреше оператор в гильбертовых пространствах X, Y . Поставим задачу приближённого нахождения квазирешения данного уравнения, т.е. элемента $x^* \in X$, доставляющего локальный минимум функционалу $\|F(x) - f\|_Y$. В общем случае такая задача некорректно поставлена. Мы предполагаем, что вместо точного элемента $f \in Y$ известно его приближение \tilde{f} , $\|\tilde{f} - f\|_Y \leq \delta$ с уровнем погрешности $\delta > 0$. Потребуем, чтобы производная Фреше оператора F удовлетворяла условию Липшица в окрестности квазирешения x^* , оператор $F'(x^*)$ был ненулевым и имел замкнутый образ, а искомое квазирешение удовлетворяло условию истокорпредставимости $x^* - \xi = F'^*(x^*)w$, $w \in Y$ с известным элементом $\xi \in X$.

Для нахождения квазирешения предлагается использовать итеративно регуляризованные методы типа Гаусса–Ньютона, имеющие вид

$$x_{n+1} = \xi - \Theta([F'^*(x_n)F'(x_n)]^2, \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n) \cdot F'^*(x_n)[F(x_n) - \tilde{f} - F'(x_n)(x_n - \xi)]. \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 20-11-20085).
© Кокурин М.М., 2021

Здесь используется язык исчисления самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. На порождающую функцию $\Theta(\lambda, \alpha)$ накладывается ряд ограничений, которым, в частности, удовлетворяет функция $\Theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1}$. Последовательность параметров $\{\alpha_n\}$ должна удовлетворять условиям

$$0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Предлагается следующий апостериорный критерий останова итераций (1). Потребуем, чтобы неравенство $\|F'^*(x_0)(F(x_0) - \tilde{f})\|_X \geq \tau \delta$ выполнялось с некоторой константой τ , превышающей максимальное значение нормы $\|F(x)\|_Y$ в окрестности искомого квазирешения x^* . Определим момент останова $N(\delta, \tilde{f})$ итераций (1) формулой

$$\begin{aligned} & \|F'^*(x_{N(\delta, \tilde{f})})(F(x_{N(\delta, \tilde{f})}) - \tilde{f})\|_X < \tau \delta \leq \\ & \leq \|F'^*(x_n)(F(x_n) - \tilde{f})\|_X, 0 \leq n \leq N(\delta, \tilde{f}) - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

При выполнении ряда дополнительных условий технического характера доказано, что номер $N(\delta, \tilde{f})$ корректно определён и для метода (1), (2) справедлива оценка точности $\|x_{N(\delta, \tilde{f})} - x^*\|_X = O(\delta)$.

Литература

1. Бакушинский А.Б. Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений / А.Б. Бакушинский, М.Ю. Кокурин. — М. : Едиториал УРСС, 2002. — 312 с.

2. Кокурин М.Ю. Итеративно регуляризованные методы для нерегулярных нелинейных операторных уравнений с нормально разрешимой производной в решении / М.Ю. Кокурин. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56. — С. 1543–1555.

О КЛАСТЕРИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРАМИ¹

М.Ю. Кокурин (Йошкар-Ола, МарГУ)

kokurinm@yandex.ru

Исследуются множества решений нелинейных уравнений

$$F(x) \triangleq Ax + G(x) = f, x \in D, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20–11–20085).

© Кокурин М.Ю., 2021

где $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 – гильбертовы пространства и

$$G(0) = 0; \|G(x) - G(y)\|_{H_2} \leq L(\|x\|_{H_1} + \|y\|_{H_1})\|x - y\|_{H_1}, \quad x, y \in D.$$

Решение (1) ищется в классе

$$D \subset B_{d, \Delta, p} = \{(A^*A)^p v + w : \|v\|_{H_1} \leq d, \|w\|_{H_1} \leq \Delta\}, \quad p \geq \frac{1}{2}.$$

В случае $f = 0$ имеет место

Теорема 1. 1) Пусть $p = 1/2$, $Ld < (1 - \kappa)^2$, $\kappa \in (0, 1)$, тогда

$$\{x \in D : \|x\|_{H_1} \geq \Delta/\kappa\} \cap F^{-1}(0) = \emptyset.$$

2) Если $p > 1/2$, то $\{x \in D : \Delta/\kappa \leq \|x\|_{H_1} < R\} \cap F^{-1}(0) = \emptyset$,

$$R = \left(\frac{(1 - \kappa)^{(2p+1)/2p}}{Ld^{1/(2p)}} \right)^{2p/(2p-1)}.$$

Обобщения на случай $f \neq 0$ формулируются в терминах ρ -близких решений, т.е. таких решений x, y , что

$$\|x - y\|_{H_1} \leq \rho \max\{\|x\|_{H_1}, \|y\|_{H_1}\}, \quad \rho \in (0, 1).$$

Устанавливается, что при определенных дополнительных условиях решения уравнения (1) в классе D образуют кластер из ρ -близких элементов H_1 . Аналогичные результаты установлены для стационарных точек функционала невязки $\|F(x) - \tilde{f}\|_{H_2}^2$ на множестве D , $\|\tilde{f} - f\|_{H_2} \leq \delta$.

Литература

1. Kokurin M.Yu. On solution sets of nonlinear equations with nonsmooth operators in Hilbert space and the quasi-solution method // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2021.

ИТЕРАТИВНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ МЕТОД ГАУССА-НЬЮТОНА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ИОНОСФЕРЫ¹

М.Ю. Кокурин, А.Е. Недопёкин (Йошкар-Ола, МарГУ)
kokurinm@yandex.ru, agasfer911@yandex.ru

В данной работе рассмотрена задача реконструкции вертикального профиля электронной концентрации ионосферы по результатам измерения набега фазы зондирующего сигнала с движущегося искусственного спутника Земли. Ионосфера — верхняя часть атмосферы на высотах 60-2000 км, состоящая из ионизированного газа. Свободные электроны являются главными носителями зарядов в ионосфере и влияют на прохождение через ионосферу электромагнитного излучения. Концентрация свободных электронов \mathcal{N} — один из важнейших параметров ионосферы. Одной из задач ионосферной томографии является восстановление высотного профиля концентрации электронов. для этого используют сигналы систем спутниковой навигации GPS и GLONASS.

Пусть c_0 и $c(z)$ скорости света в вакууме и в среде соответственно, отношение $n(z) = c(z)/c_0$ — коэффициент рефракции, зависящий от высоты z над поверхностью Земли. Для сигнала частоты $\nu = 15.42$ МГц был рассмотрен коэффициент рефракции как величина, зависящая только от электростатической силы, что дает представление [1]:

$$n(z) = \sqrt{1 - \varepsilon \mathcal{N}(z)}, \quad \varepsilon = \frac{80.8}{\nu^2}. \quad (1)$$

Для простоты было принято, что движущийся спутник и приемный пункт находятся в одной плоскости (x, z) , приемник находится в точке $(0, 0)$. Введем обозначение

$$\mu(z) = \frac{1}{n^2(z)} - 1, \quad (2)$$

тогда с учетом искривления радиолуча получаем, что фазовый набег сигнала Ψ , идущего от спутника с направления угла α определяется так:

$$\Psi(\alpha) = \int_0^h \frac{\mu(z) dz}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}}. \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20085).
© Кокурин М.Ю., Недопёкин А.Е., 2021

Предполагая, что угол α меняет значения на отрезке $[a_1, a_2]$, H_0 и H — соответственно нижняя и верхняя границы высот такие, что ниже H_0 и выше H данные дают незначительный вклад в интеграл, можно получить нелинейное интегральное уравнение

$$\int_{H_0}^H \frac{\mu(z) dz}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}} = \Psi \left(H_0 \operatorname{ctg} \alpha + \cos \alpha \int_{H_0}^H \frac{dz}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}} \right), \quad \alpha \in [a_1, a_2]. \quad (4)$$

Уравнение (4) является основным объектом теоретического и численного анализа этой работы.

Установлено, что уравнение имеет неединственное решение. Для аппроксимации решения применяется итеративно регуляризованный метод Гаусса–Ньютона с проектированием на множество, определяемое априорными ограничениями на решение. Для равномерной сетки из N узлов априорные ограничения \mathcal{D} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{(\mu_0, \dots, \mu_N) : p(z_i) \leq \mu_i \leq q(z_i), 0 \leq i \leq N; \\ \mu_{i-1} - 2\mu_i + \mu_{i+1} &\geq b_0 h_z^2, 1 \leq i \leq K_1; \mu_{i+1} - \mu_i \geq b_1 h_z, K_1 \leq i \leq K_2; \\ \mu_{i-1} - 2\mu_i + \mu_{i+1} &\leq b_2 h_z^2, K_2 \leq i \leq K_3; \\ \mu_{i+1} - \mu_i &\leq b_3 h_z, K_3 \leq i \leq K_4, \\ \mu_{i-1} - 2\mu_i + \mu_{i+1} &\geq b_4 h_z^2, K_4 \leq i \leq K_5 - 1\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $H_j = H_0 + K_j h_z$, $K_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq 4$. Определяемое (5) множество есть выпуклый многогранник в \mathbb{R}^{N+1} .

При построении модельной функции наблюдения $\Phi(\chi)$ был использован профиль $\mu^*(z)$, полученный на основе международной справочной модели ионосферы IRI-2016. При численном моделировании погрешность вычисления высоты максимума электронной концентрации (км) составила около 9% во всех случаях, точность определения концентрации в точке максимума — до 2% в лучшем случае.

Литература

1. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере /К. Дэвис. — М. : Мир, 1973. — 502 с.

КВАРТИЧНЫЕ БИНАРНЫЕ ФОРМЫ

И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)

kolinna@inbox.ru

Тема работы связана с задачей о бифуркации критических орбит из изолированной критической точки или из изолированной критической орбиты, вызванной деформацией функционала с непрерывной симметрией. Для ее решения часто используются лагранжианы с матричными параметрами порядка. Такие функционалы, как правило, обладают симметрией относительно ортогональных действий компактных групп Ли, вследствие чего их экстремали появляются в виде континуальных семейств (критических орбит). Изучение бифуркаций критических орбит и их свойств можно осуществлять на основе метода конечномерных редукций с использованием методов теории особенностей гладких функций. Примером вариационной задачи с непрерывной симметрией, в которой удается провести достаточно полный анализ локальных бифуркационных эффектов, является уравнение типа Гинзбурга - Ландау с одномерной пространственной переменной и симметричной матрицей порядка. Ритцевские аппроксимации функционала действия V , отвечающего такому уравнению, хорошо наследуют топологические свойства функционала V , а их симметричные свойства приводят к относительно простым алгебраическим формам ключевых функций, позволяющим определять все расклады ветвей бифурцирующих морсовских критических орбит и метаморфозы многообразий уровней ключевых функций. Первым необходимым этапом в изучении таких функционалов методом конечномерных редукций является описание орбит и стационарных подгрупп в пространствах ключевых параметров, снабженных каноническими структурами G -пространств, где G - группа ортогональных матриц. Исследование локальных особенностей критических орбит приводит к необходимости конструктивно-аналитического описания трансверселей к орбитам или, в других терминах, построения версальных деформаций элементов орбит. В практических задачах это сводится к построению ортонормированных базисных систем в ортогональных дополнениях к касательным подпространствам вырожденных критических орбит (в пространствах ключевых параметров). При удачном выборе такого базиса ключевая функция, суженная на нормаль, приобретает "простой" вид (в координатах по выбранному базису), что позволяет эффективно вычислять ветви бифурцирующих морсовских орбит. В на-

стоящем исследовании были использованы элементы теории групп Ли и теории G-пространств для изучения множества невырожденных квартичных бинарных форм: определены нормальные квартичные формы и изучены орбиты квартичных форм, возникающие при действии группы линейных замен переменных.

Литература

1. Крафт Х. "Геометрические методы в теории инвариантов".
2. Желобенко Д. П. "Компактные группы Ли и их представления".
3. Олвер П. "Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям".
4. Арнольд В. И. "Особенности дифференцируемых отображений".

КОНТРОЛЬ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКОГО ДЕЛИТЕЛЯ МОЩНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЭТАЛОНА

А.И. Колпаков (Москва, ФГУП "ВНИИОФИ"),

А.М. Райцин (Москва, МТУСИ)

1978fox@mail.ru, arcadiyram@rambler.ru

В оптико-электронных эталонных комплексах с применением лазеров часто используются оптические делители (ОД) мощности излучения, позволяющие по небольшой величине отражённого от него излучения измерить мощность источника [1-2]. При этом для обеспечения высокой точности измерений необходим контроль состояния ОД, осуществляемый вычислением контрольного параметра, по изменению которого в реальном масштабе времени можно отслеживать стабильность характеристик ОД.

На пути пучка отражённого от передней грани ОД, выполненного в виде клина, размещается эталонный преобразователь (ЭП), на пути пучка, отражённого от задней грани ОД, устанавливается дополнительное средство измерений (ДСИ) мощности излучения, в пучок, проходящий через ОД, устанавливается калибруемое средство измерений [2]. Для определения контрольного параметра $\hat{K}_{\text{кп}}(i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ в цикле из n измерений, в процессе калибровки измеряются мощности излучения ДСИ $P_{\text{дси}}(i)$ и ЭП $P_{\text{эп}}(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и

вычисляются значения контрольного параметра как отношение текущих показаний ЭП и ДСИ

$$\hat{K}_{\text{кп}}(i) = \frac{P_{\text{эп}}(i)}{P_{\text{дси}}(i)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

В результате действия возможных дестабилизирующих факторов, происходящих во время калибровки средства измерений, могут измениться коэффициенты отражения от передней и задней граней ОД, что приведёт к изменению коэффициентов деления ОД и контрольного параметра. Одновременно с изменением коэффициентов отражения изменяется и доверительный интервал значений контрольного параметра, поэтому в каждом цикле измерений его необходимо уточнять. Выход контрольного параметра в i -ом измерении за пределы, определяемые доверительным интервалом с заданной доверительной вероятностью, рассматривается как нарушение достоверности калибровки средства измерений и требует её приостановки до выяснения причин.

В работе определена приближённая ширина доверительного интервала $d_{\text{кп}}$ заданной вероятности α для контрольного параметра, представляющего отношение коррелированных нормальных случайных величин η_1 и η_2 с математическими ожиданиями $M(\eta_1)$, $M(\eta_2)$ и дисперсиями $\sigma^2(\eta_1)$, $\sigma^2(\eta_2)$, $\eta_1 = P_{\text{эп}}(i)$, $\eta_2 = P_{\text{дси}}(i)$

$$d_{\text{кп}} \approx \frac{2zK_{\text{отр}}}{K_{\text{отр1}}} \sqrt{\delta_{\text{эп}}^2 + \delta_{\text{дси}}^2},$$

где $K_{\text{отр}}$ - коэффициент отражения излучения от передней грани ОД, $K_{\text{отр1}}$ - коэффициент отражения излучения от задней грани ОД, z - решение уравнения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt = \frac{\alpha}{2},$$

$\delta_{\text{эп}}^2, \delta_{\text{дси}}^2$ - относительные дисперсии случайных погрешностей измерения мощности ЭП и ДСИ соответственно.

Определено относительное изменение ширины доверительного интервала контрольного параметра от изменения коэффициентов отражения от передней и задней граней ОД $\Delta K_{\text{отр}}, \Delta K_{\text{отр1}}$ соответственно

$$\delta_{\text{кп}} \approx \left| \frac{\Delta K_{\text{отр}}}{K_{\text{отр}}} - \frac{\Delta K_{\text{отр1}}}{K_{\text{отр1}}} \right|$$

Литература

1. Колпаков А.И. Определение характеристик оптического делителя лазерного излучения в информационно измерительной системе/А.И.Колпаков, А.М.Райцин//Материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения - XXXI (3-9 мая 2020 г.) - Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020 - С.112-113.

2. Райцин А.М. Способ калибровки/поверки средств измерений мощности лазерного излучения /Райцин А.М., Улановский М.В. // Патент RU 2687303 С1, опубл. 13.05.2019, бюл. №14.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ДАННЫМИ. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ЧАСТИЧНЫМ АСИМПТОТИКАМ РЕШЕНИЙ¹

Э.В. Кораблина, В.Б. Левенштам (Ростов-на-Дону, ЮФУ;
Москва, МИАН)

ellakorablina1998@gmail.com, vlevenshtam@yandex.ru

Рассматривается задача Коши для одномерного волнового уравнения с младшим членом. Младший коэффициент и правая часть уравнения осциллируют по времени с большой частотой ω , причём амплитуда младшего коэффициента пропорциональна ω^{-1} , а правая часть не известна. Поставлена и решена неклассическая обратная задача о её восстановлении по заданной в некоторой точке пространства трёхчленной асимптотике решения (на самом деле, задается принципиально меньше, о чем сказано ниже).

В докладе используется подход к постановке и решению обратных коэффициентных высокочастотных задач, лежащий на стыке двух дисциплин – асимптотические методы и обратные задачи. В связи с этим в работе решение обратной задачи разбито на две части (этапы), относящиеся к соответствующим дисциплинам, и нужно следить за согласованностью (например, в смысле гладкости функций) этих частей. Специфика используемого подхода в дополнение к уже сказанному состоит в следующем: в условии переопределения участвует не точное решение, как в классике, а лишь его частичная асимптотика, длина которой вычисляется на первом этапе решения обратной задачи; при этом необходимая для условия переопределения информация задаётся не для всех коэффициентов этой

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20141)

© Кораблина Э.В. , Левенштам В.Б., 2021

асимптотики, а лишь для некоторых "базисных" (нужные сведения для остальных коэффициентов однозначно определяются из "базисных"). Поставленная в докладе обратная задача разрешима однозначно.

В заключение отметим, что классическая теория обратных коэффициентов задач (без высокочастотных слагаемых) изложена в большом числе монографий (см., например, [1,2]) и статей.

Литература

1. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. Издательство Московского университета, 1994.

2. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, НЕ ДОПУСКАЮЩАЯ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В.В. Корнев, А.П. Хромов (Саратов, СГУ)

KhromovAP@sgu.ru

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x, t)u(x, t), \quad x, t \in [0, 1] \times [0, \infty) \quad (1)$$

при условиях

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

где все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные.

Предположим, что

$$\varphi(x), \varphi'(x) \text{ — абсолютно непрерывные,} \quad (4)$$

причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$,

$$q(x, t) = q_1(x)q_2(x, t), \quad q_1(x) \in L[0, 1]; \quad q_2(x, t), q'_{2t}(x, t) \in C(Q_T), \quad (5)$$

$Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ при любом $T > 0$.

Считаем, что $q_2(x, t) \neq 0$. Поэтому задача (1)–(3) не допускает разделения переменных.

В случае, когда $q_1(x)$ — непрерывная, $q_2(x, t)$ — гладкая и $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ при условии (4), в статье Гаршина С.В. и Прядиева В.Л.

[1] получено классическое решение задачи (1)–(3) методом Римана. Здесь мы, используя расходящиеся ряды, получим аналогичный результат для нашего, более общего, случая.

Обозначим через $\tilde{\varphi}(x)$ нечетное, 2-периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ с $[0, 1]$ на всю ось $(-\infty, \infty)$.

В случае $q_2(x) = 1$ и $\varphi(x) \in L[0, 1]$ в [2] с помощью расходящихся (в понимании Эйлера) рядов был построен сходящийся ряд

$$A(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_m(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{m-1}(\eta, \tau) d\eta, \quad m \geq 1, \quad (7)$$

$$f_m(x, t) = -q(x)a_m(x, t), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

причем $\tilde{f}_{m-1}(\eta, \tau)$ в (7) есть указанное выше продолжение $f_{m-1}(\eta, \tau)$ по η с $[0, 1]$ на всю ось (τ — параметр).

Теперь мы будем рассматривать ряд $A(x, t)$, в котором в качестве $f_m(x, t)$ в (8) берем

$$f_m(x, t) = -q(x, t)a_m(x, t), \quad (9)$$

считая, что $q(x, t) = q_1(x)q_2(x, t)$, $q_1(x) \in L[0, 1]$, $q_2(x, t) \in C(Q_T)$ при любом $T > 0$ (обозначение $f_m(x, t)$ оставляем прежним). При таких $q(x, t)$ имеют место следующие результаты.

Лемма 1. Пусть $x, t \in Q_T$ и m — наименьшее натуральное число, такое, что $T \leq m$. Тогда справедливы оценки

$$|a_n(x, t)| \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2} \right)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $M_1 = \|a_1(x, t)\|_{C(Q_T)}$, $M_2 = (2m+1)\|q_1\|_1\|q_2(x, t)\|_{C(Q_T)}$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0, 1]$).

Теорема 1. Ряд (6) сходится абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ при любом $T > 0$.

Рассмотрим еще следующую неоднородную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty), \quad (11)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0, \quad (12)$$

Теорема 2. Пусть $f(x, t) = f_1(x)f_2(x, t)$, где $f_1(x) \in L[0, 1]$, $f_2(x, t)$ и $f'_{2t}(x, t)$ принадлежат $C(Q_T)$ при любом $T > 0$. Тогда классическое решение задачи (11), (12) существует и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta$$

(уравнение (11) удовлетворяется почти всюду).

Теорема 3. Если $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (4), то $a_0(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $q(x, t) = 0$.

Введем в рассмотрение оператор $B : C(Q_T) \rightarrow C(Q_T)$, действующий по формуле

$$Bv = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{\psi}(\eta, \tau) d\eta, \quad (13)$$

где $\psi(\eta, \tau) = q(\eta, \tau)v(\eta, \tau)$.

Лемма 2. Оператор B является линейным и ограниченным.

Лемма 3. Если $\varphi(x) \in C[0, 1]$, то имеет место формула

$$A(x, t) = a_0(x, t) + B(A(x, t)).$$

Теорема 4. При условиях (4)–(5) функция $w(x, t) = B(A(x, t))$ является классическим решением задачи (11)–(12), в которой

$$f(x, t) = -q(x, t)A(x, t).$$

Теорема 5. При выполнении условий (4) и (5) классическое решение задачи (1)–(3) существует и находится по формуле

$$u(x, t) = A(x, t).$$

Отметим, что $A(x, t)$ из теоремы 1 является обобщенным решением задачи (1)–(3), а именно, имеет место

Теорема 6. Пусть $\varphi(x) \in L[0, 1]$, $\varphi_h(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 5, $u_h(x, t)$ — соответствующие классические решения задачи (1)–(3). Тогда если $\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi_h - \varphi\|_1 = 0$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h(x, t) - A(x, t)\|_{L(Q_T)} = 0.$$

Литература

1. Гаршин С.В., Прядиев В.Л. Неулучшаемые условия существования и непрерывности производных второго порядка у решения характеристической задачи для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными / С.В. Гаршин, В.Л. Прядиев // Сб. «Черноземный альманах научных исследований. Сер. Фундаментальная математика». Спец. выпуск. — Воронеж : Изд-во ООО «Альбион», 2005. — № 1 (1). — С. 83–98.

2. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы междунаро. Саратовской зимн. шк. (Саратов, 28 янв. – 1 февр. 2020). — Саратов : Изд-во «Научная книга», 2020. — С. 433–439.

ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Коровина (Москва, МГУ)

betelgeuser@yandex.ru

Работа посвящена проблеме построения асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек. Эта проблема была сформулирована в работах Пуанкаре [1], [2]. А именно рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с голоморфными коэффициентами

$$b_n(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^n u(r) + b_{n-1}(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1} u(r) + \dots + b_i(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^i u(r) + \dots + b_0(r) u(r) = 0, \quad (1)$$

здесь $b_i(r)$ являются голоморфными функциями.

Если коэффициент при старшей производной $b_n(r)$ обращается в ноль в некоторой точке, без ограничения общности можно считать, что эта точка $r = 0$, то уравнение (1), вообще говоря, имеет особенность в нуле. В этом случае ноль может быть регулярной или иррегулярной особой точкой. Проблема представления асимптотики решения уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки впервые была сформулирована А. Пуанкаре. Им было показано, что решение уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки в

некоторых случаях точки может разлагаться в асимптотический ряд и была предпринята попытка суммировать этот ряд с помощью интегрального преобразования Лапласа. При этом использовался частный случай асимптотического разложения решения в окрестности бесконечно удаленной особой точки, полученного в работе Томе [3].

Уравнение (1) может быть сведено к уравнению вида

$$\hat{H}u = H \left(r, -r^k \frac{d}{dr} \right) u = 0, \quad (2)$$

где \hat{H} — дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами

$$H(r, p) = \sum_{i=0}^n a_i(r) p^i.$$

Здесь $a_i(r)$ — голоморфные функции, причем $a_n(0) \neq 0$ и получена формула для вычисления минимального значения k . В зависимости от этого значения k можно разбить уравнения на три типа, каждому из которых соответствует свой тип асимптотик. К первому типу отнесем те уравнения, для которых $k=0$. В этом случае мы имеем невырожденные дифференциальные уравнения не имеющие особенностей в нуле. Их решения являются голоморфными функциями. В случае $k=1$ уравнения являются вырожденными, эти уравнения сводятся к уравнениям с регулярными особенностями а сами уравнения называются уравнениями фуксова типа. Как известно, асимптотики решения в нуле являются конормальными. Они представимы в виде суммы слагаемых вида $(\ln r)^m r^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$, где ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ являются асимптотическими. К третьему типу относятся те уравнения, для которых $k>1$. Это случай уравнения с иррегулярными особенностями. Эти уравнения называются уравнениями нефуксова типа. Разделим уравнения нефуксова типа на два класса, к первому классу отнесем уравнения такие, что многочлен $H(0, p)$, который называется основным символом, имеет только простые корни. Назовем такие уравнения нефуксовыми уравнениями первого типа. Ко второму классу относятся остальные уравнения, то есть уравнения нефуксова типа такие, что основной символ имеет не только простые, но и кратные корни. Назовем их нефуксовыми уравнениями второго типа.

Случай нефуксовых уравнений первого типа для линейных уравнений и их систем рассматриваются, например, в работе [4], а затем во многих классических учебниках.

В этих работах построены асимптотические разложения решений нефуксовых уравнения первого типа, они были получены в виде произведений соответствующих экспонент на расходящиеся степенные ряды, а именно

$$\sum_{j=1}^n e^{\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}}} r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i. \quad (3)$$

где α_i , $i = 1, \dots, n$ — корни полинома $H_0(p)$ и σ_j и a_i^k — некоторые комплексные числа. Назовем эти асимптотики нефуксовыми асимптотиками первого типа.

Однако, в случае, если асимптотическое разложение

$$u \approx u_1 + u_2 + \dots + u_n = e^{\lambda_1/r} r^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_1^k r^k + e^{\lambda_2/r} r^{\sigma_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_2^k r^k + \dots + e^{\lambda_n/r} r^{\sigma_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k r^k \quad (4)$$

имеет, по крайней мере, два слагаемых, отвечающих значениям λ_1 и λ_2 с различными вещественными частями (для определенности будем считать, что $\text{Re} \lambda_1 > \text{Re} \lambda_2$), возникает существенная трудность при интерпретации полученного разложения. Дело в том, что все слагаемые входящие в первый элемент, отвечающий значению λ_1 (доминантный элемент) имеют больший порядок при $r > 0$, чем любое из слагаемых второго (рецессивного) элемента. Поэтому для интерпретации разложения (4) необходимо просуммировать (вообще говоря, расходящийся) ряд, отвечающий доминантному элементу. Рассмотрение рецессивных компонент разложения решения u уравнения (2) важно, в частности, для построения равномерных асимптотик решений в комплексном случае, когда точка r движется по комплексной плоскости и роли доминантной и рецессивной компонент разложения могут меняться местами. Иными словами, плоскость условно делится на секторы, в которых одна из компонент является главной, а другая рецессивной, а при переходе из одного сектора в другой имеет место смена лидерства (рецессивная становится главной и наоборот). Однако, в окрестности границ этих секторов несколько компонент имеют равный порядок и ни одной из них нельзя пренебречь. Это явление возникает, например, при рассмотрении примера Эйлера, а также при построении асимптотики решения для задачи (1) и вообще для всех нефуксовых асимптотик. Это приводит к тому, что исследование асимптотических разложений решений уравнения (1) требует введения регулярного метода суммирования расходящихся

рядов для построения равномерных асимптотик решений по переменной r , то есть представляющие асимптотические разложения не только в определенных секторах, но и во всей окрестности рассматриваемой особой точки.

В конце 80-х годов прошлого века был получен аппарат пригодный для суммирования подобных рядов, основанный на преобразовании Лапласа-Бореля и понятии ресургентной функции, впервые введенном французским математиком Ж. Экалем .

Благодаря этим методам в работах [5], [6], [7] были построены равномерные асимптотики решений для случая, когда корни старшего символа $H_0(p) = H(0, p)$ являются простыми.

ТЕОРЕМА. *Решение уравнения (2) является ресургентной функцией. Если полином $H_0(p)$ имеет корни первого порядка в точках p_1, \dots, p_m , тогда асимптотика решения однородного уравнения будет иметь вид*

$$u(r) \approx \sum_{j=0}^m e^{\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}} r^{\sigma_j}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i,$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$.

Примером нефуксовой иррегулярной особенности 2-го типа является особенность в окрестности бесконечности решения уравнения

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \dots + a_0(x) u(x) = 0 \quad (5)$$

здесь коэффициенты $a_i(x)$ регулярны на бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга $|x| > a$, что функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j^i}{x^j}$.

Это уравнение путем замены $x = \frac{1}{r}$ сводится к уравнению с вырождением типа клюва второго порядка в нуле.

Здесь мы сформулируем теорему для случая, когда основной символ дифференциального оператора имеет один корень. Без ограничения общности будем считать, что этот корень находится в нуле. Перепишем уравнение (5) в виде

$$\begin{aligned} & (-r^2 \frac{d}{dr})^n u + b_0 r^m (-r^2 \frac{d}{dr})^k u + b_1 r^{m+1} (-r^2 \frac{d}{dr})^{k-1} u + \\ & b_2 r^{m+2} (-r^2 \frac{d}{dr})^{k-2} u + \dots + b_{k+1} r^{m+k} u + \\ & + \sum_{i=1}^m r^i \sum_{j=h_i}^{n-1} b_j^i (-r^2 \frac{d}{dr})^j u + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i(r) (-r^2 \frac{d}{dr})^i u = 0 \end{aligned}$$

Здесь $i + h_i > m + k$, через b_i, b_j^i -соответствующие числа, $a^i(r)$ -голоморфные функции. Число $h = m + k$ называется индексом сингулярности уравнения (5).

Рассмотрим два случая. В первом случае выполнено неравенство

$$h_i + i - h \geq (m - i) \frac{n - k - m}{m} \quad (6)$$

А во втором случае

$$h_i + i - h < (m - i) \frac{n - k - m}{m}$$

Первый случай подробно рассмотрен в работе [8].

ТЕОРЕМА. Пусть выполнено неравенство (6) тогда любая асимптотика решения уравнения (1) в пространстве функций экспоненциального роста в окрестности бесконечности имеет вид

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{\sigma_j} \sum_l A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},$$

где $\alpha_{n-k-m}^j, j = 1, \dots, n-k$ — корни полинома $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$.

Пусть неравенство (6) не выполнено, тогда любая асимптотика решения имеет вид

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^v \exp\left(\sum_{l=1}^{n-k-m-\beta_1} \beta_l^j x^{\frac{j}{n-k-m-\beta_1+l}}\right) x^{\sigma_j^1} \sum_{j=0}^{\infty} A_j^j x^{-\frac{j}{n-k-m-\beta_1+l}} + \\ + \sum_{j=1}^{\beta_1+m-i} \exp\left(\sum_{t=1}^{\beta_1} \alpha_t^j x^{\frac{t}{m-i+\beta_1}}\right) x^{\sigma_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} B_l^j x^{-\frac{l}{m-i+\beta_1}} + \\ + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},$$

Здесь введены обозначения: $v = n - k + i - m - \beta_1$, $\beta_j^j, j = 1, \dots, v$ являются корнями полинома $p^v + c$, где $c = b_1 \left(\frac{v}{v-i}\right)^v$. $\alpha_{\beta_1}^j, j = 1, \dots, m - i + \beta_1$ — корни полинома $a_0 + b_1 \left(\frac{1}{d-1}\right)^{i-m-\beta_1} p^{-i+m+\beta_1}$. Через $A_i^j, B_t^j, \sigma_j^1, \sigma_j^2, b_i^j, k_0$ обозначены некоторые числа, $\sum_{t=0}^{\infty} A_t^j x^t, \sum_{t=0}^{\infty} B_t^j x^t$ — асимптотические ряды.

Литература

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires / H. Poincare // Acta math. — 1886. — v. 8. — p. 295-344.

2. Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре / Анри Пуанкаре. — М. : Наука, 1974.

3. Thome L.W. Zur Theorie der linearen differentialgleichungen / L.W. Thome // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 1872.

4. Sternberg W. Uber die asymptotische Integration von Differentialgleichungen / W. Sternberg // — Verlag von Julius Springer, Berlin, 1920.

5. Коровина М.В. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ / М.В. Коровина, В.Е. Шаталов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1259–1277.

6. Коровина М.В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков / М.В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 349–357.

7. Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями / М.В. Коровина // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 302–304.

8. Korovina M. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point / M. Korovina // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 12. — P. 2249.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С УПРУГО ПРИСОЕДИНЁННЫМИ ГРУЗАМИ¹

Л.Н. Коронова, Д.М. Коростелева, С.И. Соловьёв
(Казань, КФУ, КГЭУ)

lyubov.koronova.kpfu@mail.ru

Исследуются продольные собственные колебания закреплённого стержня с упруго присоединёнными грузами во внутренних точках. Для определения частот и амплитуд собственных колебаний механической системы стержень-пружины-грузы построена и обоснована функционально-алгебраическая постановка задачи на собственные значения. Установлено, что сформулированная задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160029, 20-08-01154).

© Коронова Л.Н., Коростелева Д.М., Соловьёв С.И., 2021

значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных элементов. Исследуются предельные свойства собственных значений и собственных элементов при изменении параметров упруго присоединённых грузов. Исходная задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов с Лагранжевыми конечными элементами произвольного порядка на неравномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных элементов в зависимости от размера сетки и порядка конечных элементов. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3]. Результаты работы могут быть применены при исследовании и решении более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных колебаний балок, пластин и оболочек с упруго присоединёнными грузами.

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.

2. Соловьёв С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.

3. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418–432.

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ С УПРУГО ПРИСОЕДИНЁННЫМИ ГРУЗАМИ¹

Д.М. Коростелева, К.О. Левинская,
С.И. Соловьёв (Казань, КФУ, КГЭУ)
diana.korosteleva.kpfu@mail.ru

Изучаются поперечные собственные колебания жёстко закреплённой балки с упруго присоединёнными грузами во внутренних точках. Для определения частот и амплитуд собственных колебаний механической системы балка-пружина-грузы сформулирована функционально-алгебраическая задача на собственные значения.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160029, 20-08-01154).

© Коростелева Д.М., Левинская К.О., Соловьёв С.И., 2021

Установлено, что эта задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных элементов. Исследуются предельные свойства собственных значений и собственных элементов при изменении параметров нагружения. Исходная задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов с Эрмитовыми конечными элементами произвольного порядка на неравномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных элементов в зависимости от размера сетки и порядка конечных элементов. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3]. Результаты работы могут быть применены при исследовании и решении задач расчёта собственных колебаний пластин и оболочек с упруго присоединёнными грузами.

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.
2. Соловьёв С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.
3. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418–432.

О 7-МЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ С ЕДИНСТВЕННЫМ 4-МЕРНЫМ АБЕЛЕВЫМ ИДЕАЛОМ¹

В.В. Крутских, А.В. Лобода (Воронеж, ВГУ)

krutskihvlad@mail.ru

В связи с изучением голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей в пространстве \mathbb{C}^4 рассматриваются орбиты в этом пространстве 7-мерных нильпотентных алгебр Ли.

Теорема. *Если 7-мерная нильпотентная алгебра Ли голоморфных векторных полей в \mathbb{C}^4 имеет полный ранг и содержит единственный 4-мерный абелев идеал, то любая орбита такой алгебры является вырожденной по Леви гиперповерхностью.*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

© Крутских В.В., Лобода А.В., 2021

Для доказательства теоремы отметим, прежде всего, что в полном списке (из 149 вещественных) неразложимых 7-мерных нильпотентных алгебр Ли (см. [1]) содержится лишь 33 изолированных алгебры, у которых 4-мерный абелев идеал является единственным.

Эти алгебры разбиваются на блоки, в каждом из которых используется сходство коммутационных соотношений. Ниже приведена таблица таких соотношений для 9 алгебр Ли одного из блоков (с сохранением кодировки [1]). Абелевым идеалом в любой из этих алгебр является $I_4 = \langle e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$; через s_{jk} обозначен коммутатор $[e_j, e_k]$.

Алгебра	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{26}	s_{34}
23457B	e_3	e_4	e_5			e_6		e_7		$-e_7$
23457C	e_3	e_4	e_5	e_6				e_7		$-e_7$
23457D	e_3	e_4	e_5	e_6		e_6		e_7		$-e_7$
23457F	e_3	e_4	e_5			$e_5 + e_6$		e_7		$-e_7$
23457G	e_3	e_4	e_5	e_6		e_5	e_6	e_7		$-e_7$
13457C	e_3	e_4	e_5		e_7			e_7		$-e_7$
13457E	e_3	e_4	e_5		e_7	e_5		e_7		$-e_7$
13457G	e_3	e_4	e_5		e_7	e_6	e_7	e_7		$-e_7$
13457I	e_3	e_4	e_5	e_7		e_6		e_7	e_7	$-e_7$

Согласно [2], базис абелева идеала I_4 7-мерной алгебры Ли векторных полей в \mathbb{C}^4 , допускающей невырожденные по Леви орбиты, можно упростить (в некоторых голоморфных координатах) до одного из трех видов:

$$\begin{array}{lll}
 1) & 2) & 3) \\
 e_4 : (1, 0, 0, 0), & (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1)), & (0, 1, 0, 0), \\
 e_5 : (0, 1, 0, 0), & (0, 1, 0, 0), & (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1)), \\
 e_6 : (0, 0, 1, 0), & (0, 0, 1, 0), & (0, 0, 1, 0), \\
 e_7 : (0, 0, 0, 1), & (0, 0, 0, 1), & (0, 0, 0, 1).
 \end{array}$$

Для всех алгебр из приведенной таблицы упрощение первого случая невозможно в силу еще одного утверждения из [2].

Рассматривая во втором случае коммутаторы полей e_1 и e_3 с выпрямленными полями из I_4 , несложно увидеть, что (для алгебр из приведенного блока) все компоненты поля e_3 и две первых компоненты e_1 зависят не более, чем от переменной z_1 ($\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$):

$$\begin{aligned}
 e_1 &= (a_1(z_1), b_1(z_1), -\alpha z_2 + c_1(z_1), -\beta z_3 - \gamma z_2 + d_1(z_1)), \\
 e_3 &= (a_3(z_1), b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)).
 \end{aligned}$$

Но тогда во второй компоненте соотношения $[e_1, e_4] = e_5$ имеем равенство $a_1(z_1)b'_4(z_1) = 1$, противоречащее условию

$$[e_3, e_4] = a_3(0, b'_4(z_1), c'_4(z_1), d'_4(z_1)) = -e_7 = -(0, 0, 0, 1).$$

Аналогичные противоречия получаются и в третьем случае для всех алгебр из приведенной таблицы. Близкими рассуждениями доказывается противоречивость всех трех случаев для остальных 24 алгебр из обсуждаемых 33.

Литература

1. Gong, M.-P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and \mathbb{R}) / M.-P. Gong — University of Waterloo, 1998. — 165 с.
2. Loboda, A.V. On the orbits of nilpotent 7-dimensional Lie algebras in 4-dimensional complex space / A.V. Loboda, R.S. Akopyan, V.V. Krutskikh // Журнал СВУ, Математика и физика. — 2020. — № 3, С. 360–372.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДВУМЕРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ¹

Н.Е. Крымов, (Москва, НИУ МЭИ)

KrymovNY@mpei.ru

Рассматривается стационарная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в системе, состоящей из n^2 абсолютно черных теплопроводящих стержней квадратного сечения со стороной длины $\varepsilon = 1/n$, упакованных в квадратную коробку $\Omega = (0, 1)^2$ с границей Γ и разделенных вакуумными прослойками, через которые теплообмен осуществляется посредством излучения. Каждому стержню соответствует квадрат $G_{i+1/2, j+1/2} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$, где $x_i = \varepsilon i, y_j = \varepsilon j, 0 \leq i < n, 0 \leq j < n$. Искомой является функция u , имеющая физический смысл абсолютной температуры.

Теплообмен внутри стержней описывается уравнением

$$-div(\lambda \nabla u) = 0, \quad (x, y) \in G_{i+1/2, j+1/2}, \quad 0 \leq i < n, \quad 0 \leq j < n. \quad (1)$$

¹ Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

© Крымов Н.Е., 2021

Теплообмен излучением описывается краевыми условиями

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1} - 0, y) = w_{x,i+1}(y), \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, y) = w_{x,i}(y), y \in (0, 1), \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_{j+1} - 0) = w_{y,j+1}(x), \lambda \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_j + 0) = w_{y,j}(x), x \in (0, 1), \quad (3)$$

где

$$w_{x,i} = h(u(x_i + 0, y)) - h(u(x_i - 0, y)), 1 \leq i < n,$$

$$w_{x,0} = h(u(x_0, y)) - h(u_\Gamma(x_0, y)), w_{x,n} = h(u_\Gamma(x_n, y)) - h(u(x_n, y)),$$

$$w_{y,j} = h(u(x, y_j + 0)) - h(u(x, y_j - 0)), 1 \leq j < n,$$

$$w_{y,0} = h(u(x, y_0)) - h(u_\Gamma(x, y_0)), w_{y,n} = h(u_\Gamma(x, y_n)) - h(u(x, y_n)),$$

Здесь $\lambda > 0$ – коэффициент теплопроводности; $h(u) = \sigma_0 |u|^3 u$ при $u > 0$ – плотность потока теплового излучения; $\sigma_0 > 0$ – постоянная Стефана-Больцмана; u_Γ – температура, заданная на Γ .

Однозначная разрешимость задачи (1) – (3) установлена в [1,2].

Исследуется дискретная аппроксимация задачи (1) – (3), аналогичная предложенной в [3] для нестационарного случая.

$$-\varepsilon \Delta^\varepsilon h(U)_{i+1/2, j+1/2} = 0, \quad (x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \in \Omega, \quad (4)$$

$$h(U)_{i+1/2, j+1/2} = g(u_\Gamma)_{i+1/2, j+1/2}, \quad (x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \in \Gamma^\varepsilon. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta^\varepsilon h(U)_{i+1/2, j+1/2} = & \\ = & \frac{h(U)_{i+3/2, j+1/2} - 2h(U)_{i+1/2, j+1/2} + h(U)_{i-1/2, j+1/2}}{\varepsilon^2} + \\ + & \frac{h(U)_{i+1/2, j+3/2} - 2h(U)_{i+1/2, j+1/2} + h(U)_{i+1/2, j-1/2}}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

$g(u_\Gamma)$ – аппроксимация значений функции $h(u_\Gamma)$ на границе Γ^ε квадрата $(1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)^2$. Искомые значения $U_{i+1/2, j+1/2}$ являются приближениями к значениям $[u]_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{G_{i+1/2, j+1/2}} u \, dx dy$.

Для аппроксимации (4), (5) получена оценка погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon}/\lambda)$.

Литература

1. Амосов А.А. О разрешимости задачи теплообмена излучением по закону Стефана-Больцмана /А.А. Амосов// Вест. МГУ. Сер. Вычисл. матем. киберн., No 3. 18-26 (1980)

2. Амосов А.А. Стационарная нелинейная нелокальная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в системе непрозрачных тел со свойствами, зависящими от частоты излучения / А.А. Амосов // Проблемы математического анализа 43, 3-34 (2009)

3. Кремкова А.А. Полудискретные и асимптотические аппроксимации для задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в периодической двумерной структуре / А.А. Кремкова // Вестник МЭИ, (2012), No. 6, 151–161.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ¹

М.А. Кузнецова (Саратов, СГУ)

kuznetsovama@info.sgu.ru

Дифференциальные операторы на временных шкалах определяются посредством Δ -производной, которая является классической производной либо разделенной разностью в зависимости от структуры временной шкалы. Определение Δ -производной и некоторые понятия теории временных шкал можно найти в [1].

Результаты по обратным спектральным задачам для операторов Штурма–Лиувилля на временных шкалах, состоящих из отрезков и изолированных точек, были получены в [1–4]. Рассмотрим обратную задачу восстановления оператора Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале T по собственным значениям. Данный оператор имеет следующий вид:

$$-y^{\Delta\Delta}(t) + y(\gamma)q(t) = \lambda y(\sigma(t)), \quad t \in T = [0, \gamma] \cup [a, b], \quad (1)$$

$$y(0) = y(b) = 0.$$

Пусть выполнены следующие ограничения: $q \in C(T)$; $y \in C^{(2)}(T)$; тогда (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} -y''(x_1) + q(x_1)y(\gamma) = \lambda y(x_1), & x_1 \in [0, \gamma], \\ -y''(x_2) + q(x_2)y(\gamma) = \lambda y(x_2), & x_2 \in [a, b], \end{cases}$$

с условиями скачков

$$\begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ d(q(\gamma) - \lambda) & 1 - \lambda d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(\gamma) \\ y'(\gamma) \end{pmatrix}.$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-01-00102, № 20-31-70005).

© Кузнецова М.А., 2021

Обозначим $d = b - a$, $d_2 = b - a$. Характеристическая функция краевой задачи Дирихле для данной системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = -c_1(\lambda) \frac{\sin \rho \gamma}{\rho} - c_2(\lambda) \cos \rho \gamma - \frac{\sin \rho \gamma}{\rho} \int_a^b \frac{\sin \rho(b-t)}{\rho} q(t) dt - c_2(\lambda) \int_0^\gamma \frac{\sin \rho t}{\rho} q(t) dt - dq(\gamma) \frac{\sin^2 \rho \gamma}{\rho^2},$$

где

$$c_1(\lambda) = \cos \rho d_2 - d \rho \sin \rho d_2, \quad c_2(\lambda) = d \cos \rho d_2 + \frac{1 - \lambda d^2}{\rho} \sin \rho d_2$$

при $\lambda = \rho^2$. Число λ является собственным значением тогда и только тогда, когда $\Delta(\lambda) = 0$. Назовем спектром $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ множество нулей характеристической функции с учетом кратности. Если $d_2 \geq \gamma$, то можно получить следующие асимптотические формулы:

$$\{\lambda_n\}_{n \geq 0} = \{\rho_{k1}^2\}_{k \geq 0} \cup \{\rho_{m2}^2\}_{m \geq 0},$$

$$\rho_{k1} = \frac{\pi k}{d_2} + o(1), \quad k \geq 0; \quad \rho_{m2} = \frac{\pi(m + \frac{1}{2})}{\gamma} + o(1), \quad m \geq 0.$$

Теорема 1. Пусть функции $c_2(\lambda)$ и $\frac{\sin \rho \gamma}{\rho}$ не имеют общих нулей. Обозначим за $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$ спектр краевой задачи Дирихле с некоторым потенциалом \tilde{q} . Если $\{\lambda_n\}_{n \geq 0} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$, то $q = \tilde{q}$.

Замечание 1. В частности, функции $c_2(\lambda)$ и $\frac{\sin \rho \gamma}{\rho}$ не имеют общих нулей, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\frac{\pi d_2}{\gamma}, \frac{\pi d}{\gamma} \in \mathbb{Q}$;
- 2) $d_2 = k\gamma, k \in \mathbb{N}$.

Литература

1. Yurko V. Inverse problems for Sturm-Liouville differential operators on closed sets / V. Yurko // Tamkang Journal of Mathematics. —2019. — Vol. 50, no. 3. — Pp. 199–206.

2. Kuznetsova M. A uniqueness theorem on inverse spectral problems for the Sturm–Liouville differential operators on time scales / M. Kuznetsova // Results in Mathematics. —2020. —Vol. 75, article 44. — Pp. 1–23.

3. Кузнецова М.А. Алгоритм решения обратной спектральной задачи для операторов Штурма–Лиувилля на замкнутых множествах вещественных чисел / М.А. Кузнецова // КРОМШ-2020 : Сборник материалов международной конференции, посвященной памяти

Н.Д. Копачевского. — пос. Батилиман, Республика Крым : «Поли-
принт», 2020. — С. 57–60.

4. Кузнецова М.А. О восстановлении дифференциальных опера-
торов Штурма–Лиувилля на временных шкалах / М.А. Кузнецова //
Математические заметки. —2021. — Т. 109, вып. 1. —С. 82–100.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФАХ¹

Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева (Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН,
СОГУ)

urtaeva-96@mail.ru

Нами будет рассматриваться однородное дифференциальное
уравнение

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

заданное на геометрическом графе Γ . При этом, под дифференци-
альным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [1], на-
бор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа
и набор условий согласования во внутренних вершинах.

В данной работе мы рассматриваем уравнение, порожаемое со-
вокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - r_i(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \quad (2)$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$, $r(x) \in C[\Gamma]$, $r(x) > 0$ на Γ , дополняемой
в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$u_i(a) = u_k(a), \quad \beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u'_{i\nu}(a) = 0, \quad i, k \in I(a), \quad (3)$$

в которых коэффициенты $\beta(a)$, $\vartheta(a)$ неотрицательны и не равны од-
новременно нулю. Всяду далее, в условиях на производные вида (3)
мы будем считать выполненными аналогичные условия на коэффи-
циенты, не оговаривая этого, и условием с третьими производными

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i(a)u_i''(a))'_\nu - r(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \quad (4)$$

¹ Работа выполнена в рамках госзадания СОГУ

© Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А., 2021

Теорема 1. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1) равно нулю на $\partial\Gamma$ и имеющее внутри графа S -зону Γ_0 , $\Gamma_0 \subset \subset \Gamma$. Тогда любое знакопостоянное на Γ_0 решение $v(x)$ уравнения (1), равно нулю на $\partial\Gamma$, коллинеарно $u(x)$ на Γ_0 .

Теорема 2. (о перемежаемости нулей) Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), равно нулю на $\partial\Gamma$ и имеющее внутри графа S -зону Γ_0 , $\Gamma_0 \subset \subset \Gamma$. Тогда любое решение $v(x)$ уравнения (1), равно нулю на $\partial\Gamma$ и неколлинеарное $u(x)$ на Γ_0 , меняет знак в Γ_0 .

Теорема 3. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ условиям

$$\beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u'_{i\nu}(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \quad (5)$$

и имеющее S -зону Γ_0 , $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Тогда любое знакопостоянное на Γ_0 решение $v(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ тем же условиям (5), коллинеарно $u(x)$ на Γ_0 .

Следствие 1. (перемежаемость нулей) Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ условиям (5) и имеющее S -зону Γ_0 , $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Тогда любое решение $v(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ тем же условиям (5), и неколлинеарное $u(x)$ на Γ_0 , меняет знак в Γ_0 .

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах /Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. —М.: Физматлит, 2007. — 272 с.

2.W. Leighton. On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order /W. Leighton and Z. Nehari // Trans. Amer. Math. Soc. — 1958 — 89, P. 325—377.

**ОЦЕНКА СКОРОСТИ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ
ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С
ПОТЕНЦИАЛОМ ИЗ КЛАССА $L, r \geq 1$ ¹**

В.М. Курбанов, А.И. Исмаилова (Баку, Азербайджанский
Государственный Педагогический Университет, Баку,
Азербайджанский Университет Языков)
q.vali@yahoo.com, aytakin_81@mail.ru

В работе рассматривается оператор Шредингера

$$Lu = -u'' + q(x)u, x \in G = (0, 1),$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_r(G), r \geq 1$. Корневые функции (собственные и присоединенные функции) оператора понимаются в обобщенной трактовке, т.е. безотносительно к крайевым условиям (см.[1]). Изучается скорость равносходимости биортогонального разложения функции $f(x) \in L_p(G), p \geq 1$, с её тригонометрическим разложением на компакте $K \subset G$ в метрике $L_s(K), s \geq 1$ (см. [2,3]).

Пусть система корневых функций $\{u_k(x)\}$ и система собственных значений $\{\lambda_k\}$ удовлетворяют условиям A_p (условия В.А. Ильина):

1) система $\{u_k(x)\}$ замкнута и минимальна в $L_p(G)$ при некотором фиксированном $p \geq 1$ 2) выполняются условия Карлемана и «сумма единиц» :

$$|\operatorname{Im} \mu_k| \leq \operatorname{const}, k = 1, 2, \dots; \quad \sum_{\tau \leq \operatorname{Re} \mu_k \leq \tau+1} 1 \leq \operatorname{const},$$

$$\forall \tau \geq 0, \text{ где } \mu_k^2 = \lambda_k, \operatorname{Re} \mu_k \geq 0$$

3) для любого компакта $K \subset G$ существует постоянная $C_0(K)$ такая, что

$$\|u_k\|_{p,K} \|v_k\|_q \leq C_0(K), k \in N, p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

$\{v_k(x)\}$ - биортогонально сопряженная система к $\{u_k(x)\}$ и является системой корневых функций формально сопряженного оператора $L^* = -\frac{d^2}{dx^2} + \overline{q(x)}$ (т.е.);

$$L^* v_k = \overline{\lambda_k} v_k - \theta_k v_{k+1}; \quad \|\cdot\|_{p,K} = \|\cdot\|_{L_p(K)}, \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(G)}.$$

¹ Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики (Грант №EIF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/05/1.)

© Курбанов В.М., Исмаилова А.И., 2021

Обозначим

$$\sigma_\nu(x, f) = \sum_{\operatorname{Re} \mu_k \leq \nu} (f, v_k) u_k(x), \delta = \max \{2, q\},$$

$$\Delta_{\nu s}(f, K) = \|\sigma_\nu(\cdot, f) - S_\nu(\cdot, f)\|_{s, K}, s \geq 1,$$

где $S_\nu(x, f)$ частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$.

Теорема. Пусть $q(x) \in L_p(G), r \geq 1$, система $\{u_k(x)\}$ удовлетворяет условиям $A_p, p \geq 1$. Тогда разложения произвольной функции $f(x) \in L_p(G)$ в биортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}$ и в тригонометрический ряд Фурье равномерно сходятся на любом компакте $K \subset G$ в метрике $L_s(K), s \in [1, \infty]$ т.е.

$$\Delta_{\nu s}(f, K) \rightarrow 0, \nu \rightarrow +\infty$$

При этом для любого $v > 2$ справедливы оценки:

I. При $p > 1$

$$\Delta_{\nu s}(f, K) \leq$$

$$\leq C(K) \begin{cases} \nu^{-1} \|f\|_p + \omega_1(f, \nu^{-1}), & s \leq r \\ \nu^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s} - 1} \|f\|_p + \omega_1(f, \nu^{-1}), & s > r, p(1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{r}) \neq 1 \\ \nu^{-1} \ln^{\frac{1}{p}} \nu \|f\|_p + \omega_1(f, \nu^{-1}), & s > r, p(1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{r}) = 1. \end{cases}$$

II. При $p = 1$

$$\Delta_{\nu s}(f, K) \leq$$

$$\leq C(K) \begin{cases} \nu^{-1} \|f\|_1 + \omega_1(f, \nu^{-1}), & s < r \\ \nu^{-1} \ln^2 \nu \|f\|_1 + \omega_1(f, \nu^{-1}), & s = r < 2 \text{ или } s = r = \infty \\ \nu^{-1} \ln^{2(1 - \frac{1}{r})} \nu \|f\|_1 + \omega_1(f, \nu^{-1}), & 2 \leq s = r < \infty \\ \nu^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - 1} \|f\|_1 + \omega_1(f, \nu^{-1}), & s > r. \end{cases}$$

III. При $q(x) \equiv 0, p \geq 1, s \in [1, \infty]$

$$\Delta_{\nu s}(f, K) \leq C(K) \{\nu^{-1} \|f\|_1 + \omega_1(f, \nu^{-1})\}.$$

Литература

1. Ильин В.А. Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом из класса L_1 . // Дифференц. уравнения 1991. — Т. 27, — № 4, С. 577–597.

2. Курбанов В.М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. I // Дифференц. Уравнения — 1999. — Т. 35 — № 12. — С. 1597–16095.

3. Курбанов В.М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. II // Дифференц. Уравнения — 2000. — Т. 36 — № 3. — С. 319–335.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СОСТАВНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ¹

**К.О. Левинская, Д.М. Коростелева,
С.И. Соловьёв** (Казань, КФУ, КГЭУ)
kseniya.levinskaya.kpfu@mail.ru

Рассматриваются продольные собственные колебания механической системы, составленной из двух стержней, соединённых упругой пружиной. Для нахождения частот и амплитуд собственных колебаний составной механической системы формулируется задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений второго порядка. Доказано, что существует неубывающая последовательность положительных собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных элементов. Исследуются предельные свойства собственных значений и собственных элементов при изменении коэффициента жёсткости пружины. Исходная задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов на равномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных элементов в зависимости от шага сетки. Полученные теоретические результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3]. Результаты работы могут быть применены при исследовании вибрации сложных механических конструкций, составленных из балок, пластин и оболочек.

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160029, 20-08-01154).

© Левинская К.О., Коростелева Д.М., Соловьёв С.И., 2021

2. Самсонов А.А. Асимптотические свойства задачи о собственных колебаниях стержня с присоединённым грузом / А.А. Самсонов, С.И. Соловьёв, Д.М. Коростелева // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162, кн. 1. — С. 52—65.

3. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418—432.

О НЕВЫРОЖДЕННЫХ ОРБИТАХ В \mathbb{C}^4 7-МЕРНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ¹

А.В. Лобода (Воронеж, ВГТУ)

lobvgasu@yandex.ru

Полностью изучены Леви-невырожденные голоморфно однородные вещественные гиперповерхности в \mathbb{C}^4 , являющиеся орбитами в этом пространстве 7-мерных нильпотентных алгебр Ли.

Теорема. *Любая Леви-невырожденная орбита в \mathbb{C}^4 7-мерной нильпотентной алгебры Ли голоморфных векторных полей голоморфно эквивалентна либо одной из (сферических) квадрик*

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2, \quad (1)$$

либо одной из двух несферических поверхностей

$$v = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_3|^2 \pm |z_1|^4. \quad (2)$$

Замечание. Многообразия (2), имеющие самые большие размерности алгебр голоморфных векторных полей среди всех несферических невырожденных гиперповерхностей, являются обобщениями известной поверхности Винкельманна $v = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_1|^4$ из 3-мерного комплексного пространства.

Для доказательства теоремы рассмотрены все 180 типов вещественных нильпотентных 7-мерных алгебр Ли (149 неразложимых алгебр Ли из [1] и 31 разложимая алгебра Ли). Эти алгебры были разбиты на блоки в зависимости от размерности максимальных абелевых идеалов и числа таких идеалов в отдельных алгебрах Ли.

Результаты (совместного с Акоюн Р.С., Крутских В.В., Каверинной В.К., см. [2]-[4]) изучения отдельных блоков уже опубликованы. Для части таких блоков отсутствие невырожденных по Леви орбит

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

© Лобода А.В., 2021

и, в частности, невозможность голоморфных реализаций в \mathbb{C}^4 отдельных алгебр, являются простыми следствиями коммутационных соотношений в этих алгебрах.

Вместе с тем, орбиты, голоморфно эквивалентные поверхностям (1) и (2), оказываются «разбросанными» по разным выделенным блокам. В итоге для полного изучения вопроса потребовалось аккуратное рассмотрение большого количества различных 7-мерных алгебр, упрощение их базисов и интегрирование алгебр, прошедших фильтры по проверке возможного вырождения их орбит.

Так, один из блоков составляют 18 алгебр Ли, содержащих два различных 4-мерных абелевых идеала. В отличие от 73 алгебр, содержащих 5-мерные абелевы идеалы и допускающих лишь Леви-вырожденные орбиты в \mathbb{C}^4 (см. [4]), следующие 4 алгебры из 18 имеют невырожденные орбиты, эквивалентные поверхностям (2):

Алгебра	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{26}	s_{34}
137B		e_5		e_7			e_6		e_7	e_7
1357H	e_4	e_5		e_7			e_6	e_7	e_7	e_7
147A ₁		$-e_5$		e_7		$-e_6$			e_7	e_7
137B ₁		e_5	e_6	e_7		$-e_6$	e_5		e_7	e_7

Пример. Реализации алгебры 137B₁ в виде алгебры голоморфных векторных полей в \mathbb{C}^4 (A, B_2, C, D - константы, $2AB_3 = 1 - A^2$):

$$e_1 = (1, 0, -(z_2 + D), 0), e_2 = (A, B_2, Az_2 - B_2z_1 + C, -z_3 - z_1(z_2 + D)),$$

$$e_3 = (0, B_3, -(A_2 + B_3)z_1 + B_2, -z_2 + (1/2)z_1^2), e_4 = (0, 1, 0, 0), \quad (3)$$

$$e_5 = (0, 0, -A, z_1), e_6 = (0, 0, 1, 0), e_7 = (0, 0, 0, 1).$$

В зависимости от значений параметров в (3) орбиты соответствующих реализаций могут быть также вырожденными или сферическими (эквивалентными квадратам (1)).

Литература

1. Gong, M.-P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and \mathbb{R}) / M.-P. Gong – University of Waterloo, 1998. — 165 p.

2. Loboda, A. V. On the orbits of nilpotent 7-dimensional Lie algebras in 4-dimensional complex space / A. V. Loboda, R. S. Акopyан, V. V. Krutskikh // Журнал СФУ, Математика и физика. — 2020. — № 3. — С. 360-372.

3. Лобода, А.В. Об орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих три абелевых 4-мерных идеала / А.В. Лобода, В.К. Каверина // Сборник

тезисов междунар. научн. конф. «УОМШ-2020», ч.1. — Уфа : НИЦ «АЭТЕРНА», 2020. — С. 125-127.

4. Акопян, Р.С. Об орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих 5-мерные абелевы идеалы / Р.С. Акопян, В.В. Крутских // Материалы Междунар. научн. конф. «ВЗМШ-2021». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 32.

ОБ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ¹

А.В. Лобода, Б.М. Даринский (Воронеж, ВГУ)

lobogasu@yandex.ru

В задаче описания голоморфно однородных гиперповерхностей многомерных пространств в терминах нормальных уравнений ([1]) важную роль играют вещественные многочлены 4-й степени из таких уравнений. В случае строго псевдовыпуклых поверхностей эти многочлены являются гармоническими; интерес представляет их изменение под действием унитарных преобразований.

В [2] дано описание канонических видов гармонических многочленов от трех комплексных переменных, имеющих «богатые» группы сохраняющих их унитарных преобразований. В задаче об однородности желательно иметь конструктивные способы сведения многочленов к таким каноническим видам и проверки унитарной эквивалентности двух таких многочленов.

Отметим, что в [3] предложен такой способ для (отвечающих гиперповерхностям в \mathbb{C}^3) гармонических многочленов от двух комплексных переменных, основанный на представлениях алгебры $U(2)$. Ниже описывается метод сведения к каноническому виду многочленов от любого количества переменных, использующий лишь необходимые условия экстремума функций. Пусть, например,

$$\begin{aligned} P(z, \bar{z}) = P_{(2,2)}(z, \bar{z}) = & \lambda_1(|z_1|^4 - 4|z_2|^2|z_2|^2 + |z_2|^4) + & (1) \\ & + \lambda_2(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_3|^2 + |z_3|^4) + \lambda_3(|z_2|^4 - 4|z_2|^2|z_3|^2 + |z_3|^4) + \\ & + \operatorname{Re}(\alpha_1 z_1 \bar{z}_2)(|z_1|^2 - |z_2|^2) + \operatorname{Re}(\beta_1 z_1 \bar{z}_2)(|z_1|^2 - 2|z_3|^2) + \\ & + \operatorname{Re}(\alpha_2 z_1 \bar{z}_3)(|z_1|^2 - |z_3|^2) + \operatorname{Re}(\beta_2 z_1 \bar{z}_3)(|z_3|^2 - 2|z_2|^2) + \\ & + \operatorname{Re}(\alpha_3 z_2 \bar{z}_3)(|z_2|^2 - |z_3|^2) + \operatorname{Re}(\beta_3 z_2 \bar{z}_3)(|z_2|^2 - 2|z_1|^2) + \end{aligned}$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

© Лобода А.В., Даринский Б.М., 2021

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Re}(\gamma_1 z_2^2 \bar{z}_3) + \operatorname{Re}(\gamma_2 z_1^2 \bar{z}_3) + \operatorname{Re}(\gamma_3 z_1^2 \bar{z}_2) + \\
& + \operatorname{Re}(\delta_1 z_1^2 \bar{z}_2 \bar{z}_3) + \operatorname{Re}(\delta_2 z_2^2 \bar{z}_1 \bar{z}_3) + \operatorname{Re}(\delta_3 z_3^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2)
\end{aligned}$$

— элемент общего положения 27-мерного пространства вещественных гармонических многочленов бистепени (2,2) от переменных $z = (z_1, z_2, z_3)$ и $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$.

Теорема. Из 6 комплексных коэффициентов α_k, β_j формулы (1) за счет унитарной замены переменных z_1, z_2, z_3 можно оставить лишь 4 вещественных коэффициента.

Для доказательства рассматриваются значения многочлена (1) на единичной сфере $S^5 \subset \mathbb{C}^3$. Точку максимума этого многочлена можно перевести унитарным преобразованием в (северный) полюс $Q(0, 0, i)$ сферы. Тогда необходимые условия экстремума, т.е. обращение в нуль производных по всем пяти (внутренним) переменным, приводят к выполнению 4-х ограничений на коэффициенты α_k, β_j .

Далее обсуждается максимум функции $\dot{P}(z_1, z_2) = P_{z_3=0}$ и за счет унитарного преобразования пространства \mathbb{C}_{z_1, z_2}^2 накладываются еще два вещественных ограничения на тот же набор α_k, β_j . После этого поворотами трех отдельных переменных z_1, z_2, z_3 можно сделать вещественными два коэффициента из оставшегося набора (α_k, β_j) .

Замечание. Размерность группы $U(3)$ равна 9, но подчинить произвольный многочлен (1) более чем 8 ограничениям невозможно: однопараметрическая подгруппа согласованных поворотов всех 3-х переменных сохраняет любой такой многочлен.

Литература

1. Chern S.S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S.S. Chern, J.K. Moser // Acta Math. — 1974. —V. 133. P. 219-271.
2. Лобода А.В. Об унитарно-инвариантных гармонических многочленах четвертой степени / А.В. Лобода, Б.М. Даринский, Д.В. Козориз // Материалы Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. —С. 192-193.
3. Ежов В.В. Каноническая форма многочлена четвертой степени в нормальном уравнении вещественной гиперповерхности в \mathbb{C}^3 / В.В. Ежов, А.В. Лобода, Г. Шмальц // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 4. — С. 624–626.

**ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ
СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ
УСЛОВИЯМИ**

И.С. Ломов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
lomov@cs.msu.ru

Исследуется смешанная задача для телеграфного уравнения с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Методом А.П. Хромова построен ряд — обобщенная формула Даламбера. При минимальных условиях на данные задачи этот ряд дает ее обобщенное решение. Рассмотрен случай суммируемого потенциала уравнения. В случае нулевого потенциала полученный ряд переходит в обычную формулу Даламбера.

Рассматривается задача:

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u'_x(0, t) = u'_x(1, t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

где комплекснозначные функции $q(x), \varphi(x) \in L(0, 1)$, суммируемые функции.

Для построения решения задачи (1)–(3) важную роль играет существенно несамосопряженный оператор $L_0 : ly = -y''(x), x \in (0, 1), y(0) = 0, y'(0) = y'(1)$ (задача Самарского–Ионкина). Этот оператор имеет двукратный спектр и бесконечное число присоединенных функций.

Теорема. Пусть $q(x), \varphi(x) \in L(0, 1)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t) \quad (4)$$

сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ для любого $T > 0$ и дает обобщенное решение задачи (1)–(3), понимаемое в смысле предельного перехода по норме $L(0, 1)$ классических решений задачи (1)–(3). В (4):

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\check{\varphi}(x+t) + \check{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta, \tau) d\eta, \quad n \geq 1,$$

$\tilde{\varphi}(x)$ — нечетная функция на числовой прямой, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $x \in [0, 1]$ и продолжение на \mathbb{R}_+ задается соотношением $\tilde{\varphi}(1+x) = 2\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(1-x)$, функция $\tilde{f}_n(x, t) = f_n(x, t) \equiv -q(x)a_n(x, t)$ при $x \in [0, 1]$ и аналогично $\varphi(x)$ продолжена по x на всю прямую, $n \geq 0$.

В случае гладкой функции $\varphi(x)$ ряд (4) дает единственное классическое решение задачи (1)–(3).

В работе продолжены исследования школы А.П. Хромова (см., напр., [1–3]) и используются идеи Л. Эйлера о расходящихся рядах [4].

Автор выражает признательность профессору А.П. Хромову за полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Хромов А.П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения / А.П. Хромов // ЖВМ и МФ. — 2016. — Т. 56, № 2. — С. 239–251.

2. Бурлуцкая М.Ш. Резольвентный подход для волнового уравнения / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // ЖВМ и МФ. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 229–241.

3. Корнев В.В. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / В.В. Корнев, А.П. Хромов // ЖВМ и МФ. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 286–300.

4. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. — М.–Л. : ГИТТЛ, 1949. — 580 с.

О РЕШЕНИИ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА¹

Л.Н. Ляхов, А.И. Иноземцев (Воронеж, ВГУ;
Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
levnlya@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

Тезисы содержит условия существования и единственности решения неоднородного частно-интегрального уравнения Фредгольма

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

© Ляхов Л.Н., Иноземцев А.И., 2021

второго рода следующего вида

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda(K_1\varphi)(x) = \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\varphi(t_1, x_2) dt_1 + f(x_1, x_2). \quad (1)$$

Решение уравнения (1) предполагается принадлежащим анизотропным пространствам функций Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $p_i \geq 1$ в конечной области $D = D_1 \times D_2$, $D_i = (a_i, b_i)$. Норма определена равенством

$$\|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} |u(t_1, t_2)|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Для удобства далее будет использовано обозначение Ж.-Л. Лионса для анизотропных пространств: $L_{(p,q)}(D_{1,2}) = L_{(p,q)}(D_1 \times D_2) = L_q(D_2; L_p(D_1))$ — пространство функций из $L_q(D_2)$ со значениями в пространстве $L_p(D_1)$.

В работе [1] доказано ограниченность действия итераций ЧИ оператора K_1 , именно доказано следующее неравенство

$$\|K_1^m f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \prod_{i=1}^m \|k_1\|_{L_{p_2^i q_2}^i(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \cdot \|f\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2; L_{p_1}(D_1))}. \quad (2)$$

Получено решение уравнения (1) в виде сходящегося при $|\lambda| C_1 S_1 < 1$ ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K_1^j f \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1 - |\lambda| C_1 S_1},$$

где

$$Q_1 = \sup \left\{ \|k_1\|_{L_{p_2^j q_2}^j(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \right\}_{j=1}^{\infty} < \infty,$$

$$\|f\|_{\Lambda_1} = \sup \left\{ \|f\|_{L_{p_2^{j+1}}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \right\}_{j=1}^{\infty} < \infty,$$

константы

$$A_1 = \sup_{1 \leq i \leq m-1} \left\{ (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2^i q_2^i}}, (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2 q_2^m}} \right\}_{m=1}^{\infty},$$

$$B_1 = \sup_m \left\{ (\mu(D_2))^{\frac{1}{p_2^m q_2}} \right\}_{m=1}^{\infty}, \quad C_1 = \max\{A_1, B_1\},$$

$$S_1 = \max \left\{ \|k_1\|_{L_{\infty}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))}, \|k_1\|_{L_{\infty}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))} \right\}.$$

Применение метода последовательных приближений приводит к необходимости бесконечных итераций ($m \rightarrow \infty$), тогда из неравенства (2) следует, что ядро $k_1(x_1, x_2; t_1)$ и функция $f(x_1, x_2)$ должны принадлежать пространству существенно ограниченных по переменной x_2 функций $k_1(x_1, x_2; t_1) \in L_{\infty}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$, $f(x_1, x_2) \in L_{\infty}(D_2; L_{p_1}(D_1))$.

Решение (1) можно представить в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda \int_{D_1} r_1(x_1, x_2; t_1; \lambda) f(t_1, x_2) dt_1, \quad (3)$$

где при $|\lambda| C_1 S_1 < 1$ резольвента $r_1(x_1, x_2; t_1; \lambda)$ ограничена в анизотропном пространстве $L_{\infty}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$ и имеет вид

$$r_1(x_1, x_2; t_1; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} k_1^{(j+1)}(x_1, x_2; t_1) \lambda^j.$$

Теорема 1. *Если $|\lambda| < C_1^{-1} S_1^{-1}$, то уравнение (1) при этом значении λ в $L_{(p_1, \infty)}(D)$ имеет единственное решение, и это решение определяется формулой (3).*

Литература

1. Lyakhov L.N. About Fredholm equations for partial integral in \mathbb{R}_2 / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemcev, N.I. Trusova // Journal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 251. — № 6. — P. 839 – 849.

О СПЕКТРЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.С. Макин (Москва, МИРЭА)
alexmakin@yandex.ru

В настоящей работе мы изучаем обратную спектральную задачу для системы Дирака

$$B y' + V y = \lambda y, \quad (1)$$

где $\mathbf{y} = \text{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

комплекснозначные функции $p, q \in L_2(0, \pi)$ с периодическими (антипериодическими) краевыми условиями

$$y_1(0) - (-1)^\theta y_1(\pi) = 0, \quad y_2(0) - (-1)^\theta y_2(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $\theta = 0, 1$.

Обозначим через

$$E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) & -s_2(x, \lambda) \\ s_1(x, \lambda) & c_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1) с краевыми условиями $E(0, \lambda) = I$, где I единичная матрица. Матрица $E(\pi, \lambda)$ называется матрицей монодромии оператора (1). Для ее элементов введем обозначения $c_j(\lambda) = c_j(\pi, \lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi, \lambda)$, $j = 1, 2$. Обозначим также через PW_σ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ , таких что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$.

Хорошо известно, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) может быть приведен к виду

$$\Delta(\lambda) = (-1)^{\theta+1} + \frac{c_1(\lambda) + c_2(\lambda)}{2},$$

а собственные значения определяются асимптотическим формулами

$$\lambda_{n,j} = 2n + \theta + \varepsilon_{n,j}, \quad (3)$$

где $\varepsilon_{n,j} \in l_2$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $u(\lambda)$ являлась характеристическим определителем задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде*

$$u(\lambda) = (-1)^{\theta+1} + \cos \pi \lambda + f(\lambda),$$

где $f(\lambda) \in PW_\pi$ и $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$.

Теорема 2. *Для того, чтобы множество Λ являлось спектром некоторой задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы оно состояло из двух последовательностей собственных значений $\lambda_{n,j}$, удовлетворяющих соотношению (3) и условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,1} + \varepsilon_{n,2}}{2n - 2k - 1} \right| < \infty.$$

Характеристика спектров самосопряженного оператора Дирака с периодическими (антипериодическим) краевыми условиями существенно различными методами была дана в [1] и [2]. Обзор работ по обратным задачам для несамосопряженных дифференциальных систем первого порядка приведен в [3].

Литература

1. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порожденных операцией Дирака. II. // Т.В. Мисюра // Теория функций, функц. анал. и их прилож. — 1979. — Т. 31. — С. 102-109.

2. Nabiev I.M. The inverse periodic problem for the Dirac operator / I.M. Nabiev // Proceeding of IMM of NASA. — 2003. — V. XIX. — P. 177-180.

3. Yurko V.A. Inverse Spectral Problems for Differential Systems / V.A. Yurko // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis (OTHA-2018). — Rostov-on-Don. Springer. — 2018. — V. 291. — P. 451-475.

БИФУРКАЦИЯ НЕЙМАРКА-САКЕРА В СИСТЕМЕ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ РАЗНОСТНЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ¹

Е.А. Марушкина (Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова)
marushkina-ea@yandex.ru

Рассмотрим систему трех связанных разностных RCLG-генераторов (см., например, [1]):

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial u_j}{\partial t} + \mu^2 u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad u_j \Big|_{x=0} + \varphi \left(K \left(u_j \Big|_{x=1} + \alpha u_{j-1} \Big|_{x=0} \right) \right) = 0, \quad u_0 = u_3. \quad (2)$$

Здесь $u_j(t, x)$ — нормированные напряжения в линиях соответствующих генераторов, 2μ — потери в линии (предполагаются малыми), $K > 0$ — коэффициент усиления, а $|\alpha| \ll 1$ — параметр, характеризующий связь между генераторами. Функция $\varphi(z)$ получается из нелинейной характеристики усилителя в результате

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10043).

© Марушкина Е.А., 2021

сдвига рабочей точки в начало координат. Простейший пример такой функции задается формулой $\varphi(z) = z(1 + z^2)^{-1/2}$. В окрестности нуля данная функция допускает следующее разложение: $\varphi(z) = z - z^3/2 + (3/8)z^5 + \dots$

При некоторых дополнительных ограничениях замена

$$u_j = e^{-\mu t} (h_j(t + (x - 1)) + h_j(t - (x - 1)))$$

приводит краевую задачу (1)—(2) к системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} v_j(t+1) = w_j(t) \\ w_j(t+1) = -(1-\varepsilon)v_j(t) - \varphi(Kw_j(t)) + \nu\varphi'(Kw_j(t))\varphi(Kw_{j-1}(t)), \end{cases} \quad (3)$$

где $w_j(t) = h_j(t)\exp(1 - \mu t)$, $v_j(t) = w_j(t - 1)$, $j = 1, 2, 3$, $v_0 = v_3$, $w_0 = w_3$, $\varepsilon = 1 - \exp(-2\mu)$, $\nu = \alpha K$, а величина $2K \exp(-\mu)$ снова обозначена K .

В работе изучен вопрос о характере потери устойчивости нулевым состоянием равновесия системы разностных уравнений (3). Показано, что матрица линейной части системы (3) имеет при $\varepsilon = 0$ и $0 < K < 2$ пару собственных чисел $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega_0)$, где $\omega_0 = \arccos(-K/2)$, кратности три, которая лежит на единичной окружности комплексной плоскости.

Для бифуркации Неймарка-Сакера [2] необходимо выполнение условий $e^{i\omega_n j} \neq 1$ для $j = 0, 1, 2, 3, 4$. В работе найдены такие значения параметра K , при которых реализуются резонансы, построена нормальная форма отображения (3) и изучены ее динамические свойства.

Автор выражает благодарность Глызину С.Д. за помощь в постановке задачи.

Литература

1. Глызин С.Д. Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов / С.Д. Глызин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 49–57.

2. Sacker R.J. A new approach to perturbation theory of invariant surfaces / R.J. Sacker // Comm. Pure Appl. Math. — 1965. — Vol. 18. — P. 717–732.

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛКИЛИРОВАНИЯ ГЕНЕТИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ И МЕТОДОМ ОПТИМИЗАЦИИ РОЯ ЧАСТИЦ¹

Д.Ф. Махмутова, Л.В. Еникеева (Уфа, УГНТУ)
mahmutenko.dianka@gmail.com, leniza.enikeeva@yandex.ru

В последние годы интенсивно развиваются алгоритмы поисковой оптимизации. Среди них наибольшую популярность набирают популяционные алгоритмы. Их эффективность часто превосходит эволюционные алгоритмы. Значительное внимание в докладе уделяется методу роя частиц и генетическому алгоритму.

Моделирование – это изучение объекта путем построения и исследования его модели, осуществляемое с определенной целью. Поэтому модель должна строиться так, чтобы она наиболее полно воспроизводила те качества объекта, которые необходимо изучать в соответствии с поставленной целью.

Алкилированием называется реакция введения алкильной группы в молекулы органических соединений. Наиболее распространенными алкилирующими агентами являются галоидные алкилы, алкены, спирты и диалкилсульфаты. Способность атома галогена в молекулах галоидных алкилов к реакциям нуклеофильного замещения делает эти соединения незаменимыми алкилирующими агентами. Легче всего подвергается обмену (более подвижен) атом йода, что связано с его большей поляризуемостью. Хлориды и бромиды сравнительно мало отличаются по реакционной способности, алкилфториды для целей алкилирования непригодны, так как атом фтора вследствие малой поляризуемости слишком инертен. Скорость реакции алкилирования при применении третичных галоидных алкилов выше [1].

Для моделирования химического процесса необходимо разработать его кинетическую модель. Для этого решается задача глобальной оптимизации. В данной работе будем применять следующие алгоритмы: метод роя частиц и генетический алгоритм.

Метод роя частиц (particle swarm optimization) – метод численной оптимизации, для использования которого не требуется знать точного градиента оптимизируемой функции. Данный метод относится к группе алгоритмов роевого интеллекта (swarm intelligence), которые описывают коллективное поведение децентрализованной самоорга-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-60014).

© Махмутова Д.Ф., Еникеева Л.В., 2021

низирующейся системы. Системы роевого интеллекта, как правило, состоят из множества агентов, локально взаимодействующих между собой и с окружающей средой. Метод роя частиц является метаэвристикой, хорошо зарекомендовавшей себе при решении различных оптимизационных задач. Его отличительной особенностью от многих других методов является то, что для метода роя частиц необходимо уметь вычислять только значения оптимизируемой функции, не обязана быть дифференцируемой, более того, она может быть разрывной, зашумленной и т.п. [2].

Генетический алгоритм позволяет осуществлять поиск оптимальных решений для целого ряда практических задач, также заметим, что широта сферы применения генетического алгоритма обусловлена, прежде всего, универсальностью, а также способностью одновременно оптимизировать решения задачи несколькими критериями. Анализ результатов использования генетического алгоритма позволяет выделить следующие условия, при которых задача решается эффективно:

- сложно формализуемая функция степени качества решения; - многокритериальность поиска;

- поиск по заданным критериям приемлемого, а не единственного оптимального решения. Пригодность для поиска в сложном пространстве решений большой размерности [3].

В данной работе для поиска кинетических параметров применяются перечисленные алгоритмы. На конференции будут представлены результаты численного моделирования.

Литература

1. Петров А.А. Органическая химия : учебник для вузов / А.А. Петров, Х.В. Бальян, А.Т. Трощенко. – СПб. : Иван Федоров, – 2002. – 672 с

2. J. Kennedy, R. C. Eberhart. Particle swarm optimization, Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Piscataway, NJ, pp. 1942–1948, 1995.

3. S. Achasova, O. Bandman, V. Markova, et al. Parallel Substitution Algorithm. Theory and Application., Singapore: World Scientific, 1994.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕФТЯНОГО РЕЗЕРВУАРА¹

А.М. Мейрманов, О.В. Гальцев,
В.Е. Сельдемиров (Белгород, Белгородский государственный
национальный исследовательский университет)
galtsev_@bsu.edu.ru

Математические модели нефтяного резервуара, корректные с физической и математической точек зрения, весьма актуальны как с практической, так и с теоретической точек зрения. Только такие модели должны быть основой гидродинамических симуляторов нефтяного резервуара. Наибольшее влияние на процессы, протекающие в пористой среде грунта, оказывает динамика границы контакта нефти и вытесняющей жидкости, если говорить о вытеснении нефти водой. Или же границы контакта кислоты и твердого тела, если говорить об очистке призабойной зоны нефтяной скважины активными кислотами.

Например, в существующих гидродинамических симуляторах нефтяного резервуара, таких, как Eclipse, Black Oil (Schlumberger), Tempest (Roxar), VIP (Landmark), TimeZYX (Standard Oil and Trust), используется модель Баклея-Левретта [1] или ей подобные модели. Эти модели не опираются на какие-либо физические законы, но декларируют эту связь введением искусственных параметров (например, относительная проницаемость и капиллярное давление). Таким образом, не существует каких-либо математических моделей вытеснения нефти водой в горных породах, корректных с физической и математической точек зрения.

Модели типа модели Баклея-Левретта называются феноменологическими макроскопическими математическими моделями, то есть представляющие собой набор постулатов, описывающие физический процесс на макроскопическом уровне, где характеристическим размером являются метры или десятки метров.

Аналогично, все известные до настоящего времени математические модели растворения горных пород, например, в [2]-[4], являются макроскопическими. Уравнения, описывающие миграцию кислоты и продуктов химических реакций просто постулируются и являются модифицированными уравнениями диффузии-конвекции для соответствующих концентраций. И, как было сказано выше, указанные

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00105).

© Мейрманов А.М., Гальцев О.В., Сельдемиров В.Е., 2021

модели не различают микроструктуру сплошной среды, поскольку в такой модели в каждой точке сплошной среды присутствует как горная порода (твердый скелет), так и жидкость в порах этого скелета. Динамика жидкостей, как правило, управляется системой уравнений фильтрации Дарси или какой-либо ее модификацией. Главным в этих постулатах является вид коэффициентов уравнений.

Мы предлагаем шкалу (набор) математических моделей, дополненных цифровыми характеристиками физических (плотности и упругости твердого скелета, плотности и вязкости фильтрующихся жидкостей) и геометрических (пористость, проницаемость и т. п.) характеристик нефтяного резервуара. При этом все макроскопические модели выведены с применением прогрессивных методов усреднения из фундаментальных законов механики сплошных сред, описывающих рассматриваемые физические процессы на микроскопическом уровне (характеристический размер-десятки микрон).

Решение этой проблемы поможет оптимизировать нефтеотдачу добывающих скважин путем оптимального управления геометрией границы контакта различных фаз.

Литература

1. Buckley S.E. Mechanism of fluid displacements in sands / S.E. Buckley, M.C. Leverett // Transactions of the AIME. — 1942. — V. 146. — pp. 107–116.
2. Kalia N. Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates / N. Kalia, V. Balakotaiah // Chemical Engineering Science. — 2009. — V. 64. — pp. 376–390.
3. Cohen C.E. From pore scale to wellbore scale: Impact of geometry on wormhole growth in carbonate acidization / C.E. Cohen, D. Ding, M. Quintard, B. Bazin // Chemical Engineering Science. — 2008. — V. 63. — pp. 3088–3099.
4. Panga M.K. Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization / M.K. Panga, M. Ziauddin, V. Balakotaiah // A. I. Ch. E. Journal. — 2005. — V. 51. — pp. 3231–3248.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ФОРМУЛЫ ДЛЯ СУММ НЕКОТОРЫХ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ¹

К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова (Москва, МГУ; Архангельск, САФУ; Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ)
mirzoev.karahan@mail.ru, t.Safonova@narfu.ru

В работах [1] и [2] нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных самосопряжённых дифференциальных операторов получать формулы для сумм некоторых сходящихся числовых рядов и новые интегральные представления для некоторых специальных функций. Этот метод, в частности, позволяет установить справедливость следующей теоремы (см.[1], теорема 1).

Теорема 1. Пусть $\alpha \in [0, 1)$ и $P_n(x)$ — некоторый многочлен степени $n \geq 2$ с вещественными коэффициентами и такой, что $P_n(k + \alpha) \neq 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и пусть $G_\alpha(x, t)$ — функция Грина задачи

$$\begin{cases} P_n(i \frac{d}{dx})y = f \\ y^{(j)}(0) - e^{2\pi i \alpha} y^{(j)}(2\pi), \quad j = 0, \dots, n-1 \end{cases}. \quad (1)$$

Тогда справедливо тождество

$$G_\alpha(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(k+\alpha)(x-t)}}{P_n(k+\alpha)}.$$

Следствие 1. Пусть многочлен $P_n(x)$ удовлетворяет условиям из теоремы 1. Тогда выполняется равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P_n(k+\alpha)} = 2\pi G_\alpha(0, 0). \quad (2)$$

Замечание 1. Особо отметим, что функция Грина задачи (1) весьма просто и эффективно строится, т.к. она является функцией Грина граничной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Поэтому формула (2) позволяет найти сумму любого ряда, стоящего в её левой части.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20261).
© Мирзоев К.А., Сафонова Т.А., 2021

Следствие 2. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geq 2$ с вещественными коэффициентами и такой, что $P_n(k + 1/2) \neq 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{P_n(k + 1/2)} + \frac{1}{P_n(-k - 1/2)} \right) = 2\pi G_{1/2}(0, 0), \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{P_n(-k - 1/2)} - \frac{1}{P_n(k + 1/2)} \right) = 2\pi i G_{1/2}(0, \pi). \quad (4)$$

Замечание 2. В случае $P_{2m}(x) = x^{2m}$ формула (3) совпадает со знаменитой формулой Эйлера для значений дзета-функции Римана

$$\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

а формула (4) в случае $P_{2m+1}(x) = x^{2m+1}$ — с формулой Эйлера для значений бета-функции Дирихле

$$\beta(2m + 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k - 1)^{2m+1}} = \frac{(-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}}{2(2m)!} E_{2m}, \quad m = 0, 1, \dots,$$

где B_{2m} и E_{2m} — числа Бернулли и Эйлера соответственно. Поэтому формулы (3) и (4) являются обобщениями этих формул на любой допустимый многочлен.

Хорошо известно, что для $\zeta(2m + 1)$ и $\beta(2m)$ никаких формул, выражающих их как значения некоторых элементарных функций, не существует. Поэтому наличие общих формул (2) – (4), справедливых для любого допустимого многочлена, приобретает особую значимость.

Литература

1. Мирзоев К.А. Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Доклады АН. — 2018. — Т. 482, вып. 5. — С. 500–503.

2. Мирзоев К.А. Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Труды ММО. — 2019. — Т. 80, вып. 2. — С. 157–177.

О ФУНКЦИИ РИМАНА — АДАМАРА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БИАНКИ

А.Н. Миронов (Елабуга, Елабужский институт

Казанского федерального университета;

Самара, Самарский государственный технический университет)

miro73@mail.ru

Здесь речь идет о функции Римана — Адамара задачи Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка

$$L(u) \equiv u_{xyz} + a(x, y, z)u_{xy} + c(x, y, z)u_{xz} + b(x, y, z)u_{yz} + \\ + d(x, y, z)u_x + e(x, y, z)u_y + f(x, y, z)u_z + g(x, y, z)u = h(x, y, z). \quad (1)$$

Указанное уравнение рассматривалось, например, в работах [1]–[3]. В статье [3] доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу для трехмерного уравнения Бианки, определена функция Римана — Адамара задачи Дарбу, построено решение задачи Дарбу в терминах функции Римана — Адамара.

Определим класс функций $C^{(k,l,m)}(D)$ следующим образом: функция $u \in C^{(k_1,k_2,k_3)}(D)$, если в области D существуют непрерывные производные $\frac{\partial^{r_1+r_2+r_3}u}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}}$ ($r_i = 0, \dots, k_i$). Решение класса $C^{(1,1,1)}(D)$ назовем регулярным в D . Потребуем, чтобы коэффициенты уравнения (1) удовлетворяли включениям $a \in C^{(1,1,0)}(\overline{D})$, $c \in C^{(1,0,1)}(\overline{D})$, $b \in C^{(0,1,1)}(\overline{D})$, $d \in C^{(1,0,0)}(\overline{D})$, $e \in C^{(0,1,0)}(\overline{D})$, $f \in C^{(0,0,1)}(\overline{D})$, $g, h \in C^{(0,0,0)}(\overline{D})$.

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $y = y_0 > 0$, $z = x$, $z = z_0 > 0$. Обозначим через X, Y, T грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = x$ соответственно.

Задача Дарбу. В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y, z), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x, z), \quad u|_{\overline{T}} = \psi(x, y), \\ \varphi_1(y, 0) = \psi(0, y), \quad \varphi_2(x, x) = \psi(x, 0), \quad \varphi_1(0, z) = \varphi_2(0, z), \quad (1) \\ \varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \psi \in C^{(1,1)}(\overline{T}).$$

Возьмем внутри области D произвольную точку $P(\xi, \eta, \zeta)$. Она определяет область D_P , которая состоит из двух частей — параллелепипеда D_1 и призмы D_2 .

Функция Римана — Адамара задачи Дарбу $H(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ определяется следующим образом:

$$H(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} R(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), & (x, y, z) \in D_1, \\ V(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), & (x, y, z) \in D_2, \end{cases} \quad (2)$$

где R — функция Римана для уравнения (1), а функция V должна удовлетворять сопряженному к (1) уравнению

$$L^*(u) \equiv v_{xyz} - (a(x, y, z)v)_{xy} - (c(x, y, z)v)_{xz} - (b(x, y, z)v)_{yz} + \\ + (d(x, y, z)v)_x + (e(x, y, z)v)_y + (f(x, y, z)v)_z - g(x, y, z)v = 0 \quad (3)$$

и дополнительным условиям, которые приводят к задаче Дарбу для уравнения (3) в области D_2 . Получаем для функции V задачу Дарбу, решение которой существует и единственно. Таким образом, функция Римана — Адамара определена, существует и единственна в \overline{D} .

Получены достаточные условия на коэффициенты уравнения (1), обеспечивающие построение функции Римана — Адамара в явном виде (в терминах гипергеометрических функций).

Литература

1. Жегалов В.И. Трехмерный аналог задачи Гурса / В.И. Жегалов // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа, Новосибирск, ИМ СО АН СССР. — 1990. — С. 94–98.
2. Миронов А.Н. Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка / А.Н. Миронов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, вып. 3. — С. 389–400.
3. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка / А.Н. Миронов // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, вып. 1. — С. 64–71.

К ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Л.Б. Миронова (Елабуга, Елабужский институт

Казанского федерального университета)

lbironova@yandex.ru

Рассмотрим систему уравнений [1]

$$\begin{cases} u_{1x} = a_{11}(x, y)u_1 + a_{12}(x, y)u_2 + f_1(x, y), \\ u_{2y} = a_{21}(x, y)u_1 + a_{22}(x, y)u_2 + f_2(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, f_1, f_2 \in C(\overline{D})$. Решение класса $u_1, u_2, u_{1x}, u_{2y} \in C(D)$ будем называть регулярным в рассматриваемой области D . Линейное преобразование искомым функций приводит (1) к случаю, когда $a_{11} \equiv a_{22} \equiv 0$. Далее будем считать эти тождества выполненными.

Перепишем (1) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{U}_x + \mathbf{B}\mathbf{U}_y - \mathbf{C}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \text{colon}(u_1, u_2), \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \text{colon}(f_1, f_2).$$

Задача Дарбу: найти регулярное решение системы уравнений (1) в области $D_0 = \{(x, y) : 0 < y < x < T\}$, которое непрерывно продолжимо на границу области D_0 и удовлетворяет граничным условиям

$$u_1(y, y) = \lambda(y), u_2(x, 0) = \mu(x), \quad (1)$$

$$\lambda(y) \in C([0, T]), \quad \mu(x) \in C([0, T]).$$

Решение задачи Дарбу существует и единственно [2, с. 26–29].

Зафиксируем точку $P(\xi, \eta) \in D_0$ и рассмотрим соответствующие этой точке четырехугольник $D_p = \{(x, y) : y < x < \xi, 0 < y < \eta\} \subset D_0$ с вершинами в точках $O(0, 0), P_1(\eta, \eta), P(\xi, \eta), P_3(\xi, 0)$, прямоугольник $D_1 = \{(x, y) : \eta < x < \xi, 0 < y < \eta\}$ с вершинами в точках $P, P_1, P_2(\eta, 0), P_3$, и треугольник $D_2 = \{(x, y) : y < x < \eta, 0 < y < \eta\}$ с вершинами в точках O, P_1, P_2 .

Определим матрицу Римана — Адамара задачи Дарбу $H(x, y, \xi, \eta)$. Пусть

$$H(x, y, \xi, \eta) = \begin{cases} R(x, y, \xi, \eta), & (x, y) \in D_1, \\ V(x, y, \xi, \eta), & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где R — матрица Римана [1], [3], а матрицу $\mathbf{V} = \text{colon}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$, где векторы $\mathbf{V}_i(x, y, \xi, \eta) = (\bar{r}_{i1}, \bar{r}_{i2})$, $i = \overline{1, 2}$, нужно доопределить в области D_2 .

Потребуем, чтобы V_1, V_2 были решениями задач Дарбу в области D_2 для систем

$$\bar{r}_{i1x} = -a_{21}(x, y)\bar{r}_{i2}, \quad \bar{r}_{i2y}(x, y) = -a_{12}(x, y)\bar{r}_{i1}, \quad i = 1, 2,$$

с условиями соответственно

$$\bar{r}_{11}(\eta, y, \xi, \eta) = r_{11}(\eta, y, \xi, \eta), \quad \bar{r}_{12}(y, y, \xi, \eta) = 0$$

для вектора V_1 и

$$\bar{r}_{21}(\eta, y, \xi, \eta) = r_{21}(\eta, y, \xi, \eta), \quad \bar{r}_{22}(y, y, \xi, \eta) = 0$$

для вектора V_2 .

Проинтегрируем тождество (2) по прямоугольнику D_1 и треугольнику D_2 . Сложив полученные равенства и используя свойства матрицы Римана — Адамара, вытекающие из ее определения, получим

$$\int_0^\eta u_1(\xi, y)dy = F_1(\xi, \eta), \quad \int_\eta^\xi u_2(x, \eta)dx = F_2(\xi, \eta), \quad (3)$$

где $F_1(\xi, \eta)$, $F_2(\xi, \eta)$ полностью определяются через матрицу Римана — Адамара H и граничные условия задачи Дарбу. Дифференцируя первое равенство (3) по η , а второе — по ξ , получим решение задачи Дарбу в терминах матрицы Римана — Адамара.

Литература

1. Mironova L.B. Boundary-value Problems with Data on Characteristics for Hyperbolic Systems of Equations / L.B. Mironova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — V. 41, № 3. — P. 400–406.
2. Чекмарев Т.В. Системы уравнений смешанного типа / Т.В. Чекмарев. — Н. Новгород: Нижегородский гос. техн. ун-т, 1995. — 199 с.

3. Миронова Л.Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками / Л.Б. Миронова // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 1. — С. 34–39.

УСЛОВИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Х. Мохамад (Воронеж, ВГУ)

abdulfatah.hosni90@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U\right) = B\left(\frac{\partial U(t, x)}{\partial x} + \beta U\right) + CU(t, x) + f(t, x), \quad (1)$$

где $A : E_1 \rightarrow E_2$, E_1, E_2 банаховы пространства; A - замкнутый линейный фредгольмов оператор, с нулевым индексом, с плотной в E_1 областью определения $D(A)$, $\overline{dom}A = \overline{dom}C = E_1$; $B, C \in L(E_1, E_2)$, B - необратимый; $(t, x) \in T \times X$, $T = [0, t_k]$, $X = [0, x_k]$; $f(t, x)$ - заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E_2 ; $U = U(t, x)$ искомая вектор-функция, α, β скалярные функции; $\alpha = \alpha(t, x), \beta = \beta(t, x)$.

изучается решение уравнения (1) с ограниченными условиями

$$U(t, 0) = \psi(t) \in N, \quad U(0, x) = \varphi(x) \in M. \quad (2)$$

где $\varphi(x), \psi(t)$ - заданные достаточно гладкие вектор-функции.

Благодаря широкому применению аналитических решений [1,2], мы пытаемся найти аналитическое решение уравнения (1), (2).

Дескрипторные системы нашли свое применение при моделировании движения самолетов, химических процессов, экономических систем, энергетических систем.

В этой работе исследуется решение уравнения (1) с условием (2) когда оператор-пучок $A - \lambda B$ является регулярным (то есть обратимости пучка при λ достаточно малых по модулю не равных нулю ($\lambda \in \dot{U}(0) \cap \mathbb{C}$)). За счёт оператора A является Фредгольмовым, пространства E_1 и E_2 расщепляются в прямые суммы относительно оператора $(A - \lambda B)^{-1}A$:

$$E_1 = Ker A \oplus Coim A, \quad E_2 = Im A \oplus Coker A, \quad (3)$$

Теорема 1. Если оператор $P(A - \lambda B)^{-1}CQ = 0$, операторы $Q(A - \lambda B)^{-1}CQ$ и $Q(A - \lambda B)^{-1}AQ$ коммутируют, и оператор $P(A - \lambda B)^{-1}CP$ является верхним треугольным оператором. Решение $U(t, x)$ задачи (1), (2) существует и единственно при выполнении условия согласования.

P и Q проекторы на $\text{Ker}A$ и $\text{Coim}A$ соответственно.

Литература

1. J. Manafian, B. Mohammadi-Ivatloo, and M. Abarpour, *Lump-type solutions and interaction phenomenon to the (2+1)-dimensional Breaking Soliton equation*, Appl. Math. Comput., 13 (2019), 13-41.

2. J. Manafian, M. Lakestani, *N-lump and interaction solutions of localized waves to the (2+1)-dimensional variable-coefficient Caudrey–Dodd–Gibbon–Kotera–Sawada equation*, J. Geo. Phys., 150 (2020) 103598.

3. Нгуен Х. Д. О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных / Х.Д. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2013. - Т. 6, № 1. - С. 98–111.

4. Зубова С.П. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / С.П.Зубова // Вестник Воронежского гос. унта. Серия: Физика. Математика, 2013. - № 2. Июль-декабрь. - С. 134-140.

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ¹

Д.А. Неверова (Москва, РУДН)
dneverova@gmail.com

Работа посвящена изучению качественных свойств решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Для рассматриваемых задач ранее были получены результаты о существовании обобщенных решений и доказано, что гладкость этих решений сохраняется в некоторых подобластях, но может нарушаться внутри области даже для бесконечно гладкой функции правой части.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение №075 – 03 – 2020 – 223/3 (FSSF-2020-0018).

© Неверова Д.А., 2021

Рассматривается уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q \subset \mathbb{R}^n)$$

с краевым условием

$$\sum_{i,j=1}^n R_{ijQ}u_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma(x)u = 0 \quad (x \in \partial Q),$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q ; $\sigma \in C^k(\partial Q)$ — неотрицательная вещественнозначная функция; операторы R_{ijQ} определены по формуле $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$; $I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q ; $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ — симметрические разностные операторы вида

$$(R_{ij}u)(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh}(u(x+h) + u(x-h)) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Здесь $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами; a_{ijh} — вещественные числа, $a_{ijh} = a_{jih}$ ($i, j = 1, \dots, n, h \in \mathcal{M}$).

Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством \mathcal{M} , а через Q_r — открытые связанные компоненты множества $Q \setminus \bigcup_{h \in M} (\partial Q + h)$. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*. Введем множество \mathcal{K} :

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \{\bar{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}.$$

Для рассматриваемой задачи доказана гладкость обобщенного решения в подобластях за исключением ε -окрестности точек множества \mathcal{K} . Предметом исследования является получение условий на коэффициенты разностных операторов, гарантирующих гладкость решений на границе соседних подобластей. Показано, что нормальная производная обобщенного решения может иметь разрывы на границе соседних подобластей, ввиду чего для сохранения гладкости решения требуются дополнительные условия на коэффициенты разностных операторов. Получены необходимые и достаточные условия

сохранения гладкости решений на границе подобластей в пространстве Гельдера. Приведены примеры, в которых условия гладкости обобщенного решения на границе соседних подобластей в шкале пространств Гельдера автоматически выполняются, если решение сохраняется гладким на этой границе в пространстве Соболева, и где это не так. Описанные результаты опубликованы в работах из списка литературы.

Литература

1. Гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений/ Неверова Д. А.// Соврем. мат. Фундам. направл. – 2019. – Т.65, № 4.–С. 655-671.

2. Neverova D.A. Regularity of solutions to the Robin problem for differential-difference equations // Complex Variables and Elliptic Equations. Опубликовано Online. DOI: 10.1080/17476933.2020.1833872

О ДИСКРЕТНОМ НЕРАВЕНСТВЕ СРЕДНЕГО ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р.А. Осин (Москва, НИЯУ МИФИ)

roman.osin99@mail.ru

Достаточным условием субгармоничности непрерывной в области $G \in \mathbb{R}^2$ функции $u(z)$ является выполнение для каждой точки z_0 области при любом сколь угодно малом радиусе r окружности $C_r(z_0)$ с центром в этой точке неравенства среднего

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r(z_0)} u(z) dl.$$

Дискретную форму этого неравенства представил М.А.Крейнес [1]. Показано, что если найдется $n \geq 3$ такое, что для каждой точки $z_0 \in G$ существует окружность $C_r(z_0) \in G$ сколь угодно малого радиуса с центром в этой точке, которой принадлежит набор точек $\{z_j\}_{j=1}^n$ расположенных в вершинах правильного n -угольника, выполнено неравенство

$$u(z_0) \leq \frac{u(z_1) + u(z_2) + \dots + u(z_n)}{n} \quad (1)$$

и функция $u(z)$ непрерывна в области G , то она является субгармонической функцией внутри области G [2].

Рассмотрим вопрос о расположении точек набора $\{z_j\}_{j=1}^n$ на окружности в вершинах вписанного, но не обязательно правильного n -угольника, при котором остается справедливым неравенство среднего (1), достаточное для субгармоничности функции $u(z)$.

Легко проверить, в случае количества точек $n = 3, 4, 5$, набор может быть расположен в вершинах только правильного n -угольника. При $n = 6$ точки z_j располагаются в вершинах двух правильных треугольников, повернутых друг относительно друга (см. Рисунок 1).

Начиная с $n = 7$ возможно расположение точек z_j в вершинах неправильного многоугольника, неразбиваемого на правильные (см. Рисунок 2).

Набор точек на окружности для которого из выполнения неравенства (1) следует субгармоничность непрерывной функции будем называть *приемлемым*. Всё вышеизложенное обобщается в утверждение.

Утверждение 1. Если функция $u(z)$ определена в области G и

а) удовлетворяет в каждой точке области некоторому условию непрерывности по направлениям h -регулярности (подробнее в [3]);

б) в любой окрестности каждой точки $z_0 \in G$ найдется окружность $C_r(z_0)$ радиуса r с центром в z_0 , на которой при $n \geq 3$ (различным для каждой окружности) расположен набор точек $\{z_j\}_{j=1}^n$ в которых выполнено неравенство (1);

в) выполнена локальная суммируемость $(|u(z)|)^p$ в G при всех $p < 2$.

Тогда функция $u(z)$ субгармонична в области G .

Литература

1. Привалов И.И. Субгармонические функции / И.И. Привалов. — Математика в монографиях. Основная серия, книга II. — М.–Л. : ОНТИ, 1937. — 200 с.

2. Privaloff I.I. Sur les fonctions harmoniques /I.I Privaloff // Матем. сб. — 1925. — Т. 32, № 3. — С. 464–471.

3. Теляковский Д.С. О достаточном условии гармоничности функций двух переменных, удовлетворяющих разностному уравнению Лапласа /Д.С. Теляковский // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, вып. 4. — С. 269–283.

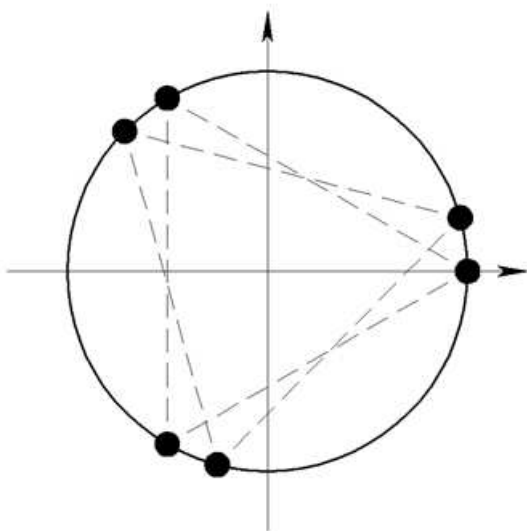


Рисунок 1

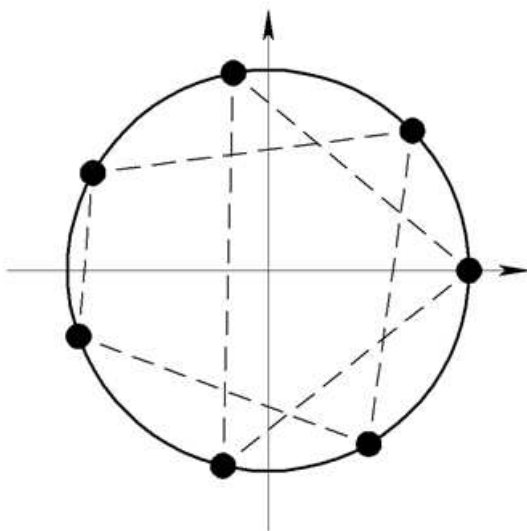


Рисунок 2

НОВАЯ БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ¹

Г.П. Пальшин (Москва, Финансовый университет при
Правительстве Российской Федерации)
gleb.palshin@yandex.ru

Рассматривается интегрируемая модель вихревой динамики, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\Gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}(z_1, z_2), \quad \Gamma_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}(z_1, z_2), \quad k = 1, 2 \quad (1)$$

с гамильтонианом H

$$H = \frac{1}{2} \left[\Gamma_1^2 \ln(1 - |z_1|^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - |z_2|^2) + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left(\frac{[|z_1 - z_2|^2 + (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)]^\varepsilon}{|z_1 - z_2|^{2(c+\varepsilon)}} \right) \right]. \quad (2)$$

Здесь, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$ обозначают декартовы координаты k -ого вихря с интенсивностями Γ_k . Физический параметр « c » отражает взаимодействие между вихрями, параметр ε является параметром возмущения. Гамильтониан (2) включает два предельных случая, а именно, гамильтониан модели двух точечных вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна, заключенного в гармоническую ловушку ($\varepsilon = 0$) [1], и гамильтониан модели точечных вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью ($c = 0$, $\varepsilon = 1$) [2].

Система (1) допускает дополнительный первый интеграл $F = \Gamma_1 |z_1|^2 + \Gamma_2 |z_2|^2$ и поэтому является вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Основную роль при исследовании таких систем играет бифуркационная диаграмма $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$, которая представляет собой образ множества критических точек \mathcal{C} отображения момента $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = (F(\mathbf{z}), H(\mathbf{z}))$, $\mathcal{P} = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1, z_1 \neq z_2\}$.

На рис. 1 представлена новая бифуркационная диаграмма, которая ранее не встречалась в работах (см. [3]).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00399).

© Пальшин Г.П., 2021

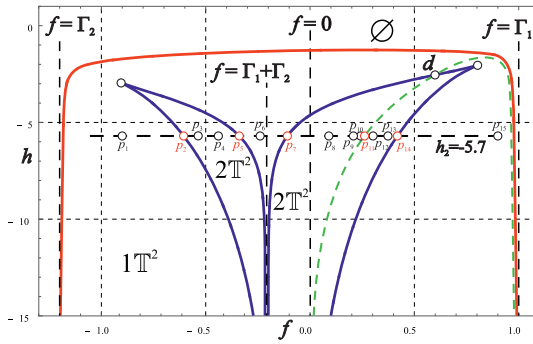


Рис. 1. Новая бифуркационная диаграмма Σ .

Для интенсивностей Γ_1 и Γ_2 *разных знаков* выполнена явная редукция к гамильтоновой системе с одной степенью свободы.

На рис. 2 показаны линии уровня редуцированного гамильтониана, которые соответствуют разделяющей кривой на бифуркационной диаграмме (см. рис. 1). Разделяющая кривая отвечает за изменение проекции тора в прообразе отображения момента без изменения их количества.

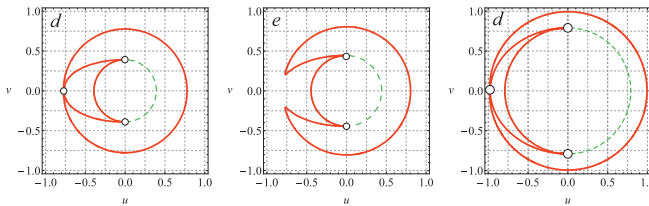


Рис. 2. Линии уровня редуцированного гамильтониана.

Литература

1. Koukouloyannis V. Dynamics of three noncorotating vortices in Bose–Einstein condensates / V. Koukouloyannis, G. Voyatzis, P.G. Kevrekidis // Phys. Rev. E. — 2014. — Vol. 89, № 4. — P. 042905-1–14.

2. Борисов А.В. Математические методы динамики вихревых структур / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. — М.-Ижевск : ИКИ, 2005. — 368 с.

3. Sokolov S.V. Bifurcation Analysis of the Dynamics of Two Vortices in a Bose–Einstein Condensate. The Case of Intensities of Opposite Signs / S.V. Sokolov, P.E. Ryabov // Regular and Chaotic Dynamics. — 2017. — Vol. 22, № 8. — P. 979–998.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ¹

А.В. Перескоков (Москва, НИУ ВШЭ, НИУ МЭИ)

pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим нерелятивистский гамильтониан атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon e_1 x_1 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \quad (1)$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \quad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в \mathbb{R}^3 , Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3 , а электрическое поле вдоль оси x_1 . Число $e_1 > 0$ — напряженность электрического поля, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Задача об атоме водорода в электромагнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особенностью данной задачи является наличие в гамильтониане одновременно и электрического, и магнитного полей, которые ортогональны друг другу. Это приводит к образованию резонансных спектральных кластеров около собственных значений невозмущенного атома водорода [1].

Среди состояний, описываемые гамильтонианом (1), особый интерес представляют состояния системы, отвечающие границам спектральных кластеров. В работе [2] был предложен метод построения асимптотики спектра около границ кластеров, основанный на новом интегральном представлении для асимптотических собственных функций. С его помощью в статьях [3], [4] были найдены асимптотики серий собственных значений оператора (1) вблизи границ спектральных кластеров при малых значениях напряженности e_1 . В данной работе рассмотрен случай, когда e_1 принимает произвольные положительные значения и не является малым параметром. Тогда [5] вблизи верхних границ спектральных кластеров имеется серия соб-

¹ Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

© Перескоков А.В. , 2021

ственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m \sqrt{9n^2 e_1^2 + 1} - \varepsilon^2 n^4 e_1^2 (4n^2 + 9n|m| - 6m^2) - \\ - 18\varepsilon^2 n^4 e_1^2 (n - |m|)(k + 1/2) + O(\varepsilon^2 n^4) + O(\varepsilon^3 n^{10}), \quad (2)$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/5}$, $1 \ll |m| < n$.

Формула (2) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана — Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях. Поскольку гамильтониан (1) содержит параметр e_1 , то возникает однопараметрическое семейство уравнений Гойна, к которым сводится усредненная задача в неприводимом представлении алгебры \mathcal{F}_{quant} Карасева — Новиковой с квадратичными коммутационными соотношениями. Асимптотика решений уравнений Гойна строится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений.

Литература

1. Карасев М.В. Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода / М.В. Карасев, Е.М. Новикова // ТМФ. — 2005. — Т. 142, № 3. — С. 530–555.
2. Перескоков А.В. Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осциллятора вблизи границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // Изв. РАН, сер. мат. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 165–210.
3. Мигаева А.С. Асимптотика спектра атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях вблизи нижних границ спектральных кластеров / А.С. Мигаева, А.В. Перескоков // Мат. заметки. — 2020. — Т. 107, № 5. — С. 734–751.
4. Pereskokov A.V. On the asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in orthogonal electric and magnetic fields near the upper boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // Russ. J. Math. Phys. — 2019. — Т. 26, № 3. — PP. 391–400.
5. Migaeva A.S. Semiclassical asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in an electromagnetic field near the upper boundaries of spectral clusters / A.S. Migaeva, A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. (N.Y.). — 2020. — Т. 251, № 6. — PP. 850–875.

РЕЗУЛЬТАТЫ УСПЕШНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СИЛЬНЫХ ШКВАЛОВ И СМЕРЧЕЙ НА ОСНОВЕ ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА В ТЕЧЕНИЕ АНОМАЛЬНОГО ЛЕТА 2020 ГОДА

Э.В. Переходцева (Москва, РГУ МИРЭА,
Гидрометцентр России)
elvperekhod@mail.ru

Летний сезон 2020 года, как известно, на европейской части России был аномально теплым. Положительные аномалии средней суточной температуры в июне и июле месяце составляла 2- 5 градусов, а средней дневной температуры иногда и 7 градусов. В августе месяце также наблюдалась положительная аномалия температуры.

Жители России помнят, я думаю, по сводкам погоды летнего сезона 2020 года, что временами европейская часть России в течение нескольких дней находилась в зоне антициклона с сухим воздухом, который сменялся надвигающимися обычно из Европы южными циклонами, приносящими влажный воздух. При этом температура в российском регионе понижалась весьма незначительно, сохранялась ее положительная аномалия.

Эти факторы наряду с изменением и некоторых других параметров атмосферы, исследованных автором и включенных в гидродинамико-статистическую модель, привели к тому, что область возникновения очень сильных шквалов со скоростью 25м/с (90км/ч) и даже смерчей протянулась на север, где ранее явления такой интенсивности не наблюдались. Большинство этих явлений, несмотря на необычную географию их возникновения, были успешно предупреждены с заблаговременностью 12, 24 и даже 36ч в оперативном режиме на основе гидродинамико-статистической модели прогноза. В докладе приводятся примеры карт прогноза, в частности, прогноза на 09.06.2020г, когда в Холмогорах был зафиксирован шквал 25м/с, а в Северодвинске – 22м.с на уровне 64-65 градуса северной широты.

Оперативный прогноз этих явлений, основанный на использовании гидродинамико-статистической модели, полностью автоматизирован. В самой статистической модели распознавания и прогноза в качестве отобранных информативных параметров атмосферы используются не фактические значения этих параметров (температуры у земли и температуры точки росы, скорости ветра в средней тропосфере, индекса неустойчивости, градиента температуры у земли и

др.), а выходные прогностические поля оперативной региональной гидродинамической модели Гидрометцентра России (автор – Лосев В.М), которые безусловно содержат систематические и случайные ошибки, что ведет к понижению результатов успешности.

Несмотря на это, по официальной оценке лаборатории испытаний успешность прогноза очень сильных шквалов (внезапных усилениях скорости ветра с возможным изменением направления) и смерчей со скоростью ветра $V \geq 25 \text{ м/с}$ по критерию успешности Пирси-Обухова оказалась достаточно высокой, превышающей оценки успешности прогноза этих явлений по всем гидродинамическим моделям, включая и мезомасштабные модели.

По данным 2020 года предупреденность явлений с допуском скорости до 22 м/с (прогноз скорости 25 м/с оправдывается, если наблюдался ветер со скоростью $V = 22 \text{ м/с}$ и выше) составила $P_{\text{я}} = 73\%$, предупреденность отсутствия явления $P_{\text{от}} = 88\%$, критерия $T = 1 - a - b = 0,61$, в то время, как по другим моделям предупреденность $P_{\text{я}}$ была менее 25% . Показатели успешности этого года превышают показатели прошлых лет. В докладе приводится таблица результатов успешности предшествующих лет и 2020 года.

Значительное количество таких опасных явлений зафиксировано и предсказано на Северном Кавказе в р-не Тырнауза, Домбая, Джубги и т.д, сопровождавшихся также достаточно сильными дождями, что привело к сходу сильных селей и значительному ущербу.

В июле месяце, в частности, нами были даны прогнозы опасного ветра ($V \geq 25 \text{ м/с}$) по Пермскому краю и по Уралу, которые лаборатория испытаний посчитала ошибочными. Однако спутниковые данные зафиксировали особого вида лесоповалы, характерные для прохождения смерчей. Поэтому можно считать, что предупреденность этих явлений выше 73% , и ошибка второго рода, т.е. ошибка “ложной тревоги” также менее 88% .

В докладе приводятся цветные карты оперативного прогноза этих случаев.

Прогностические карты (с заблаговременностью 12-48ч) ежедневно 2 раза в сутки выкладываются на сайт ГВЦ, а в некоторые Управления по гидрометслужбе (УГМС) пересылаются по электронной почте.

Синоптики используют цветные карты прогноза в оперативной практике и просят увеличить максимальную заблаговременность прогноза с двух суток до трех суток с целью более заблаговременного предупреждения населения о возможном опасном явлении.

В настоящее время этот вопрос прорабатывается в организационном плане, поскольку теперь в оперативном режиме рассчитываются прогностические поля глобальной модели среднесрочного прогноза (на 60-120ч) (автор- Толстых М.А.), которые можно было бы использовать в качестве входных параметров в нашей статистической модели. По результатам испытаний предупредительность гидродинамического прогноза скорости ветра $V \geq 25\text{м/с}$ у земли очень мала, менее 10%, однако сами гидродинамические прогностические поля заблаговременностью до трех суток прошли испытания успешно. Это является залогом успешности будущей модели прогноза сильных шквалов и смерчей заблаговременностью 60-72ч

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ВКЛЮЧЕНИЙ С КАУЗАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ¹

Г.Г. Петросян (Воронеж, ВГУИТ)

garikipetrosyan@yandex.ru

Пусть E – банахово пространство. Разобьем отрезок $[0, T]$ точками $0 < t_1 < \dots < t_m < T, m \geq 1$. Для функции $c : [0, T] \rightarrow E$ обозначим $c(t_k^+) = \lim_{\xi \rightarrow 0+} c(t_k + \xi)$, $c(t_k^-) = \lim_{\xi \rightarrow 0-} c(t_k + \xi)$ для $1 \leq k \leq m$. Для функции $g : (-\infty, T] \rightarrow E$, будем предполагать, что ее сужение на $(-\infty, 0]$ принадлежит фазовому пространству бесконечных запаздываний \mathcal{BC} , а сужение на $[0, T]$ будет принадлежать пространству $\mathcal{PC}([0, T]; E)$ функций $z : [0, T] \rightarrow E$, непрерывных на $[0, T] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z(t_k^+)$ и $z(t_k^-)$, $1 \leq k \leq m$, существуют и $z(t_k^-) = z(t_k)$. Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}([0, T]; E)$ снабженное нормой $\|z\|_{\mathcal{PC}} = \sup_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_E$ является банаховым.

Обозначим символом $\mathcal{C}((-\infty; T]; E)$ нормированное пространство ограниченных непрерывных функций $x : (-\infty; T] \rightarrow E$, наделенное нормой $\|x\|_{\mathcal{C}} = \|x_0\|_{\mathcal{BC}} + \|x|_{[0; T]}\|_{\mathcal{PC}}$. Предположим, что $\psi \in \mathcal{BC}$ заданная функция. Обозначим \mathcal{D} – замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{PC}([0, T]; E)$, состоящее из всех функций y удовлетворяющих условию $y(0) = \psi(0)$.

Рассматривается задача управляемости для следующего функционального включения с каузальными операторами \mathcal{Q} и \mathcal{S} :

$$y \in \mathcal{G}(t)(\psi(0) + \Sigma_{t_k < t} I_k(y(t_k))) + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]) +$$

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

© Петросян Г.Г., 2021

$$S \circ BW^{-1}(x_1 - \mathcal{G}(T)\psi(0) - \zeta \circ S \circ \mathcal{Q}(y[\psi])) -$$

$$S \circ BW^{-1}(\sum_{k=1}^m \mathcal{G}(T)I_k(y(t_k))),$$

где $\psi \in \mathcal{BC}$ заданная функция, $I_k : E \rightarrow E$ – импульсные функции, $I_k y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k)$, $k = 1, \dots, m$; $B : U \rightarrow E$ линейный ограниченный оператор, U – банахово пространство управлений, W^{-1} – правый обратный оператор для $W : L^\infty([0, T]; U) \rightarrow E$, линейный оператор $\zeta : C([0, T]; E) \rightarrow E$ определен следующим образом $\zeta x = x(T)$ и функция управления $u \in L^\infty([0, T]; U)$.

Литература

1. Каменский М.И. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Каменский, О.Ю. Макаренков, П. Нистри // Доклады Академии наук. — 2003. — Т. 388, № 4. — С. 439-442.

2. Каменский М.И. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети / М.И. Каменский, О.М. Пенкин, Ю.В. Покорный // Доклады Академии наук. — 1999. — Т. 368, № 2. — С. 157-159.

3. Kamenskii M.I. The Semidiscretization method for differential inclusions of fractional order / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-С. Yao // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 122. — С. 125-130.

4. Петросян Г.Г. О формальном представлении решений дифференциальных уравнений дробного порядка / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 123. — С. 524-530.

5. Петросян Г.Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1355-1358.

6. Петросян Г.Г. О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования / Г.Г. Петросян // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, №. 131. — С 284–289.

7. Петросян Г.Г. Об антипериодической краевой задаче для полуполинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Уфимский математический журнал. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 71-82.

8. Afanasova M. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space / M. Afanasova, Y.Ch. Liou, V. Obukhoskii, G. Petrosyan //

Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2019. — Vol.20, № 9. — P. 1919-1935.

9. Johnson R. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods / R. Johnson, P. Nistri, M. Kamenskii // Journal of Differential Equations. — 1997. — Vol. 140, № 1. — P. 186-208.

10. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin — New-York : Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.

11. Kamenskii M. Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2019. — Vol. 30, №2.

12. Kamenskii M.I. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, Is. 2. — P. 136-154.

13. Kamenskii M.I. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space / M.I. Kamenskii, G.G. Petrosyan, C.-F. Wen // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. — 2021. — Vol. 5, № 1. — P. 155-177.

14. Kamenskii M. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems / M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2011. — Vol. 23. — № 3. — P. 425-435.

15. Kamenskii M.I. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii // Nonlinear Analysis. — 1993. — T. 20, № 7. — C. 781-792.

16. Kamenskii M.I. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation / M.I. Kamenskii, P. Nistri, P. Zecca, V.V. Obukhovskii // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1994. — T. 82, — № 3. — C. 503-517.

17. Kamenskii M.I. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional-Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, № 12. — P. 5-19.

18. Obukhovskii V. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications / V. Obukhovskii, B. Gelman. — Singapore : World Scientific, 2020. — 220 p.

19. Petrosyan G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order // G. Petrosyan // The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics. — 2020. — Vol. 34. — P. 51-66.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МОДЕЛЕЙ В БИОЛОГИИ
М.В. Половинкина, Половинкин И.П. (Воронеж, ВГУИТ,
Воронеж, ВГУ)
polovinkina-marina@yandex.ru

Результаты работ [1–5] позволяют заметить, что постоянные стационарные состояния, неустойчивые в моделях роста с сосредоточенными параметрами (содержащих обыкновенные дифференциальные уравнения), оказываются устойчивыми в построенных с помощью учета вклада диффузионных (миграционных) процессов моделях роста и распространения с распределенными параметрами (содержащих дифференциальные уравнения с частными производными), по крайней мере, в областях с малыми диаметрами. Этот факт имеет место в моделях роста и распространения популяций, в моделях онкологических процессов, в моделях распространения инфекций, во многих моделях математической биологии ("хищник-жертва" и т.п.), а также в моделях лингвистики, связанных с изменениями языка.

Литература

1. Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е. Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2002. — Т. 9, вып. 1. — С. 226–227.
2. Gogoleva T.N., Shchepina I.N., Polovinkina M.V. and Rabeeakh S.A. On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation 2019 *J. Phys.: Conf. Ser.* 1203 012041.
3. Половинкин И.П., Половинкина М. В., Рабееах С. А. К вопросу об устойчивости стационарного решения в миграционной модели // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. - 2019. - С. 889-892.
4. Половинкина М.В., Половинкин И.П. Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 52, №4. – С. 255–261.

5. Debbouche, A., Polovinkina, M. V., Polovinkin, I. P., Valentim, C. A., David, S. A. (2021). On the stability of stationary solutions in diffusion models of oncological processes // The European Physical Journal Plus, 136(1), 1-18.

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВИДА ДИСКРЕТНЫХ
БЕГУЩИХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОЙ ЦЕПИ
ГЕНЕРАТОРОВ ТИПА МЭКИ-ГЛАССА¹**

М.М. Преображенская (Ярославль, ЯрГУ)

rita.preo@gmail.com

В настоящей работе предложена модель кольцевой цепочки m генераторов, которая является релейным аналогом цепи [1] генераторов Мэки-Гласса [2]

$$\frac{dV_j}{dt} = -bV_j + \frac{ac(V_j(t - \tau_1) + V_{j-1}(t - \tau_2))}{1 + (c(V_j(t - \tau_1) + V_{j-1}(t - \tau_2)))^\gamma}, \quad (1)$$

$$V_0 \equiv V_m, \quad j = 1, \dots, m.$$

Здесь $V_j(t)$ — напряжения в электронной цепи Мэки-Гласса, $a > 0$ — уровень насыщения нелинейной функции, $b > 0$ — RC -постоянная, $\tau_i > 0, i = 1, 2$ — запаздывания по времени, параметр $\gamma > 0$ определяет форму нелинейной функции, $c > 0$ — сила обратной связи. В данной модели каждый из генераторов описывается уравнением Мэки-Гласса [3]

$$\frac{dV_j}{dt} = -bV_j + \frac{acV_j(t - \tau_1)}{1 + c(V_j(t - \tau_1))^\gamma}.$$

Предположим, что $\gamma \gg 1$ — большой параметр и введем обозначение для функции, предельной к $\frac{1}{1+u^\gamma}$ при $\gamma \rightarrow +\infty$:

$$F(u) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + u^\gamma} = \begin{cases} 1, & 0 < u < 1 \\ \frac{1}{2}, & u = 1, \\ 0, & u > 1. \end{cases}$$

Переходя в (1) к пределу при $\gamma \rightarrow +\infty$ и сокращая число параметров в системе (1) за счет перенормировки времени $t \mapsto \tau_1 t$ и замен $u_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} cV_j(\tau_1 t)$, $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} ac\tau_1$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} b\tau_1$, $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \tau_2/\tau_1$ перейдем к системе

$$\dot{u}_j = -\beta u_j + \alpha(u_j(t - 1) + u_{j-1}(t - \tau))F(u_j(t - 1) + u_{j-1}(t - \tau)),$$

$$u_0 \equiv u_m, \quad j = 1, \dots, m,$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект № МК-1190.2020.1).

© Преображенская М.М., 2021

которая является центральным объектом исследования.

Для релейной системы (2) удается доказать существование периодического решения в виде дискретных бегущих волн, то есть такого решения, все m компонент которого (описывающие m генераторов) представлены одной и той же периодической функцией с фазовым смещением друг относительно друга.

Литература

1. Sano S. Dual synchronization of chaos in Mackey-Glass electronic circuits with time-delayed feedback / S. Sano, A. Uchida, S. Yoshimori, R. Roy // Phys. Rev. E. — 2007. — V. 75. — P. 016207.

2. Преображенская М.М. Релейная модель Мэки–Гласса с двумя запаздываниями / М.М. Преображенская // ТМФ. — 2020. — Т.203, № 1. — С. 106–118.

3. Mackey M. C. Oscillation and chaos in physiological control systems / M.C. Mackey, L. Glass // Science. — 1977. — V. 197, No. 4300. — P. 287–289.

ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СМО С ДИФFUЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко (Владивосток, ТОВВМУ, Дальрыбвтуз, ДВФУ)

prokopievad@yandex.ru, Tatyana_zhukdv@mail.ru, golovko.ni@dvfu.ru

Исследование, анализ и оптимизация систем массового обслуживания (СМО) являются актуальными вопросами. В работе рассматривается система массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ . На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ изменяется на промежутке $[\alpha, \beta]$ и представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α, β . Такие СМО используют при моделировании web-узлов Интернет.

Обозначим через $\hat{\lambda}$ интенсивность входного потока в стационарном режиме, $q_k(x)dx = P\{\hat{\nu} = k, x \leq \hat{\lambda} < x + dx\}$, где $q_k(x)$ — стационарные характеристики числа заявок, $\hat{\nu}$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $k \geq 0$; $f(x)dx = P\{x \leq \hat{\lambda} < x + dx\}$, $f(x)$ — стационарная плотность интенсивности входного потока, $x \in [\alpha, \beta]$. Интегралы $\int_{\alpha}^{\beta} q_k(x)dx = p_k$, $k \geq 0$, представляют собой стационарное распределение числа заявок. Функции $f(x)$, $q_k(x)$ рассматриваем

в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^2[\alpha, \beta]$.

Обозначим новые неизвестные функции $g_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k(x), n \geq 0$,

$\bar{\lambda} = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx$ — среднее значение $\hat{\lambda}$. Введем производящую функцию $F(x, z) = \sum_{n \geq 0} g_n(x) z^n, |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}$. В данной работе показано,

что из краевой задачи относительно функций $g_n(x)$ [1] следует дифференциальное уравнение относительно производящей функции $F(x, z)$

$$F(x, z) \left[xz^2 - (x + \mu)z + \mu \right] + \frac{b}{2} z F''_{xx}(x, z) = \mu g_0(x) - xz f(x) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$F'_x(\alpha, z) = 0, F'_x(\beta, z) = 0. \quad (2)$$

В теоремах 1,2 работы [1] приводится необходимое условие $\bar{\lambda} < \mu$ существования и единственности решения краевой задачи (1) – (2), неотрицательности характеристик $g_n(x)$ стационарной СМО.

В теореме 3 данной работы доказано, что в заданной области $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \{(x, z) : |z| \leq 1, z \in \mathcal{R}, x \in [\alpha, \beta]\}$ краевая задача (1) – (2) имеет единственное решение $F(x, z)$ для фиксированной произвольной функции $g_0(x)$.

В данной работе с помощью операторного анализа найдены функции $g_0(x)$ и $F(x, z)$. Введены операторы, функции и норма в линейном пространстве степенных рядов $F(x, z) = \sum_{n \geq 0} g_n(x) z^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}F(x, z) &= (F(x, z) - g_0(x))/z, \quad \theta(x, z) = F''_{xx}(x, z), \\ A_0\theta(x, z) &= \int_{\alpha}^x \int_{\alpha}^v \theta(u, z) dudv, \quad A_1\theta(x, z) = \frac{2}{b}[x(1-z) + \mu]A_0\theta(x, z), \\ A_2\theta(x, z) &= -\frac{2\mu}{b}\mathcal{K}A_0\theta(x, z), \quad A_3C_1(z) = \frac{2}{b}[x(1-z) + \mu]C_1(z) - \\ &- 2\frac{\mu}{b}\mathcal{K}C_1(z), \quad A_4 = \frac{\mu}{x+\mu-xz}\mathcal{K}, \quad \|F(x, z)\| = \int_{\alpha}^{\beta} |F(x, 1)| dx. \end{aligned}$$

Доказано, что существует $M > 0, \|\mathcal{K}\| < M$ на пространстве абсолютно сходящихся степенных рядов. $\|A\| = \|A_1 + A_2\| < \frac{2\mu(M+1)}{b} \times (\beta - \alpha)^2 = B^{-1}$. При условии $\|A\| < B^{-1} \leq 1$ решение имеет вид

$$F(x, z) = \int_{\alpha}^x \int_{\alpha}^v \theta(u, z) dudv + C_1(z),$$

где $\theta(x, z) = \sum_{n \geq 0} A^n \eta(x) + \sum_{n \geq 0} A^n A_3 C_1(z), \eta(x) = -\frac{2}{b} x f(x)$. Функция $C_1(z) = F(\alpha, z)$, согласно теореме 3, является единственным решением краевого условия $F'_x(\beta, z) = 0$.

При условии $B < 1$ функция $F(x, z)$ найдена из краевой задачи (1) – (2) в виде разложения по малому параметру B : $F(x, z) =$

$\sum_{n \geq 0} B^n F_n(x, z)$, $F_n(x, z) = \mu(\beta - \alpha)^2(M + 1) \sum_{k \geq 0} A_4^k \left((x + \mu - xz)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{n-1}(x, z) \right)$. Доказано, что $\|A_4\| < 1$ и все приведенные ряды равномерно сходятся, условие $\bar{\lambda} < \mu$ является достаточным условием существования и единственности решения краевой задачи (1) – (2), неотрицательности характеристик стационарной СМО.

Литература

1. Прокопьева, Д.Б. Вторая стационарная модель СМО с диффузионной интенсивностью входного потока / Д.Б. Прокопьева, Р.П. Шепелева, Н.И. Головки // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Междун. конференции Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж: ВГУ. — 2021. — С. 248–250.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УСЛОВИЙ ТРАНСМИССИИ

В.Л. Прядиев (Воронеж, ВГУ)
pryad@mail.ru

Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), \quad (x; t) \in \Gamma \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

где Γ – конечный связный замкнутый геометрический граф без петель; если x – вершина Γ , то под $u_{xx}(x, t)$ в (1) понимается общее значение вторых производных функции $u(\cdot, t)$ в точке x вдоль всех примыкающих к x ребер. Выделяя в множестве V всех вершин Γ непустое подмножество $\partial\Gamma$, будем задавать краевые условия

$$u(b, t) = 0, \quad (b; t) \in \partial\Gamma \times \mathbb{R}, \quad (2)$$

а в остальных вершинах будем рассматривать следующие классы условий трансмиссии:

$$\sum_{\gamma \in E(v)} u'_\gamma(v, t) = 0, \quad (v; t) \in (V \setminus \partial\Gamma) \times \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\sum_{\gamma \in E(v)} u'_\gamma(v, t) = k_\gamma u(v, t), \quad (v; t) \in (V \setminus \partial\Gamma) \times \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$\sum_{\gamma \in E(v)} u'_\gamma(v, t) = m_v u_{tt}(v, t), \quad (v; t) \in (V \setminus \partial\Gamma) \times \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$\sum_{\gamma \in E(v)} u'_\gamma(v, t) = \mu_v u_t(v, t), \quad (v; t) \in (V \setminus \partial\Gamma) \times \mathbb{R}, \quad (6)$$

где $E(v)$ – множество ребер, инцидентных v , $u'_\gamma(v, t)$ есть производная функции $u(\cdot, t)$, посчитанная в точке v вдоль γ в направлении от v ; k_v, m_v, μ_v – заданные положительные числа.

Утверждение. Пусть длины ребер Γ равны 1. Тогда решение задачи (1), (2) при условиях (3) квазипериодично:

$$u(x, t) = f_0(x, t) + \sum_{\omega \in \Omega} (f_\omega(x, t) \cos \omega t + g_\omega(x, t) \sin \omega t),$$

где $\Omega \in \mathbb{R}$ – конечное множество, $\forall(\omega \in \Omega) [f_\omega(x, \cdot)$ и $g_\omega(x, \cdot)$ ω -периодичны], $f_0(x, \cdot)$ 2-периодична, а числа из Ω несоизмеримы (рационально) ни с π , ни между собой;

при условиях (4) и (5) допускает конечное описание через начальные данные с помощью многочленов Лагерра;

при условиях (6) представляет собой сумму функций периодической по t и экспоненциально убывающей по t .

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

К.А. Раецкий (Воронеж, ВГУ)

raetskiy@mail.ru

Для линейной динамической системы моделируется движение с условием прохождения траектории (состояния) системы через произвольное количество произвольно заданных точек.

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad (1)$$

где A – матрица $n \times n$, B – матрица $m \times n$, $t \in [t_0, t_k]$.

Под воздействием входной вектор-функции $v(t)$ траектория системы $x(t)$ должна пройти через точки (t_i, x_i) с любыми заданными значениями $x_i \in \mathbb{R}^n$, $t_0 < t_1 < \dots < t_k$. То есть на $x(t)$ накладываются условия

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (2)$$

Модель такого движения строится методом неопределенных коэффициентов [1-2], для чего $x(t)$ и $v(t)$ формируются в

экспоненциально-полиномиальном виде

$$x(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j \varphi_j(t), \quad v(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j \varphi_j(t), \quad \varphi_j(t) = e^{-at} \cdot \frac{t^j}{j!}, \quad (3)$$

$a > 0$ с неопределёнными векторными коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}^m$. Число r зависит от количества контрольных точек k и от числа p такого, что

$$\text{rank}(B \ AB \ \dots \ A^p B) = n, \quad p \leq n - 1. \quad (4)$$

Для определения коэффициентов β_j выведена линейная алгебраическая система с коэффициентами, являющимися произведениями матриц A и B . Система разрешима за счет выполнения условия (4). Решение системы неединственное, "лишние" элементы коэффициентов можно положить равными нулю или использовать для решения других задач, например, для построения субоптимальной входной вектор-функции или траектории с дополнительными свойствами. Для построения траектории выведены формулы для определения коэффициентов α_j .

Доказывается, что при фиксировании "лишних" элементов коэффициентов построенная модель движения является корректной.

Литература

1. Раецкий К. А. Об одном методе моделирования движения линейной стационарной динамической системы / К. А. Раецкий // Современные методы краевых задач. Материалы Международной конференции ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXX"(3-9 мая 2019 г.) — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 236–237.

2. Раецкий К. А. К методу неопределённых коэффициентов решения задач управления / К. А. Раецкий // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика : сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2015. — № 5, ч. 2 (16-2). — С. 39–41.

3. Раецкий К. А. Об одном классе гладких функций / К. А. Раецкий // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции ВЗМШ (28 января-2 февраля 2019 г.) — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 218.

О СВОЙСТВАХ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ¹

Н.А. Раутиан (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики)
nrautian@mail.ru

Представлены результаты, базирующиеся на подходе, связанном с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений, примененном к исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Доказывается существование сжимающей и экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы, с известными предположениями для ядер интегральных операторов. Для широкого класса ядер интегральных операторов устанавливаются результаты о существовании и единственности классических решений указанных уравнений, с оценками скорости их экспоненциального убывания. Приводятся примеры применения полученных результатов для интегро-дифференциальных уравнений с экспоненциальными и дробно-экспоненциальными ядрами (функции Работнова) интегральных операторов (см. [1]–[4]).

Литература

1. Власов В.В. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан — М. : МАКС Пресс, 2016. — 488 с.
2. Власов В. В., Раутиан Н. А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / Власов В.В., Раутиан Н.А. // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56, № 8. — С. 1122–1126.
3. Раутиан Н. А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / Раутиан Н.А. // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56, № 9. — С. 1226–1244.
4. Власов В.В. О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтеса / Вла-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

© Раутиан Н.А., 2021

ОТВЕТВЛЕНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ОТ КРИТИЧЕСКИХ ОРБИТ ПРИ РАЗРУШЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Е.С. Родионова, Т.Ю. Сапронова (Воронеж, ВГУ)

tsapr@mail.ru

1. Экстремали возмущенных функционалов при разрушении непрерывной симметрии.

Рассмотрим $V(x, \varepsilon)$ — гладкое семейство гладких фредгольмовых индекса ноль функционалов на банаховом пространстве E , $\varepsilon \in \mathbf{R}^q$, E непрерывно вложено в гильбертово пространство H .

Пусть на пространстве H задано ортогональное действие группы Ли G , причем пространство E и «невозмущенный» функционал $V_0(x) = V(x, 0)$ инвариантны относительно этого действия, а «возмущенный» функционал $V_\varepsilon(x) = V(x, \varepsilon)$ (при $\varepsilon \neq 0$) не является инвариантным (происходит *разрушение непрерывной симметрии*).

И пусть L — компактная морсовская критическая орбита инвариантного функционала V_0 с индексом Морса m . Рассмотрим функцию $\tilde{W}(\xi, \sigma^0) = \sum_{i=1}^q \sigma^0_i V_i(\xi)$, где $V_i = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}(\cdot, 0)$, σ^0 — некоторая фиксированная точка из $\mathbf{R}^q \setminus \{0\}$, $\xi \in L$.

Теорема. Пусть $a_0 \in L$ — морсовская критическая точка индекса l функции $\tilde{W}(\xi, \sigma^0)$, $\xi \in L$. Тогда при всех достаточно малых $\delta \in \mathbf{R}$ функционал $V_{\delta\sigma^0}$ имеет изолированную морсовскую критическую точку $a(\delta) = a_0 + O(\delta) \in L_{\delta\sigma^0}$ индекса $l + m$.

Замечание. Функция $\tilde{W}(\xi, \sigma^0)$ называется *порождающей*.

Таким образом, при несимметричных возмущениях функционала V_0 от морсовских критических точек порождающей функции отходят ветви изолированных экстремалей возмущенного функционала $V_{\delta\sigma^0}$.

2. Разрушение сферической симметрии.

Рассмотрим «возмущенную» функцию

$$V(x, \varepsilon) = V_0(x) + \varepsilon_1 x_1^2 x_2 + \varepsilon_2 x_1 x_2^2 + \varepsilon_3 x_1 x_3^2 + \varepsilon_4 x_1^2 x_2^4 + \varepsilon_5 x_1^4 x_2^2 + \varepsilon_6 x_1^4 x_3^2,$$

где «невозмущенная» функция

$$V_0(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 + x_4^6 - a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_4^2$$

инвариантна относительно действия группы $G = SO(3)$ на пространстве $H = \mathbf{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E = \mathbf{R}^4$.

Ортогональное действие $G \times H \rightarrow H$ порождено гладким гомоморфизмом $\mathcal{T} : G \rightarrow \mathbf{O}(H)$, который каждый элемент (матрицу) $A \in G$ переводит в оператор \mathcal{T}_A (ортогональное преобразование пространства $H = \mathbf{R}^4$), задаваемый ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a_{ij} — элемент матрицы $A \in SO(3)$).

Нетрудно убедиться, что $V_0(\mathcal{T}_A x) = V_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^4, \forall A \in SO(3)$.

Орбиты группы $SO(3)$ представляют собой двумерные сферы:

$$orb(x_0) = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_4 = const \}.$$

Рассмотрим невырожденную критическую орбиту функции $V_0(x)$ радиуса $R = \sqrt{\frac{2a}{3}}$ ($x_4 = 0$).

В случае возмущения по ε_1 (считая все остальные «возмущающие» слагаемые равными нулю), получаем четыре точки ветвления на данной орбите: $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}R, \frac{\sqrt{3}}{3}R, 0, 0)$, $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}R, -\frac{\sqrt{3}}{3}R, 0, 0)$. От каждой из этих точек отходит ветвь изолированных экстремалей функции $V(x, \delta) = V_0(x) + \delta x_1^2 x_2$.

Далее, рассматривая последовательно возмущения по ε_k , $2 \leq k \leq 6$, находим точки ветвления для каждого из этих случаев.

Литература

1. Сапронова Т.Ю. Использование разрушения сферических симметрий и краевых особенностей функций в вариационных задачах / Т.Ю. Сапронова, О.В. Швырева // Матем. модели и операторные уравнения. — Воронеж. гос. ун-т. — 2011. — Т. 7. — С. 178–192.

2. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

**ЗАДАЧА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ –
ЗВЕЗДА С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ
ОСОБЕННОСТЯМИ**

А.Е. Руденко (Воронеж, ВГУ)
anna.rudenko.1996@mail.ru

Исследована задача о деформациях шарнирно закрепленной в узле системы стержней, расположенной вдоль геометрического графа — звезда Γ . Мы допускаем наличие произвольного количества (не более чем счетного) упругих опор (пружин), расположенных как на ребрах, так и в узле графа. При этом сосредоточенные силы также могут быть приложены в не более чем счетном множестве точек. Будем считать, что граф ориентирован от узла.

Обозначим через $u(x)$ отклонение от положения равновесия такой физической системы под воздействием внешней силы, заданной с помощью функции $F(x)$. Функционал потенциальной энергии этой системы имеет вид:

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu''^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{ru'^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dQ - \int_{\Gamma} u dF.$$

Сужение функции u на каждое ребро $\gamma_i = (0, l)$ обозначается как $u_i(x)$. Аналогичные обозначения вводятся для функций F , p , Q , r . Будем считать, что концы стержней жестко закреплены в граничных вершинах графа, т.е. $u_i(l) = u'_i(l) = 0$. Условие соединения стержней в точке узле означает, что $u_i(+0) = u(0)$.

Было получено, что если $u_0 \rightarrow \min \Phi(u)$ при условиях $u_i(l) = u'_i(l) = 0$, $u_i(+0) = u(0)$, то u_0 — решение следующей задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} -(p_i u''_i)' + r_i u'_i - \int_{+0}^x u_i dQ_i + F_i = \\ = -(p_i u''_i)'(+0) + (r_i u'_i)(+0) + F_i(+0), \\ \sum_{i=1}^n (p_i u''_i)'(+0) - \sum_{i=1}^n (r_i u'_i)(+0) + u(0)Q\{0\} = F\{0\}, \\ p_i(+0)u''_i(+0) = 0, \\ u_i(+0) = u(0), \\ u_i(l) = u'_i(l) = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Функции Q_i определяют упругую реакцию внешней среды вдоль ребра i , F_i — внешнюю нагрузку вдоль ребра i ; $F\{0\}$ — F -мера точки 0, которая совпадает с сосредоточенной в узле силой, $Q\{0\}$ — Q -мера точки 0, равная упругости пружины, прикрепленной к узлу. Функции $p_i(x)$ определяются свойствами материала, из которых изготовлены стержни, функции $r_i(x)$ описывают упругие свойства стержней.

Решение задачи (1) рассматривается в классе функций E таких, что $u(x)$ непрерывна на замыкании графа, первые и вторые производные для u_i являются равномерно непрерывными функциями на каждом ребре, функция ru'' абсолютно непрерывна на Γ , производные $(p_i u_i'')$ имеют ограниченную вариацию на каждом ребре.

Теорема. Пусть функции $Q_i(x)$ не убывают на каждом ребре, p_i, F_i, r_i имеют ограниченную вариацию на каждом ребре. Причем, $\inf_{(0,l)} p_i(x) > 0, r_i(x) \geq 0$. Тогда решение математической модели (1) существует и единственно.

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный [и др.]. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.
2. Шабров С.А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере : дис. д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / С.А. Шабров. — Воронеж, 2017 — 405 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ВНУТРЕННИМИ СИЛАМИ¹

И.Г. Русяк, В.Г. Суфиянов, Д.А. Клюкин (Ижевск, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова)

usufty@istu.ru

Математическая теория упругих колебаний стержней, разработанная в работах С.П. Тимошенко [1], широко применяется для решения практических задач анализа стержневых конструкций. Примером такой конструкции служит ствол артиллерийского орудия. Ствол рассматривается как стержень переменного сечения в гравитационном поле, который подвержен воздействию внутренних динамических сил, связанных с давлением пороховых газов и движением

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00072).

© Русяк И.Г., Суфиянов В.Г., Клюкин Д.А., 2021

снаряда внутри канала ствола. Под действием этих сил ствол испытывает продольные и поперечные колебания. Продольные колебания $u = u(x, t)$ описываются дифференциальным уравнением [2]:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(FE \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} Fp \right) - p \frac{\partial S}{\partial x} + q_x(x, t), \quad (1)$$

где ρ — плотность материала ствола; $F = F(x)$ — площадь сечения ствола; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $p = p(x, t)$ — давление внутри канала ствола; $r_1 = r_1(x)$, $r_2 = r_2(x)$ — внутренний и внешний радиус ствола; $S = S(x)$ — площадь канала ствола; $q_x(x, t)$ — продольные силы.

На левой границе при $x = 0$ задаются условия жесткого закрепления, на правой границе при $x = L$ — условие свободного конца:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (2)$$

Поперечные колебания ствола $v = v(x, t)$ в вертикальной плоскости описываются бигармоническим дифференциальным уравнением [2]:

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left((F\sigma - Sp) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + q_y(x, t), \quad (3)$$

где $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$ — напряжение в сечении x ; $J = J(x)$ — момент инерции; $q_y(x, t)$ — поперечные силы в вертикальной плоскости.

На левой границе при $x = 0$ задаются условия жесткого закрепления, а на правой границе при $x = L$ — условие свободного конца:

$$v(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0. \quad (4)$$

Начальные условия для уравнений (1) и (3) определяются из условий стационарного гравитационного прогиба.

Динамика распределения давления внутри ствола $p(x, t)$ в процессе выстрела и в период последействия, а также взаимодействие снаряда со стволом определяются в соответствии с [3].

Решение задачи осуществляется на основе разностной аппроксимации дифференциальных уравнений интегро-интерполяционным

методом. Разработан программный комплекс математического моделирования колебаний ствола с учетом дополнительных особенностей, связанных с наличием нарезков, разностенностью стволов, его разогрева и т.п. Программный комплекс позволяет учитывать влияние колебательных процессов внутри ствола на начальные условия выстрела и проводить анализ различных факторов на точность и кучность стрельбы. Дальнейшее развитие модели планируется с учетом взаимодействия двухствольных систем при стрельбе очередями.

Литература

1. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций / С.П. Тимошенко. — М. : Наука, 1975. — 704 с.

2. Хоменко Ю.П. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах / Ю.П. Хоменко, А.Н. Ищенко, В.З. Касимов. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. — 256 с.

3. Липанов А.М. Исследование влияния колебаний ствола на угол вылета снаряда при выстреле / А.М. Липанов, И.Г. Русяк, В.Г. Суфиянов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2020. — № 68. — С. 80-94.

ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)

RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

где $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in [0, +\infty)$, $p_j \in \mathbb{R}$.

Предположим, что уравнение (1) есть уравнение гиперболического типа, то есть $p_1^2 - 4p_2 > 0$. В этом случае корни ω_1 и ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны. Считаем для определенности, что

$$\omega_1 < \omega_2.$$

В случае $p_1 = 0$ и $p_2 = -1/a^2$ получаем простейшее неоднородное уравнение колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - a^2 f(x, t)$$

и решение соответствующей задачи Коши дается знаменитой классической формулой Даламбера [1, с. 50-60].

Требуется найти формулу для решения задачи (1)–(2) аналогичную классической формуле Даламбера.

Обозначим $D = \{(x, t) | t \in [0, +\infty), x \in (-\infty, \infty)\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $f(x, t) \in C(D)$ и $f'_x(x, t) \in C(D)$. Тогда решение задачи Коши (1)–(2) существует, единственно и дается следующей формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\omega_1 \varphi\left(x + \frac{t}{\omega_2}\right) - \omega_1 \varphi\left(x + \frac{t}{\omega_1}\right)}{\omega_2 - \omega_1} - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \int_{x + \frac{t}{\omega_1}}^{x + \frac{t}{\omega_2}} \psi(\tau) d\tau - \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \int_{x + \frac{t-\tau}{\omega_1}}^{x + \frac{t-\tau}{\omega_2}} f(s, \tau) ds d\tau. \quad (3)$$

Формула Даламбера (3) может использоваться при решении методом продолжения [1, с. 64–72], например, следующей смешанной задачи для уравнения (1) на полупрямой

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x, t), \quad x \in [0, +\infty), \quad t \in [0, +\infty),$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

или для решения, например, следующей смешанной задачи для уравнения (1) на конечном отрезке

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, +\infty), \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (6)$$

Отметим, что для нахождения решения задачи (4)–(6) при отсутствии смешанной производной традиционно используется метод

разделения переменных, который при наличии смешанной производной в уравнении (4) не может быть применен, а также используется более универсальный метод контурного интеграла Пуанкаре-Коши. В последние годы большой вклад в обоснование этого метода для классических смешанных задач типа (4)–(6), уравнение которых не содержит смешанных частных производных, но допускает наличие младших и свободного членов при самых общих предположениях и новых подходах внесли А.П. Хромов и его ученики [3].

Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский // . — М. : Наука, 1972. — 736 с.
2. Хромов А.П., Корнев В.В. Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // ДАН. — 2019. — Т. 484, № 1. — С.18–20.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ

К.Б. Сабитов (Стерлитамак, Стерлитамакский филиал ИСИ РБ,
Стерлитамакский филиал БашГУ)
sabitov_fmj@mail.ru

Поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины h , при этом толщина ее полагается малой по сравнению со сторонами p и q , описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка [1, с. 394]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \quad (1)$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$, EJ — жесткость пластинки, ρ — масса на единицу площади пластинки, E — модуль упругости материала, J — момент инерции, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $F(x, y, t)$ — непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки, $u(x, y, t)$ — смещение точки (x, y) пластинки в момент времени.

Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок имеют важное прикладное значение в строительной механике, которые изучены в работах [2, с. 444–449], [3, с. 132–133], [4, с. 35–69].

Для определения колебания (смещения) $u(x, y, t)$ точек (x, y) пластинки нужно задать граничные условия на краях $x = 0$, $x = p$, $y = 0$ и $y = q$. Вид граничных условий зависит от способа закрепления соответствующих краев. Если все стороны пластинки подперты, т. е.

свободно могут двигаться вокруг точек закрепления, то в этом случае граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u(p, y, t) = u_{xx}(p, y, t) = 0, \\ 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0, t) = u_{yy}(x, 0, t) = u(x, q, t) = u_{yy}(x, q, t) = 0, \\ 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (2)$$

Если все стороны наглухо закреплены, то граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u_x(0, y, t) = u(p, y, t) = u_x(p, y, t) = 0, \\ 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0, t) = u_y(x, 0, t) = u(x, q, t) = u_y(x, q, t) = 0, \\ 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (3)$$

Если два края из одной точки шарнирно закреплены, а противоположные края свободны, то граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u_x(p, y, t) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta u(x, y, t)) \Big|_{x=p} = 0, \\ 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0, t) = u_{yy}(x, 0, t) = u_y(x, q, t) = \frac{\partial}{\partial y}(\Delta u(x, y, t)) \Big|_{y=q} = 0, \\ 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4)$$

Возможны и другие случаи задания граничных условий [4, с. 35–69].

Начальные условия такие же, как и в случае колебаний мембраны:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, t) \Big|_{t=0} = \psi(x, y), \\ 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (1) зададим в области

$$Q = \left\{ (x, y, t) \mid 0 < x < p, 0 < y < q, 0 < t < T \right\},$$

где p, q и T — заданные положительные числа, и поставим следующие задачи.

Начально-граничные задачи. Найти определенную в области Q функцию $u(x, y, t)$ со свойствами:

$$u(x, y, t) \in C_{xy,t}^{4,2}(\overline{Q}); \quad (6)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q, \quad (7)$$

удовлетворяет начальным условиям (5) и одному из граничных условий (2) – (4), где $F(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в указанных работах [1, с. 394], [2, с. 444-449], [3, с. 132-133], [4, с. 35-69] и других путем подбора частных решений найдены собственные частоты и форма собственных колебаний для уравнения (1) при $F(x, t) \equiv 0$ с граничными условиями (2) и (3). Но вопросы по построению решений в явной форме и обосновании корректности поставленных нами задач не изучены. В работах [5 – 9] нами изучены начально-граничные и обратные задачи для одномерного уравнения балки.

В данной работе исследуются задачи с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины с тремя разными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных начально-граничных задач. В случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщенных решений.

Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н Тихонов., А.А Самарский. — М.: Наука, 1966. — 724 с. (изд. 3).
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко — М.: Физматлит, 1967. — 444 с.
3. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна / С. Гулд. — М.: Мир, 1970. — 328 с.
4. Андрианов И.В. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин / И.В. Андрианов, В.В. Данишевский, О.А. Иванов. — Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. — 216 с.
5. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами / К.Б. Сабитов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2015. — Т. 19, № 2. — С. 311-324.

6. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. — 2017. Т. 53, № 1. — С. 89–100.

7. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 665–671.

8. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки / К.Б. Сабитов, А.А. Акимов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 5. — С. 632–645.

9. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. — 2020. Т. 56, № 6. — С. 773–785.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С УСЛОВИЯМИ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ¹

А.Ю. Савин, Е.Н. Семенова (Москва, РУДН)

a.yu.savin@gmail.com, semenova54380@gmail.com

Пусть A — эллиптический симметрический положительный оператор на гладком замкнутом римановом многообразии M порядка $d > 0$. Оператор A будем рассматривать как неограниченный оператор с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in C^\infty(M) \mid i^*(u) = 0\},$$

где $X \subset M$ — гладкое замкнутое подмногообразие коразмерности $\nu \geq 1$, через $i : X \rightarrow M$ обозначено вложение, а $i^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(X)$ — оператор сужения функций на подмногообразии.

Через $i_* : C^\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}'(M)$ обозначим кограничный оператор, сопоставляющий функции на подмногообразии её умножение на δ -функцию по нормальным переменным (см. [1,2]).

Теорема 1.

1. Спряжённый оператор A^* с областью определения $\mathcal{D}(A^*)$ равен

$$\mathcal{D}(A^*) = H^d(M) + A^{-1}i_*H^{-d+\nu/2}(X), \text{ если } d > \nu/2,$$

$$A^*(u + v) = Au, \quad \text{где } u \in H^d(M), v \in A^{-1}i_*H^{-d/2+\nu/2}(X).$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00574).

© Савин А.Ю., Семенова Е.Н., 2021

2. Расширение Фридрикса A_F с областью определения $\mathcal{D}(A_F)$ равно

$$\mathcal{D}(A_F) = (H^d(M) + A^{-1}i_*H^{-d/2+\nu/2}(X)) \cap \ker i^*, \text{ если } d > \nu,$$

$$A_F = A^*|_{\mathcal{D}(A^*)}.$$

При этом расширение Фридрикса A_F является фредгольмовым оператором, и его ядро изоморфно ядру эллиптического псевдодифференциального оператора $i^*A^{-1}i_*$ порядка $-d + \nu$ на подмногообразии X .

Спектральные задачи рассматриваемого вида возникают, например, при исследовании колебаний пластин с рёбрами жёсткости и при исследовании квантовых систем с потенциалами нулевого радиуса.

Литература

1. Стернин Б.Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности / Б.Ю. Стернин // Труды ММО. — 1966. — Т. 15 — С. 346–382.

2. Новиков С.П. Эллиптические операторы и подмногообразия / С.П. Новиков, Б.Ю. Стернин // Доклады АН СССР. — 1966. — Т. 171, № 3. — С. 525–528.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ НА ОТРЕЗКЕ, МЕНЬШЕМ ПЕРИОДА

С.Л. Сандакова (Екатеринбург, УрФУ)

ssandakova@yandex.ru

Введение В 1875г. П.Л.Чебышёв сформулировал ответ на следующий вопрос: «Как велик может быть алгебраический многочлен степени n вне заданного отрезка $[-1,1]$, если на этом отрезке он мал?» Найденный им экстремальный полином называется полиномом Чебышёва.

В.А.Марков распространил результат Чебышёва на случай производной полинома, доказав, что для этой задачи экстремальным будет тот же полином Чебышёва.

В настоящей работе доказываются аналогичные теоремы для тригонометрических полиномов степени n и их производных.

Обозначения Пусть T_n есть пространство тригонометрических многочленов степени n с вещественными коэффициентами. Пусть h есть заданное число, заключённое строго между 0 и π .

Для полинома $t_n \in T_n$ определим $\|t_n\|_h = \max\{|t_n(x)| : x \in [-h, h]\}$; $\|t_n\|_R = \max\{|t_n(x)| : x \in R\}$.

История вопроса Приведём известные результаты.

Теорема Бернштейна. Пусть t_n есть тригонометрический полином степени n . Тогда $\|t'_n\|_R \leq n\|t_n\|_R$.

Родственная теорема для алгебраических многочленов доказана А.А.Марковым

Теорема Маркова. Пусть P_n есть алгебраический многочлен степени n . Тогда $\|P'_n\|_{[a,b]} \leq \frac{2n^2\|P_n\|_{[a,b]}}{b-a}$, где $\|P_n\|_{[a,b]} = \max\{|P_n(x)| : x \in [a, b]\}$ для любого отрезка $[a, b]$.

Определение. Полиномом Чебышёва степени n называется $Q_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $|x| \leq 1$.

В широком смысле полиномами Чебышёва мы будем называть также многочлены, отличающиеся от определённых выше лишь постоянным множителем.

Теорема о полиномах Чебышёва. Пусть a и A ($|a| > 1$, $A \neq 0$) — заданные числа. Среди всех многочленов P_n степени n , удовлетворяющих условию $P_n(a) = A$, наименьшую норму в пространстве $C([-1, 1])$ имеет полином Чебышёва $Q_n^A(x) = \frac{A}{Q_n(a)}Q_n(x)$.

Следствие. Если полином P_n степени n удовлетворяет неравенству $|P_n| \leq 1$ на промежутке $[-1, 1]$, то при $|a| > 1$ выполняется $|P_n(a)| \leq |Q_n(a)|$.

Неравенство Маркова является точным в том смысле, что для полинома Чебышева на промежутке $[-1, 1]$ выполняется равенство $\|Q'_n\|_{[-1,1]} = n^2\|Q_n\|_{[-1,1]}$.

Теорема 1 (следствие теоремы о полиномах Чебышёва). Если тригонометрический полином t_n степени n удовлетворяет неравенству $|t_n| \leq 1$ на промежутке $[-h, h]$, то при $h < |a| < \pi$ выполняется $|t_n(a)| \leq |t_n^*(a)|$, где $t_n^*(x) = Q_n\left(\frac{2\cos x - \cos h - 1}{1 - \cos h}\right)$.

Эта теорема даёт точную константу в неравенстве $|t_n(a)| \leq C\|t_n\|_h$,

$h < |a| < \pi$. Теперь нас будет интересовать константа в соответствующем неравенстве для производных $|t'_n(a)| \leq C\|t_n\|_h$, $h < |a| < \pi$.

Теорема 2 (обобщение неравенства В.А.Маркова). Если чётный тригонометрический полином t_n степени n удовлетворяет неравенству $|t_n| \leq 1$ на промежутке $[-h, h]$, то при $h < |a| < \pi$ выполняется $|t'_n(a)| \leq |t_n^{*'}(a)|$ с тем же t_n^* .

Эта теорема описывает лишь чётные полиномы, зато применима для любых допустимых h и a . Однако можно описать весь класс полиномов, наложив дополнительные ограничения на h и a .

Теорема 3(основная). *Если тригонометрический полином t_n степени n удовлетворяет неравенству $|t_n| \leq 1$ на промежутке $[-h, h]$, то при $0 < h \leq \frac{2\pi}{3}$ и $h \leq |a| \leq \pi - \frac{h}{2}$ выполняется $|t'_n(a)| \leq |t_n^{*'}(a)|$ с тем же t_n^* .*

Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Т.2. /А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965.
2. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций /И. К. Даугавет. — Ленинград : Издательство ленинградского университета, 1977.
3. Jackson D. Bernstein's theorem and trigonometric approximation / D. Jackson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1936, V. 40, P. 225-251.
4. Пойа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, Т.1,II. /Г. Пойа, Г. Сеге. — М. : Наука, 1978.

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА—КИПРИЯНОВА НА СФЕРЕ

Е.Л. Санина, Ю.Н. Булатов, Е.С. Терлецкая

(Воронеж, ВГУ,

Елец, ЕГУ имени И.А. Бунина,

Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тянь-Шанского)

sanina08@mail.ru, y.bulatov@bk.ru, katrina_li@mail.ru

Оператором Лапласа—Киприянова будем называть следующий сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $-1 < \gamma_i \leq 0$

Если все $\gamma_i = 0$, то этот оператор оказывается оператором Лапласа; если же выполняется строгое неравенство $\gamma_i < 0$, то такой оператор оказывается оператором Киприянова, введенным в [1].

В [1] для $-1 < \gamma_i \leq 1$ получено следующее представление оператора Киприянова в сферических координатах $x = r\Theta$, $\Theta = \Theta(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, $|\Theta| = 1$

$$\Delta_B = \Delta_{B,r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{B,\theta},$$

где $\Delta_{B,r}$ — радиальная, а $\Delta_{B,\Theta}$ — сферическая составляющие оператора, соответственно

$$\Delta_{B,r} = B_{\mu,r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mu = n + |\gamma| - 1,$$

$$\Delta_{B,\Theta} = \sum_k \frac{1}{q_k(\theta) (\sin \theta_k)^{n+|\gamma^{(k)}|-k-1} (\cos \theta_k)^{\gamma_k}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} (\sin \theta_k)^{n+|\gamma^{(k)}|-k-1} (\cos \theta_k)^{\gamma_k} \frac{\partial u}{\partial \theta_k},$$

где $|\gamma^{(k)}| = |\gamma| - \gamma_1 - \dots - \gamma_k$, $q_k(\theta) = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{k-1})^2$. Отметим, что при выполнении условия $-1 < \gamma_i \leq 0$ число $|\gamma|$ — отрицательное. Но при этом $n + |\gamma|$ всегда строго положительное.

Через $C_{ev}^2(S_1)$ будем обозначать класс дважды непрерывно дифференцируемых на сфере функций; подстрочный знак «*ev*» означает, что, если $\gamma_i \neq 0$, то эти функции x_i -четные (т.е. четные по i -ой координате точки x).

Весовая линейная форма на сфере S_1 определена следующим выражением

$$(u, v)_{S_1, \gamma} = \int_{S_1} u(x) v(x) x^\gamma dS, \quad x^\gamma = \Theta^\gamma = \prod_{i=1}^n |\Theta_i|^{\gamma_i}, \quad \gamma_i > -1.$$

Соответственно $L_2^\gamma(S_1) = \left\{ u : \|u\|_{L_2^\gamma(S_1)}^2 = \int_{S_1} |u(x)|^2 x^\gamma dS < \infty \right\}$.

Теорема 1. Пусть $\gamma_i > -1$. Оператор $\Delta_{B,\Theta}$ симметричен в пространстве $L_2^\gamma(S_1)$:

$$(\Delta_{B,\Theta} f_1, f_2)_{S_1, \gamma} = (f_1, \Delta_{B,\Theta} f_2)_{S_1, \gamma},$$

а оператор $-\Delta_{B,\Theta}$ неотрицателен: $(-\Delta_{B,\Theta} f_1, f_2)_{S_1, \gamma} \geq 0$.

Δ_B -гармоникой называется сужение однородного В-гармонического многочлена на сферу, т.е. если однородный порядка m многочлен $P_{m,\gamma}$ удовлетворяет уравнению Лапласа (В-гармонический), то

$$Y_m^\gamma(\Theta) = Y_m^\gamma\left(\frac{x}{|x|}\right) = P_{m,\gamma}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

— сферическая Δ_B -гармоника порядка m .

Ортогональность. Если $k \neq m$ ($m = 0, 2, 4, \dots$), то

$$\int_{S_1^{(n)}} Y_m^\gamma(\Theta) Y_k^\gamma(\Theta) \Theta^\gamma dS = 0.$$

Дифференциальное уравнение В-гармоник (с параметрами $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $-1 < \gamma \leq 0$)

$$\Delta_{B,\Theta} Y_m^\gamma(\Theta) + m(m+n+|\gamma|-2) Y^\gamma(\Theta) = 0, \quad 0 > |\gamma| > -n.$$

Литература

1. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательными параметрами операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56. — № 12. — С.1-11.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.И. Сахаров (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
ser341516@yandex.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ рассматриваются области $\Omega_{1(2)} = \{(x, t) \in D : x < (>)g(t)\}$, разделенные негладкой границей Σ . Пусть $\omega_{1(0)}$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (дважды). Предполагается, что $|\Delta_t g(t)| \leq C|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2})$. В $\Omega^{(s)}$ рассматриваются равномерно параболические операторы $L^{(s)}u = \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l^{(s)}(x, t)\partial_x^l u$, где $A_l^{(s)} = \|a_{ijl}^{(s)}\|_{i,j=1}^m$, $m > 1$, для собственных чисел $\mu_r^{(s)}$ матриц $A_2^{(s)}$ выполнено $\text{Re}\mu_r^{(s)}(x, t) \geq \delta > 0$, $(x, t) \in \overline{D}$, $a_{ijl}^{(s)}$ ограничены в \overline{D} , $|\Delta_{x,t} a_{ijl}^{(s)}(x, t)| \leq C\omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$ в \overline{D} .

Ставится следующая задача

$$L^{(s)}u^{(s)}(x, t) = 0, (x, t) \in \Omega^{(s)}, s = 1, 2, \quad (1)$$

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, x \leq g(0), u^{(2)}(x, 0) = 0, x \geq g(0), \quad (2)$$

$$\partial_x^{(l)}(u^{(1)} - u^{(2)})(g(t), t) = \psi_l(t), 0 \leq t \leq T, l = 0, 1, \quad (3)$$

где $\psi_1 \in C_0^1[0, T]$, ψ_1 имеет дробную производную порядка $1/2$ $\partial^{1/2}\psi_1 \in C_0^1[0, T]$. Классическая разрешимость задачи (1)- (3) устанавливается методом потенциалов.

Теорема 1. *При заданных условиях на $L^{(s)}$ и g 1) существует классическое решение $(u^{(1)}, u^{(2)})$ задачи (1)- (3); 2) это решение принадлежит пространству $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}^{(1)}) \times C_0^{1,0}(\overline{\Omega}^{(2)})$ и выполнены оценки $\|u^{(s)}; \Omega^{(s)}\|^{1,0} \leq C(\|\psi_1; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_2; [0, T]\|^{0})$, $s = 1, 2$.*

Литература

1. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболических систем на плоскости / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифф. уравн. — 2016. — т. 52, № 2. — С. 198–208.

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ВНУТРЕННИХ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОМЕРНОЙ ЭМПИРИЧЕСКОЙ МОДОВОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Г. Сергазы (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
 sgalimzhan@gmail.com

Метод эмпирической модовой декомпозиции (EMD) является важнейшей составляющей преобразования Гильберта-Хуанга, получившего широкое применение в анализе нелинейных и нестационарных данных. Алгоритм EMD итерационным способом разбивает исходный сигнал на конечное множество функций внутренних колебаний (intrinsic mode functions, IMF), которые являются базисом преобразования. В отличие от преобразования Фурье и вейвлет-преобразования, базисные функции EMD формируются адаптивно, непосредственно из входных данных. Исходный сигнал представляется в виде суммы функций внутренних колебаний и остатка:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) + r(t),$$

где $r(t)$ — — является монотонной функцией или имеет только один экстремум. Множество функций внутренних колебаний является полной системой и ортогональными. Но в силу адаптивного построения базиса, ортогональность внутренних колебаний может

быть проверена только в смысле достаточно малого значения индекса ортогональности (IO_{jk} , orthogonal index)

$$IO_{jk} = \frac{\int_0^T c_j(t)c_k(t)dt}{\int_0^T c_j^2(t)dt + \int_0^T c_k^2(t)dt}.$$

Обобщим понятие индекса ортогональности на случай многоканальных сигналов (временных рядов) $\mathbf{x}(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^r(t)]'$ следующим образом

$$\begin{aligned} IO_{\mathbf{xy}} &= \frac{\int_0^T \mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)dt}{\int_0^T \mathbf{x}(t)dt + \int_0^T \mathbf{y}(t)dt} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^T x^i(t)y^i(t)dt}{\sum_{i=1}^N \int_0^T (x^i(t))^2 dt + \sum_{i=1}^N \int_0^T (y^i(t))^2 dt}. \end{aligned}$$

Обобщение эмпирической модовой декомпозиции на случай многомерных временных рядов разбивает многоканальный сигнал на множество многомерных функций внутренних колебаний. Аналогично, как в одномерном случае, многомерные внутренние колебания являются ортогональными при малых значениях индекса ортогональности. Но результаты вычислительных экспериментов показывают, что индекс ортогональности различных внутренних колебаний имеют порядок не ниже -6 .

Предлагается применить метод ортогонализации Грамма — Шмидта для набора многомерных функций внутренних колебаний $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r\}$ следующим образом:

$$1) \mathbf{d}_1(t) = \mathbf{c}_1(t);$$

$$2) \mathbf{d}_2(t) = \mathbf{c}_2(t) - \beta_{21}\mathbf{d}_1(t), \text{ где } \beta_{21} = \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^T c_2^i(t)d_1^i(t)dt}{\sum_{i=1}^N \int_0^T (d_1^i(t))^2 dt};$$

$$3) \mathbf{d}_j + 1(t) = \mathbf{c}_{j+1}(t) - \sum_{i=1}^j \beta_{j+1,i}\mathbf{d}_i(t),$$

$$\text{где } \beta_{j+1,i} = \frac{\sum_{k=1}^N \int_0^T c_{j+1}^k(t)d_i^k(t)dt}{\sum_{k=1}^N \int_0^T (d_i^k(t))^2 dt}.$$

В результате индекс ортогональности различных пар многомерных внутренних колебаний имеют порядок не более -16 , что обеспечивает более точное вычисление энергии исходного сигнала.

Литература

1. Huang N.E. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis / N.E. Huang. — Great Britain : Proc. R. Soc. Lond. — 1998. — 454. — С. 903–995.

2. Rehman N. Multivariate empirical mode decomposition / N. Rehman, D.P. Mandic. — London : Proc. R. Soc. Lond. — 2010. — 466. — С. 1291–1302.

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ГРАНИЧНЫХ ДАННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ¹

С.М. Серебрянский (Троицк, Троицкий филиал ЧелГУ)
tf_chelgu@mail.ru

Рассматривается задача тепловой диагностики

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq x_2, \quad t \geq 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, \quad x_2 < x \leq 1, \quad t \geq 0; \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad u_2(x, 0) = 0; \quad (3)$$

$$u_1(0, t) = f_\delta(t), \quad t \geq 0; \quad (4)$$

$$u_1(x_1, t) = \psi_\delta(t), \quad 0 < x_1 < x_2, \quad t \geq 0; \quad (5)$$

$$u_1(x_2, t) = u_2(x_2, t), \quad t \geq 0; \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1(x_2, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2(x_2, t)}{\partial x}, \quad t \geq 0; \quad (7)$$

где x — пространственная координата; t — время, $u_i(x, t)$ — значение температуры в точке x в момент t в i -м слое; $\kappa = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$, $\kappa_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i}$, c_i — теплоемкость в i -м слое, ρ_i — плотность материала в i -м слое, λ_i — коэффициент теплопроводности i -го слоя, f_δ и ψ_δ — значения температуры, рассчитанные экспериментально, δ — погрешность измерений.

Требуется, используя исходную информацию $f_\delta, \psi_\delta, \delta$ задачи (1)–(7), рассчитать значения $u_{2\delta}(1, t)$, наиболее близкие по норме точным значениям $u_{20}(1, t)$.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-41-660008).

© Серебрянский С.М., 2021

Задача (1)–(7) считается некорректно поставленной и требует специального решения [1, 2]. В [3] приведено численное решение задачи (1)–(7):

$$u(1, \bar{t}) \approx \psi_0(\bar{t}) + \left(\frac{\psi_0(\bar{t}) - f_0(\bar{t})}{x_1} \right) (1 - x_1) + \frac{1}{2} \psi_0'(\bar{t}) (1 - x_1)^2 k. \quad (8)$$

Неточное задание $f_0(\bar{t})$ и $\psi_0(\bar{t})$ в (8), очевидно, приведет к неверному результату. Наличие случайных ошибок в измерениях неизбежно приведет к понижению устойчивости решения задачи.

Возможным решением этой проблемы является:

1) метод идентификации зависимостей на основе структурных разностных схем в граничных условиях (4)–(5) [4];

2) метод идентификации зависимостей на основе обратного отображения в граничных условиях (4)–(5) [5].

Анализ методов идентификации показывает повышение точности решения задачи (1)–(7) [6].

Литература

1. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. / В.К. Иванов. — М. : Наука, 1978. — 206 с.

2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов. — М. : Наука, 1986. — 287 с.

3. Серебрянский С. М. Об оценках погрешности методов приближенного решения одной обратной задачи / С.М. Серебрянский // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2010. № 2(42). С. 135–148.

4. Тырсин А. Н. Распознавание зависимостей во временных рядах на основе структурных разностных схем / А.Н. Тырсин, С.М. Серебрянский // Автометрия. — 2015. —Т. 51. № 2. — С. 54–60.

5. Тырсин А. Н. Распознавание типа зависимости на основе обратного отображения / А.Н. Тырсин, С.М. Серебрянский // Информатика и ее применения. — 2016. —Т. 10. Вып. 2. — С. 58–64.

6. Серебрянский С. М. Повышение точности решения обратных задач при ошибках в начальных данных / С.М. Серебрянский, А.Н. Тырсин // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2018. —Вып. 4. — С. 58–71.

**ТРЕХМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С
ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ¹**

С.Н. Сидоров (Стерлитамак, Стерлитамакский филиал БашГУ,
Стерлитамакский филиал ИСИ РБ)
stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu = F(x, y, t), \quad (1)$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - t^n(u_{xx} + u_{yy}) + bt^n u, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, \end{cases} \quad F(x, y, t) = \begin{cases} F_1(x, y, t), & t > 0, \\ F_2(x, y, t), & t < 0, \end{cases}$$

заданное в трехмерной области $Q = \{(x, y, t) | (x, y) \in D, t \in (-\alpha, \beta)\}$, где $D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\}$, n, α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, b – заданное любое действительное число, $F_i(x, y, t)$ ($i = 1, 2$) – заданные функции, и поставим следующую задачу.

Начально-граничная задача. *Найти функцию $u(x, y, t)$, определенной в области Q и удовлетворяющую следующим условиям: $u(x, y, t) \in C(\bar{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(\bar{Q}) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-)$; $Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t)$, $(x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-$; $u(x, y, t)|_{x=0} = u(x, y, t)|_{x=p} = 0$, $-\alpha \leq t \leq \beta$; $u(x, y, t)|_{y=0} = u(x, y, t)|_{y=q} = 0$, $-\alpha \leq t \leq \beta$; $u(x, y, t)|_{t=-\alpha} = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, где $F(x, y, t)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, $Q_- = Q \cap \{t < 0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$.*

Начально-граничные задачи (локальные, нелокальные) для однородного и неоднородного уравнений смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области впервые были изучены в работе К.Б. Сабитова, С.Н. Сидорова [1 – 4].

Отметим так же работу [5], где для для трех классов одномерного парабола-гиперболического уравнения с правой частью $F(x, t)$: уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью, для уравнения смешанного типа с вырождающейся параболической

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60016.

© Сидоров С.Н., 2021

частью и для уравнения смешанного типа со степенным вырождением изучена начально-граничная задача в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ с ненулевыми условиями на границе $u(0, t) = h_1(t)$, $u(l, t) = h_2(t)$, $u(x, -\alpha) = \varphi(x)$. Поставленная задача для уравнения (1) без вырождающейся параболической части, т.е. при $n = 0$, изучена в работе [6].

Используя идею работы [6], установлен критерий единственности решения поставленной задачи. Решение задачи построено в явной форме в виде суммы ортогонального двумерного ряда. При обосновании сходимости ряда впервые возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов, затрудняющая сходимость построенного ряда. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения. Установлена устойчивость решения по граничной функции $\psi(x, y)$ и правой части уравнения.

Литература

1. Сидоров С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Доклады АМАН. — 2012. — Т. 14, №3. — С. 34–44.
2. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 3. — С. 356–365.
3. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика. — 2015. — №12. — С. 55–64.
4. Сабитов К.Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, вып. 3. — С. 415–435.
5. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 236, Issue 6. — P. 603–640.
6. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-Boundary Problem for a Three-Dimensional Inhomogeneous Equation of Parabolic-Hyperbolic Type // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, — № 11. — P. 2257–2268.

**УРАВНЕНИЕ СУБДИФФУЗИИ И ЗАДАЧА С
ПЕРИОДИЧЕСКИМ И КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ**
М.Н. Силаева, Алкади Хамса Мохамад (Воронеж, ВГУ)
marinanebolsina@yandex.ru

Рассматривается задача отыскания решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha} x > 0, t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

где $\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha}$ – дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$ для $t \in (-\infty, \infty)$, $u(t, x)$ удовлетворяет условиям

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |u(t, x)| = 0, \quad (3)$$

$\varphi(t)$ – периодическая функция с рядом Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n} \arctan \frac{b_n}{a_n},$$

где T – период.

В случае $\alpha < 1$ интересно проследить влияние параметра замедленной диффузии α на глубину проникновения тепла в почву.

Основным результатом этих исследований является

Теорема. *Если в условии (2) $\varphi(t)$ – периодическая функция вида (4), то задача (1)-(2)-(3) имеет единственное ограниченное решение, и оно представимо в виде*

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x), \quad (5)$$

где

$$u_n(t, x) = A_n e^{\cos \frac{\alpha\pi}{4} \omega_n^{\frac{\alpha}{2}} x} \cos \left(\sin \frac{\alpha\pi}{4} \omega_n^{\frac{\alpha}{2}} x - \omega_n t + \omega_n \delta_n^0 \right).$$

ОЦЕНКА СМЕШАННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ

Б.В. Симонов, И.Э. Симонова, Л.В. Самофалова,

В.П. Мишта (Волгоград, ВолгГТУ)

dvr@vstu.ru

Через L_p , $1 < p < \infty$, обозначается множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π -периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$,

L_p^0 - множество функций $f \in L_p$, таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для п. в. x_1 и $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для п. в. x_2 .

Определения смешанного модуля гладкости порядков β_1, β_2 ($\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$) $\omega_{\beta_1, \beta_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$, символов \ll, \succ см. в [1], преобразованного ряда $\sigma(f, \lambda, \rho_1, \rho_2)$, классов $\mathcal{QM}, \mathcal{L}$ – в [2,3].

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty, 0 < \theta \leq \min(2, p), \max(2, p) \leq \tau < \infty, \beta_i, r_i > 0, \lambda = \{\lambda_{n_1, n_2}\}$ – последовательность положительных чисел такая, что для любых n_1, n_2 выполнены условия:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,0} \lambda_{n_1, n_2} &= \lambda_{n_1+1, n_2} - \lambda_{n_1, n_2} \geq 0, \Delta_{0,1} \lambda_{n_1, n_2} = \lambda_{n_1, n_2+1} - \\ - \lambda_{n_1, n_2} &\geq 0, \Delta_{1,1} \lambda_{n_1, n_2} = \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0} \lambda_{n_1, n_2}) \geq 0, \\ \Delta_{1,0} \left(\frac{n_1^{r_1}}{\lambda_{n_1, n_2}} \right) &\leq 0, \Delta_{0,1} \left(\frac{n_2^{r_2}}{\lambda_{n_1, n_2}} \right) \leq 0, \Delta_{1,1} \left(\frac{n_1^{r_1} n_2^{r_2}}{\lambda_{n_1, n_2}} \right) \geq 0, \\ \text{существует } \varepsilon_2 > 0, \text{ для которого } \Delta_{0,1} \left(\frac{\lambda_{n_1, n_2}}{n_2^{r_2 + \beta_2 - \varepsilon_2}} \right) &\leq 0, \\ \text{существует } \varepsilon_1 > 0, \text{ для которого } \Delta_{1,0} \left(\frac{\lambda_{n_1, n_2}}{n_1^{r_1 + \beta_1 - \varepsilon_1}} \right) &\geq 0. \end{aligned}$$

I. Если для функции $f \in L_p^0$ сумма $J(f, \lambda, r_1 + \beta_1, r_2 + \beta_2, \theta, p) = \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} |\Delta_{1,1}(\lambda_{\nu_1, \nu_2}^\theta)| \omega_{r_1 + \beta_1, r_2 + \beta_2}^\theta(f, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2})_p + \sum_{\nu_1=1}^{\infty} |\Delta_{1,0}(\lambda_{\nu_1, 1}^\theta)| \times \omega_{r_1 + \beta_1, 0}^\theta(f, \frac{1}{\nu_1})_p + \sum_{\nu_2=1}^{\infty} |\Delta_{0,1}(\lambda_{1, \nu_2}^\theta)| \omega_{0, r_2 + \beta_2}^\theta(f, \frac{1}{\nu_2})_p \right)^{\frac{1}{p}} + \lambda_{1,1} \|f\|_p$ конечна, то существует функция $f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)} \in L_p^0$ с рядом Фурье $\sigma(f, \lambda, \rho_1, \rho_2)$, причем $\|f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)}\|_p \ll J(f, \lambda, r_1 + \beta_1, r_2 + \beta_2, \theta, p)$ и для любых n_1, n_2 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \Sigma_1(f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)}, n_1, n_2, \lambda, \tau, p) &= \\ = \left\{ \prod_{i=1}^2 (n_i + 1)^{-(\beta_i + r_i)\tau} \lambda_{n_1, n_2}^\tau \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \prod_{i=1}^2 \nu_i^{\beta_i \tau} |\Delta_{1,1} \left(\frac{\nu_1^{r_1 \tau} \nu_2^{r_2 \tau}}{\lambda_{\nu_1, \nu_2}^\tau} \right)| \right\} \times \\ \times \omega_{\beta_1, \beta_2}^\tau(f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)}, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2})_p + (n_1 + 1)^{-(\beta_1 + r_1)\tau} \lambda_{n_1, n_2+1}^\tau \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \nu_1^{\beta_1 \tau} \times \end{aligned}$$

© Симонов Б.В., Симонова И.Э., Самофалова Л.В., Мишта В.П., 2021

$$\begin{aligned}
& \times \left| \Delta_{1,0} \left(\frac{\nu_1^{r_1 \tau}}{\lambda_{\nu_1, n_2+1}^\tau} \right) \right| \omega_{\beta_1, \beta_2}^\tau \left(f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)}, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{n_2+1} \right)_p + (n_2 + 1)^{-(\beta_2 + r_2)\tau} \times \\
& \times \lambda_{n_1+1, n_2}^\tau \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \nu_2^{\beta_2 \tau} \left| \Delta_{0,1} \left(\frac{\nu_2^{r_2 \tau}}{\lambda_{n_1+1, \nu_2}^\tau} \right) \right| \omega_{\beta_1, \beta_2}^\tau \left(f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)}, \frac{1}{n_1+1}, \frac{1}{\nu_2} \right)_p + \\
& + \omega_{\beta_1, \beta_2}^\tau \left(f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)}, \frac{1}{n_1+1}, \frac{1}{n_2+1} \right)_p \left\}^{\frac{1}{\tau}} \ll \\
& \ll \Sigma_2(f, n_1, n_2, \lambda, \theta, p) = \\
& = \left\{ \sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \left| \Delta_{1,1}(\lambda_{\nu_1, \nu_2}^\theta) \right| \omega_{\beta_1+r_1, \beta_2+r_2}^\theta \left(f, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2} \right)_p + \right. \\
& + \sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} \left| \Delta_{1,0}(\lambda_{\nu_1, n_2+1}^\theta) \right| \omega_{\beta_1+r_1, \beta_2+r_2}^\theta \left(f, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{n_2+1} \right)_p + \\
& + \sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \left| \Delta_{0,1}(\lambda_{n_1+1, \nu_2}^\theta) \right| \omega_{\beta_1+r_1, \beta_2+r_2}^\theta \left(f, \frac{1}{n_1+1}, \frac{1}{\nu_2} \right)_p + \\
& \left. + \lambda_{n_1+1, n_2+1}^\theta \omega_{\beta_1+r_1, \beta_2+r_2}^\theta \left(f, \frac{1}{n_1+1}, \frac{1}{n_2+1} \right)_p \right\}^{\frac{1}{\theta}},
\end{aligned}$$

II. Если для функции $f \in L_p^0$ существует функция $f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)} \in L_p^0$ с рядом Фурье $\sigma(f, \lambda, \rho_1, \rho_2)$, то $J(f, \lambda, r_1 + \beta_1, r_2 + \beta_2, \tau, p) \ll \ll \|f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)}\|_p$ и для любых n_1, n_2 справедливо неравенство $\Sigma_2(f, n_1, n_2, \lambda, \tau, p) \ll \Sigma_1(f^{(\lambda, \rho_1, \rho_2)}, n_1, n_2, \lambda, \theta, p)$.

Теорема 2. Если функция $f(x_1, x_2) \in \mathcal{QM}$, то утверждения теоремы 1 справедливы при замене условий $0 < \theta \leq \min(2, p)$ и $\max(2, p) \leq \tau < \infty$ на условия $0 < \theta \leq p$ и $p \leq \tau < \infty$.

Теорема 3. Если функция $f(x_1, x_2) \in \mathcal{L}$, то утверждения теоремы 1 справедливы при замене условий $0 < \theta \leq \min(2, p)$ и $\max(2, p) \leq \tau < \infty$ на условия $0 < \theta \leq 2$ и $2 \leq \tau < \infty$.

Литература

1. Потапов М.К. Дробные модули гладкости / М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов. — М. : МАКС Пресс, 2016. — 340 с.
2. Симонова И.Э. Об оценках смешанных модулей гладкости функций с квазимонотонными и лакунарными коэффициентами Фурье / И.Э. Симонова, Б.В. Симонов // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2005. — С. 146.
3. Потапов М.К. О классах Бесова, Бесова-Никольского и об оценках смешанных модулей гладкости дробных производных / М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2003. — Т. 243. — С. 244–256.

**КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ
ИЗ КЛАССА БЕСОВА-НИКОЛЬСКОГО**
И.Э. Симонова, Л.В. Самофалова, Б.В. Симонов,
В.П. Мишта (Волгоград, ВолгГТУ)
dvr@vstu.ru

Через L_p , $1 < p < \infty$, обозначается множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π -периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$,

L_p^0 – множество функций $f \in L_p$, таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для п. в. x_1 и $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для п. в. x_2 .

Через $\vartheta(t_1, t_2)$ обозначается измеримая неотрицательная на $[0, 2\pi]^2$ функция, такая, что $\int_{\delta_1}^1 \int_{\delta_2}^1 \vartheta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty$ для любых $\delta_i \in (0, 2\pi)$ ($i = 1, 2$) и удовлетворяющая (ζ_1, ζ_2) – условию, т.е. $\int_0^1 \int_0^1 \vartheta(t_1, t_2) t_1^{\zeta_1-1} t_2^{\zeta_2-1} dt_1 dt_2 < \infty$ при некоторых $\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0$.

Обобщенный класс Бесова - Никольского $B_0H(p, \theta) \equiv B_0H(p, \theta, k_1, k_2, \vartheta, \beta_1, \beta_2, \psi)$: класс функций $f \in L_p^0$, таких, что

$$\left\{ \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-\theta k_1-1} t_2^{-\theta k_2-1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \vartheta(u_1, u_2) u_1^{k_1\theta} u_2^{k_2\theta} du_1 du_2 \omega_{k_1+\beta_1, k_2+\beta_2}^\theta(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 + \delta_1^{\theta\delta_1} \int_{\delta_1}^{2\pi} \int_0^{\delta_2} t_1^{-\theta\beta_1-1} t_2^{-\theta k_2-1} \int_{t_1}^{2\pi} \int_0^{t_2} \vartheta(u_1, u_2) u_2^{k_2\theta} du_1 du_2 \times \right. \\ \left. \times \omega_{k_1+\beta_1, k_2+\beta_2}^\theta(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 + \delta_2^{\theta\beta_2} \int_0^{\delta_1} \int_{\delta_2}^{2\pi} t_1^{-\theta k_1-1} t_2^{-\theta\beta_2-1} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{t_1} \int_{t_2}^{2\pi} \vartheta(u_1, u_2) u_1^{k_1\theta} du_1 du_2 \omega_{k_1+\beta_1, k_2+\beta_2}^\theta(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 + \delta_1^{\theta\delta_1} \delta_2^{\theta\beta_2} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} \int_{\delta_2}^{2\pi} t_1^{-\theta\beta_1-1} t_2^{-\theta\beta_2-1} \int_{t_1}^{2\pi} \int_{t_2}^{2\pi} \vartheta(u_1, u_2) du_1 du_2 \omega_{k_1+\beta_1, k_2+\beta_2}^\theta(f; t_1, t_2)_p \times \right. \\ \left. \times dt_1 dt_2 \right\}^{\frac{1}{\theta}} \ll \psi(\delta_1, \delta_2),$$

где $0 < \theta < \infty, k_i \geq \frac{\zeta_i}{\theta}, \beta_i > 0$ ($i = 1, 2$);

\mathcal{QM} – класс функций $f \in L_p^0$, коэффициенты Фурье которых квазимонотонны;

$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$ – смешанный модуль гладкости положительных по-

рядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 функции $f \in L_p$;

$\psi \in \Psi$, где Ψ — класс функций $\psi(\delta, \eta)$, непрерывных и неотрицательных на $[0, 2\pi]^2$ и обладающих свойствами:

$\psi(\delta_1, \eta) \ll \psi(\delta_2, \eta)$, $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq 2\pi$; $\psi(\delta, \eta_1) \ll \psi(\delta, \eta_2)$, $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq 2\pi$; $\psi(2\delta, \eta) \ll \psi(\delta, \eta)$, $0 \leq \delta \leq \pi$; $\psi(\delta, 2\eta) \ll \psi(\delta, \eta)$, $0 \leq \eta \leq \pi$.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \lambda_{n_1 n_2}(\theta) = & \left(\int_{1/n_1}^{2\pi} \int_{1/n_2}^{2\pi} \vartheta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \right. \\ & + n_1^{k_1 \theta} \int_0^{1/n_1} \int_{1/n_2}^{2\pi} \vartheta(t_1, t_2) t_1^{k_1 \theta} dt_1 dt_2 + n_2^{k_2 \theta} \int_{1/n_1}^{2\pi} \int_0^{1/n_2} \vartheta(t_1, t_2) t_2^{k_2 \theta} dt_1 dt_2 + \\ & \left. + n_1^{k_1 \theta} n_2^{k_2 \theta} \int_0^{1/n_1} \int_0^{1/n_2} \vartheta(t_1, t_2) t_1^{k_1 \theta} t_2^{k_2 \theta} dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{\theta}}, n_1 \in \mathbb{N}, n_2 \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

$$\rho_{n_1 n_2} = |a_{n_1 n_2}| + |b_{n_1 n_2}| + |c_{n_1 n_2}| + |d_{n_1 n_2}|,$$

где $a_{n_1 n_2}, b_{n_1 n_2}, c_{n_1 n_2}, d_{n_1 n_2}$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_p$.

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum(n_1, n_2, \theta) = & \left\{ \frac{1}{n_1^{\beta_1 \theta}} \frac{1}{n_2^{\beta_2 \theta}} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \lambda_{k_1 k_2}^\theta(\theta) \rho_{k_1 k_2}^\theta k_1^{(\beta_1+1)\theta-2} \times \right. \\ & \times k_2^{(\beta_2+1)\theta-2} + \frac{1}{n_1^{\beta_1 \theta}} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=n_2+1}^{\infty} \lambda_{k_1 k_2}^\theta(\theta) \rho_{k_1 k_2}^\theta k_1^{(\beta_1+1)\theta-2} k_2^{\theta-2} + \\ & + \frac{1}{n_2^{\beta_2 \theta}} \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{n_2} \lambda_{k_1 k_2}^\theta(\theta) \rho_{k_1 k_2}^\theta k_1^{\theta-2} k_2^{(\beta_2+1)\theta-2} + \\ & \left. + \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=n_2+1}^{\infty} \lambda_{k_1 k_2}^\theta(\theta) \rho_{k_1 k_2}^\theta (k_1 k_2)^{\theta-2} \right\}^{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

В теореме найдены условия на коэффициенты Фурье, необходимые и достаточные для того, чтобы функция принадлежала обобщенному классу Бесова-Никольского.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta = \min(p, 2)$, $\tau = \max(p, 2)$.

I. Если $f \in B_0 H(p, \theta)$, то $\sum(n_1, n_2, \theta) \ll \psi(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2})$.

Если верно $\sum(n_1, n_2, \tau) \ll \psi(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2})$, то $f \in B_0 H(p, \tau)$.

II. Если $f \in L_p \cap \mathcal{QM}$, то $f \in B_0 H(p, p)$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство $\sum(n_1, n_2, p) \ll \psi(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2})$.

Следствие. $f \in B_0 H(2, 2)$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство $\sum(n_1, n_2, 2) \ll \psi(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2})$.

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ РЕСУРСНОЙ СЕТИ

В.А. Скороходов, Я.М. Ерусалимский,
С.Ч. Мургузалиева (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
vaskorhodov@sfedu.ru, ymerusalimskiy@sfedu.ru,
murtuzaliev@sfedu.ru

Пусть $G(X, U, f)$ — ресурсная сеть [1]. С каждой дугой u такой сети связана величина её пропускной способности r_u , а с каждой вершиной x_i — величина $q_i(t)$, которая называется количеством ресурса в вершине x_i в момент времени t . Вектор $\mathbf{Q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ называется состоянием сети G в момент t .

Правила функционирования ресурсной сети определяются следующим образом: для каждого $i \in [1; n]_Z$

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{u \in [x_i]^+(t)} F(u, t) + \sum_{u \in [x_i]^-(t)} F(u, t), \quad (1)$$

где $F(u, t)$ — величина ресурсного потока выходящего по дуге $u = (x_i, y_j)$ в момент времени t определяется следующим образом:

$$F(u, t) = \begin{cases} r_u, & q_i > \sum_{v \in [x_i]^+} r_v; \\ \frac{r_u}{\sum_{v \in [x_i]^+} r_v} \cdot q_i(t), & q_i \leq \sum_{v \in [x_i]^+} r_v. \end{cases} \quad (2)$$

Правила функционирования сети (1) и (2) можно записать в сокращенной форме (3):

$$\mathbf{Q}(t+1) = \mathcal{A}(\mathbf{Q}(t)). \quad (3)$$

Здесь следует отметить, что оператор \mathcal{A} вообще говоря не является линейным.

Таким образом, зная начальное состояние $\mathbf{Q}(0)$ сети G , можно находить любое из состояний $\mathbf{Q}(t)$, а также предельное состояние и предельный поток [2] в сети G .

Пусть известно состояние ресурсной сети G в некоторый момент времени t_0 . Рассмотрим задачу нахождения начального состояния в этой сети. Ясно, что такая задача сводится к нахождению решения уравнения

$$\mathcal{A}(\mathbf{Q}(t_0 - 1)) = \mathbf{Q}(t_0) \quad (4)$$

с неизвестными элементами состояния $Q(t_0 - 1)$. Так как известное состояние $Q(t_0)$ получено из состояния $Q(t_0 - 1)$ по правилу (3), значит, решение уравнения (4) существует, однако, ввиду нелинейности оператора \mathcal{A} , может не быть единственным, следовательно, необходимо рассмотреть вопрос об уточнении решения $Q(t_0 - 1)$.

Для рассматриваемой задачи нами предложены подходы к уточнению решения уравнения (4) и нахождения начального состояния $Q(0)$ ресурсной сети G в случаях больших и малых ресурсов.

Литература

1. Kuznetsov, O.P. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states / O.P. Kuznetsov, L.Yu. Zhilyakova // Management and Production Engineering Review. — 2011. — Vol. 2, No. 3. — pp. 33–39

2. Skorokhodov, V.A. The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution / V.A. Skorokhodov, A.S. Chebotareva // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2015. — Vol. 9, No. 3. — pp. 435–446.

МЕТОД ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА¹

М.О. Снегур, А.О. Липич, Е.Ю. Смолькин (Пенза, ПГУ)

snegur.max15@gmail.com

Рассматривается задача о поверхностных волнах открытой регулярной неоднородной волноведущей структуры прямоугольного сечения, которая сведена к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля $\Pi \in H_0^1(\Omega)$, $\Phi \in H^1(\Omega)$ в пространствах Соболева: найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{L}\Pi := \Delta\Pi - \tilde{\kappa}^2\Pi = -\left(\frac{\nabla\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{\nabla\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2}\right)\nabla\Pi - \frac{\gamma}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\kappa}^2}J(\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}, \Phi), \\ \mathcal{L}\Phi := \Delta\Phi - \tilde{\kappa}^2\Phi = -\left(\frac{\nabla\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}} + \frac{\nabla\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2}\right)\nabla\Phi + \frac{\gamma}{\tilde{\mu}\tilde{\kappa}^2}J(\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}, \Pi), \end{cases}$$

и

$$J(u, v) := \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \rho};$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70010).

© Снегур М.О., Липич А.О., Смолькин Е.Ю., 2021

удовлетворяющие краевым условиям на Γ_0

$$\Pi|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = 0,$$

условиям сопряжения на Γ_1

$$[\Pi]|_{\Gamma_1} = 0, \quad [\Phi]|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$\gamma \left[\frac{1}{\tilde{\kappa}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \right] \Big|_{\Gamma_1} - \left[\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\kappa}^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \gamma \left[\frac{1}{\tilde{\kappa}^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] \Big|_{\Gamma_1} + \left[\frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\kappa}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right] \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

условиям сопряжения на Γ_2

$$[\Pi]|_{\Gamma_2} = 0, \quad [\Phi]|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right] \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right] \Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

условию ограниченности энергии и условию излучения на бесконечности:

$$\Pi(\rho, \varphi) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \Phi(\rho, \varphi) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (1)$$

равномерно по φ .

Для определения решения использована вариационная формулировка задачи. Задача сведена к изучению оператор-функции [1,2]

$$N(\gamma)\mathbf{u} = 0, \quad N(\gamma) : H \rightarrow H,$$

где $\mathbf{u} = (\Pi, \Phi)^T$. Исследованы свойства операторов входящих в оператор-функцию, необходимых для анализа ее спектральных свойств.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Спектр оператор-функции $N(\gamma) : H \rightarrow H$ является дискретным в $\Lambda := \mathbb{C} \setminus (\Lambda_B \cup \Lambda_F)$, где $x = (\rho, \varphi)$*

$$\Lambda_B :=$$

$$\{\gamma : \Im \gamma = 0, |\gamma| = \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}, \min_{x \in \Omega_1} \sqrt{\varepsilon(x) \mu(x)} \leq |\gamma| \leq \max_{x \in \Omega_1} \sqrt{\varepsilon(x) \mu(x)}\}$$

и

$$\Lambda_F := \{\gamma : \Im \gamma = 0, \gamma_* \leq |\gamma| \leq \gamma^*\},$$

$$\gamma_* = \frac{-1/2 + \sqrt{1/4 + 4 \left(\max_{x \in \Omega} \varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c \right)^{-2}}}{2 \left(\|\tilde{A}_1\| + \|\tilde{P}_1\| \right)}$$

u

$$\gamma^* = \frac{1/2 + \sqrt{1/4 + 4 \left(\|\tilde{A}_2\| + \|\tilde{P}_2\| \right) \left(\|\tilde{A}_1\| + \|\tilde{P}_1\| \right)}}{2 \left(\max_{x \in \Omega} \varepsilon \mu - \varepsilon_c \mu_c \right)^{-1}},$$

Литература

1. Смирнов, Ю.Г. О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода / Ю. Г. Смирнов, Е.Ю. Смолькин // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 10. — С. 1298–1309.

2. Смирнов, Ю.Г. Исследование спектра в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения / Ю.Г. Смирнов, Е.Ю. Смолькин // Доклады академии наук. — 2018. — Т. 478, № 6. — С. 627–630.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С КОСЕКАНСНЫМ ЯДРОМ

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)

su1951@mail.ru

Приближенное вычисление сингулярных интегралов Гильберта и Коши рассматривалась в работах И.В. Бойкова, Б.Г. Габдулхаева, Ю.В.Ганделя, А.М.Линькова, И.К.Лифанова, Г.Н.Пыхтеева, Д.Г.Саникидзе, их учеников и последователей.

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$Af = A(f; x) = \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{cosec} \frac{t-x}{2} dt, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (1)$$

где $f(x)$ — плотность интеграла, непрерывная 2π -периодическая функция, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Сингулярные интегральные уравнения с такими интегралами рассматривались в работах [1]–[3]. Исходя из определения интеграла (1), легко показать, что

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{cosec} \frac{t-x}{2} dt = 4 \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right|,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \operatorname{cosec} \frac{t-x}{2} dt = 4 \cos mx \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| - 8 \sum_{k=1}^m \frac{\cos \left(k - m - \frac{1}{2} \right) x}{2k-1},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \operatorname{cosec} \frac{t-x}{2} dt =$$

$$= 4 \sin mx \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| + 8 \sum_{k=1}^m \frac{\sin \left(k - m - \frac{1}{2} \right) x}{2k-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Пусть $H_\alpha^{(r)}$ ($r = 0, 1, 2, \dots, 0 < \alpha \leq 1$) — класс 2π -периодических функций $f(x)$, r -е производные которых удовлетворяют условию Гельдера H_α . Следуя [4], для $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$ положим

$$P_N f = P_N(f; x) =$$

$$= \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \left(1 - \lambda_{k,\nu}^{(n)} \right)^{l+1} \right) \left(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx \right), \quad (3)$$

где $a_k^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \cos kx_j$, $b_k^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \sin kx_j$,

$$k = \overline{0, n-1}, \quad a_n^{(n)} = \left[\frac{N-1}{n} \right] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \cos nx_j,$$

$$b_n^{(n)} = \left[\frac{N-1}{n} \right] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \sin nx_j, \quad x_k = x_k^{(N)} = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = \overline{1, N},$$

$n = \left[\frac{N}{2} \right]$, $N = 1, 2, \dots$, $l = \left[\frac{r}{2} \right]$, $[\sigma]$ — целая часть σ , $\nu = \overline{1, 4}$,

$$\lambda_{k,1}^{(n)} = 1;$$

$$\lambda_{k,2}^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{N};$$

$$\lambda_{k,3}^{(n)} = \frac{k\pi}{2n+2} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n+2};$$

$$\lambda_{k,4}^{(n)} = \frac{n-k+1}{n+2} \cos \frac{k\pi}{n+2} + \frac{\sin \frac{k+1}{n+2} \pi}{(n+2) \sin \frac{\pi}{n+2}},$$

$$k = \overline{1, n}.$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом (3) и учитывая (2), получим квадратурную формулу

$$\begin{aligned}
 Af &= A(P_N f; x) + R_{n,\nu} f = 2a_0^{(n)} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \left(1 - \left(1 - \lambda_{k,\nu}^{(n)} \right)^{l+1} \right) \left(a_k^{(n)} (4 \cos kx \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| - \right. \\
 &- 8 \sum_{l=1}^k \frac{\cos(2(l-k) - 1) \frac{x}{2}}{2l-1} \left. \right) + b_k^{(n)} (4 \sin kx \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| + \\
 &+ 8 \sum_{l=1}^k \frac{\sin(2(l-k) - 1) \frac{x}{2}}{2l-1} \left. \right) + R_{n,\nu} f,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $R_{n,\nu} f$ — остаточный член.

Квадратурную формулу (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 Af &= A(P_N f; x) + R_{n,\nu} f = \frac{4}{N} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| \sum_{j=1}^N f(x_j) + \\
 &+ \frac{8}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \sum_{k=1}^n \left(1 - \left(1 - \lambda_{k,\nu}^{(n)} \right)^{l+1} \right) \cdot \\
 &\cdot \left(\ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| \cos k(x - x_j) - 2 \sum_{l=1}^k \frac{\cos((l-\frac{1}{2})x - k(x - x_j))}{2l-1} \right) + R_{n,\nu} f,
 \end{aligned}$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое, соответствующее значению $k = n$ при $N = 2n$ следует разделить на 2.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$ ($r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$). Тогда

$$\|R_{n,\nu} f\|_C = O\left(\frac{\ln N}{N^{r+\alpha}}\right), \quad N \geq 2, \quad r + \alpha > 0, \quad \nu = \overline{1, 4}.$$

Рассмотрим применение интерполяционных тригонометрических полиномов полуцелого порядка к приближенному вычислению интеграла (1). Естественно предположить, что $f(x) - 2\pi$ — антипериодическая функция. Через $L_{n-\frac{1}{2}} f = L_{n-\frac{1}{2}}(f, x)$ обозначим тригонометрический полином полуцелого порядка $n - \frac{1}{2}$, интерполирующий $f(x)$ по узлам $x_k = \frac{k\pi}{n}, k = \overline{0, 2n-1}$. Известно [5],[6], что полином $L_{n-\frac{1}{2}} f$ существует, единственен и имеет вид

$$L_{n-\frac{1}{2}} f = L_{n-\frac{1}{2}}(f; x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f(x_k) l_k(x), \quad l_k(x) = \frac{1}{2n} \frac{\sin n(x-x_k)}{\sin \frac{x-x_k}{2}}.$$

Легко показать, что (ср. с [3])

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t \operatorname{cosec} \frac{t-x}{2} dt = -2\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \operatorname{cosec} \frac{t-x}{2} dt = 2\pi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x. \quad (5)$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $L_{n-\frac{1}{2}} f = L_{n-\frac{1}{2}}(f; x)$, с учетом равенств (5), получим квадратурную формулу

$$\begin{aligned} Af &= A\left(L_{n-\frac{1}{2}} f; x\right) + R_n f = \\ &= \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(x_k) \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (x_k - x) + R_n f, \end{aligned} \quad (6)$$

где $R_n f = R_n(f; x)$ — остаточный член.

Квадратурную формулу (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} Af &= A\left(L_{n-\frac{1}{2}} f; x\right) + R_n f = \\ &= \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(x_k) \sin^2 \frac{n(x-x_k)}{2} \operatorname{cosec} \frac{x_k-x}{2} + R_n f. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если $f(x) \in H_\alpha^{(r)}(M)$ ($r = 0, 1, \dots, 0 < \alpha \leq 1$), то для остаточного члена квадратурной формулы (6) справедлива оценка $\|R_n f\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha+r}}\right)$.

Пусть $H_{n-\frac{1}{2}} f = H_{n-\frac{1}{2}}(f; x)$ — тригонометрический полином полуполого порядка $n - \frac{1}{2}$, интерполирующий $f(x)$ и ее производную по узлам $x_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{1, n}$. Известно [6], что полином $H_{n-\frac{1}{2}} f$ существует, единственен и имеет вид

$$\begin{aligned} H_{n-\frac{1}{2}} f &= H_{n-\frac{1}{2}}(f; x) = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(f(x_k) \cos \frac{x-x_k}{2} + 2f'(x_k) \sin \frac{x-x_k}{2} \right) \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x-x_k}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} Af &= A(H_{n-\frac{1}{2}} f; x) + R_n f = \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) f(x_k) + b_k(x) f'(x_k) + R_n f, \end{aligned} \quad (7)$$

$$a_k(x) = -\frac{1}{n} \sin \frac{x-x_k}{2} - \frac{2}{n^2} \cos \frac{x-x_k}{2} c_k(x-x_k),$$

$$b_k(x) = \frac{1}{n} \cos \frac{x-x_k}{2} - \frac{2}{n^2} \sin \frac{x-x_k}{2} c_k(x-x_k),$$

$$c_k(x) =$$

$$= \left(n \sin \frac{n}{2} x \sin \frac{n-1}{2} x - \frac{1}{4} \sin nx \cos ec \frac{x}{2} + \frac{1}{2} n \cos \frac{2n-1}{2} x \right) \cos ec \frac{x}{2},$$

где $R_n f = R_n(f; x)$ – остаточный член.

Теорема 3. Если $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, 0 < \alpha \leq 1$), то для остаточного члена квадратурной формулы (7) справедлива оценка $\|R_n f\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right)$.

Литература

1. Li P. Singular integral equation of convolution type with cosecant kernels and periodic coefficients / P.Li // Mathematical Problems in Engineering. – 2017, Article ID 6148393, 6 p., <https://doi.org/10.1155/2017/6148393>.

2. Du H. Reproducing kernel method of solving singular integral equation with cosecant kernel / H. Du, J. Shen // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – vol. 348, №1. – pp. 308–314.

3. Gong X. A collocation method for singular integral equations with cosecant kernel via Semi-trigonometric interpolation / X.Gong, S.Yang // Int. J. of Math. Research. – 2017. – vol.9, №1. – pp.45-51.

4. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач // Б.Г.Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

5. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах // А.Х.Турецкий. – Минск: «Вышэйшая школа», 1968. – 320 с.

6. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах // А.Х.Турецкий. – Минск: «Вышэйшая школа», 1977. – 256 с.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА¹

П.С. Соловьёв, Д.М. Коростелева, К.О. Левинская,
С.И. Соловьёв (Казань, КФУ, КГЭУ)
pavel.solovev.kpfu@mail.ru

Изучается задача на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка с дробно-рациональной зависимостью от спектрального параметра. Установлено существование возрастающей последовательности положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных элементов. Формулируются результаты о числе собственных значений на произвольном конечном интервале. Исходная дифференциальная задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов с Лагранжевыми конечными элементами произвольного порядка на равномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и приближённых собственных элементов в зависимости от размера сетки и порядка конечных элементов. Полученные теоретические результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3].

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.
2. Соловьёв С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.
3. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418–432.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160029, 20-08-01154).

© Соловьёв П.С. Коростелева Д.М., Левинская К.О., Соловьёв С.И., 2021

О ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ¹

О.В. Солонуха (Москва, ФИЦ ИУ РАН, РУДН)

solonukha@yandex.ru

Рассматривается линейное параболическое уравнение с краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского. Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения, получены априорные оценки решений. В качестве модельного примера рассмотрена параболическая задача с Лапласианом в прямоугольном параллелепипеде $\Omega_T = (0, T) \times (0, 2) \times (0, 1)$

$$\partial_t w(t, x) - \Delta w(t, x) = f(t, x) \quad ((t, x) \in \Omega_T), \quad (1)$$

с начальным условием

$$w(0, x) = \varphi(x) \quad (x = (x_1, x_2) \in Q = (0, 2) \times (0, 1)) \quad (2)$$

и с нелокальными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w(t, x_1, 0) = w(t, x_1, 1) = 0 & \quad (t \in (0, T), 0 \leq x_1 \leq 2), \\ w(t, 0, x_2) = \gamma_1 w(t, 1, x_2) & \quad (t \in (0, T), 0 < x_2 < 1), \\ w(t, 2, x_2) = \gamma_2 w(t, 1, x_2) & \quad (t \in (0, T), 0 < x_2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Теорема 1. Пусть $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$. Тогда для любых $f \in L_2(\Omega_T)$ и $\varphi \in L_2(Q)$ существует единственное решение задачи (1)–(3) в $W_\gamma := \{w \in L_2(0, T; W_2^1(Q)) : \partial_t w \in L_2(\Omega_T), w \text{ удовлетворяет (3)}\} \subset C(0, T; L_2(Q))$. Более того, соответствие $\varphi \mapsto w$ как отображение из $L_2(Q)$ в $C(0, T; L_2(Q))$ и соответствие $f \mapsto w$ как отображение из $L_2(\Omega_T)$ в $L_2(0, T; W_2^1(Q))$ непрерывны, и для некоторых $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, не зависящих от w_i, f_i и φ_i ($i = 1, 2$), справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|_{C(0, T; L_2(Q))} &\leq c_1 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_2 \|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \\ \|w_1 - w_2\|_{L_2(0, T; W_2^1(Q))} &\leq c_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_4 \|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \end{aligned}$$

где w_1 и w_2 — решения задачи (1)–(3) при правых частях f_1 и f_2 и начальных условиях φ_1 и φ_2 , соответственно.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер темы FSSF-2020-0018).

© Солонуха О.В., 2021

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИФФУЗИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА, ГЕНЕРИРОВАННЫХ ШИРОКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ В ОДНОРОДНЫХ И МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МИШЕНЯХ¹

М.А. Степович*, Д.В. Туртин**,
В.В. Калманович*** (*,***Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского,
**Иваново, ИФ РЭУ им. Г.В. Плеханова)
m.stepovich@rambler.ru, **turtin@mail.ru, *v572264@yandex.ru*

Ранее нами получены некоторые результаты качественного анализа дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих математические модели диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных в однородных полупроводниках остро сфокусированным электронным пучком (т.н. электронным зондом) [1–3]; для некоторых из моделей рассматривались и вопросы их корректности. Также рассмотрены особенности моделирования диффузии ННЗ, генерированных в многослойных планарных структурах широким электронным пучком [4–6]. Однако вопросы корректности математических моделей для многослойных структур ранее не обсуждались.

В настоящей работе рассмотрены вопросы корректности математических моделей диффузии неравновесных ННЗ, генерированных широким электронным пучком: 1) в однородных полупроводниковых мишенях и 2) в многослойных планарных полупроводниковых структурах. Доказана корректность рассмотренных математических моделей и получены оценки результатов диффузии ННЗ, которые могут быть использованы при проведении практических расчётов.

Литература

1. Polyakov A.N. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material / A.N. Polyakov, A.N. Smirnova, M.A. Stepovich, D.V. Turtin // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2018. — Vol. 39, no. 2. — pp. 259–262.

2. Stepovich Mikhail A. On the correctness of mathematical models of time-of-flight cathodoluminescence of direct-gap semiconductors / Mi-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

© Степович М.А., Туртин Д.В., Калманович В.В., 2021

khail A. Stepovich, Dmitry V. Turtin, Elena V. Seregina, Veronika V. Kalmanovich // ITM Web of Conferences. — 2019. — Vol. 30. — 07014.

3. Turtin D.V. Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material / D.V. Turtin, E.V. Seregina, M.A. Stepovich // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 250, Issue 1. — pp. 166–174.

4. Калманович В.В. Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами / В.В. Калманович, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. — 2020. — Т. 84, № 7. — С. 1020–1026.

5. Серегина Е.В. О моделировании распределений неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в многослойных планарных полупроводниковых структурах / Е.В. Серегина, В.В. Калманович, М.А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2020. — № 7. — С. 69–74.

6. Stepovich M.A. On some problems of mathematical modeling of diffusion of non-equilibrium minority charge carriers generated by kilovolt electrons in semiconductors / M.A. Stepovich, E.V. Seregina, V.V. Kalmanovich, M.N. Filippov // Journal of Physics: Conf. Series. — 2021. — Vol. 1740. — 012035.

ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ¹

В.И. Сумин (Нижегород, ННГУ; Тамбов, ТГУ)
v_sumin@mail.ru

Автором была предложена (см., например, [1]) достаточно общая форма описания *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(\theta) = f(\theta, A[z](\theta), v(\theta)), \quad \theta \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m, \quad (1)$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^N$ и $f(\cdot, \cdot, \cdot) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$ заданы; $v(\cdot) \in \mathbf{D} \subset L_k^s$ — управление; $A : L_p^m \rightarrow L_q^l$ — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе \mathbf{T} подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in \mathbf{T}$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$ (это прямое многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра); $p, q, k \in [1, +\infty]$. К ВФУ (1)

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00199_а).

© Сумин В.И., 2021

обращением главной части приводятся самые разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др., см., например, [2], обзоры в [3-5]); обычно управление $v(\cdot)$ в (1) так или иначе соответствует распределенному или начальному управлению в УНКЗ, а если, например, управляемы старшие коэффициенты или запаздывания в основном уравнении УНКЗ, то в эквивалентном ВФУ (1) будет управляем оператор A .

Переход от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации (получение условий сохранения глобальной разрешимости УНКЗ при возмущении управлений; обоснование численных методов оптимального управления; вывод *необходимых условий оптимальности* (НУО) и, в частности, «сингулярных систем оптимальности» в смысле Ж.-Л. Лионса [6]; вырождение НУО и изучение соответствующих «особых управлений»; расширение оптимизационных задач и др., см. обзоры в [3-5]). Как эквиваленты УНКЗ в теории оптимизации бывают удобны и другие ВФУ (см. обзор [3], отметим результаты А.В. Чернова).

Доклад посвящен обзору результатов теории оптимизации распределенных систем, полученных методом обращения главной части УНКЗ. Проиллюстрируем метод на примере полулинейного параболического уравнения с управляемой главной частью.

Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ ($d_1 \leq d_2$), ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($\partial\Omega \in C_2$), элементы которой обозначаем $x = \{x^1, \dots, x^n\}$. На цилиндре $\Pi \equiv Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ с боковой поверхностью $S_T \equiv \partial\Omega \times (0, T)$ рассмотрим УНКЗ

$$\mathcal{L}[y] \equiv y'_t - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x, t) y'_{x^j})'_{x^i} =$$

$$= g(x, t, y(x, t), y'_x(x, t)), \quad \{x, t\} \in Q_T; \quad (2)$$

$$y(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad y(x, t) = 0, \quad \{x, t\} \in S_T, \quad (3)$$

где $c_{ij}(x, t) : \bar{\Pi} \rightarrow \mathbf{R}$ ($1 \leq i, j \leq n$) — управления, $g(x, t, \mathbf{y}, \mathbf{q}) : \Omega \times (0, T) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ — заданная функция. Предполагаем, что g , g'_y и g'_q измеримы по $\{x, t\}$, непрерывны по \mathbf{y}, \mathbf{q} , ограничены на любом ограниченном множестве. Пусть D — некоторое множество пространства $\mathcal{H}^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Pi})$ (определения используемых функциональных пространств см. в [7, гл.1, §1]). Множество \mathbf{D} допустимых наборов управлений $c \equiv \{c_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$ состоит из всех тех наборов, для каждого из которых: $c_{ij} \in D$, $1 \leq i, j \leq n$; производные $(c_{ij})'_{x^i}$,

$1 \leq i, j \leq n$, принадлежат классу $\mathcal{H}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Pi})$; выполняется условие равномерной параболичности $d_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x, t) \xi^i \xi^j \leq d_2 |\xi|^2$,
 $\{x, t\} \in \overline{\Pi}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Чтобы ввести понятие решения УНКЗ (2), (3) и привести задачу (2), (3) к ВФУ вида (1), рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\mathcal{L}[y](x, t) = z(x, t), \{x, t\} \in Q_T, \quad (4)$$

где $z \in L_\infty(Q_T)$. Для любых $c(\cdot) \in \mathbf{D}$, $y(\cdot) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, $\eta(\cdot) \in W_2^{1,1}(Q_T)$, $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$, $\xi \in [0, T]$ обозначим через $J[c, y, \eta, z, \xi]$ сумму $\int_0^\xi dt \int_\Omega \left\{ -y \eta'_t + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y'_{x^i} \eta'_{x^j} - \eta z \right\} dx + \int_\Omega y(x, \xi) \eta(x, \xi) dx$.

Следуя [7, гл.3, §1], функцию $y(\cdot) \in \overset{\circ}{V}_2^{1,0}(Q_T)$ назовем решением задачи (3), (4), если $y(\cdot)$ при почти всех $\xi \in [0, T]$ удовлетворяет тождеству: $J[c, y, \eta, z, \xi] = 0$, $\eta(\cdot) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Каковы бы ни были $c(\cdot) \in \mathbf{D}$ и $z(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$, задача (3), (4) имеет единственное в $\overset{\circ}{V}_2^{1,0}(Q_T)$ ограниченное решение [7, гл.3, теоремы 2.1, 4.2, 8.1].

Воспользуемся понятием функции Грина [7, гл.4, §16]. Пусть Q_{τ_1, τ_2} — цилиндр $\Omega \times (\tau_1, \tau_2)$, $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$, а S_{τ_1, τ_2} — его боковая поверхность. Функция $G_c(x, t; \zeta, \tau) \equiv G_c(\{x, t\}; \{\zeta, \tau\}) : Q_T \times Q_T \rightarrow \mathbf{R}$ — функция Грина задачи (3), (4), если, какова бы ни была точка $\{\zeta, \tau\} \in Q_T$, имеем: $G_c(x, t; \zeta, \tau) = 0$, $\{x, t\} \in Q_{0, \tau}$; функция $G_c(\cdot; \zeta, \tau) : Q_{\tau, T} \rightarrow \mathbf{R}$ — решение начально-краевой задачи: $G'_{ct} - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x, t) G'_{cx^i})'_{x^j} = \delta(x - \zeta) \delta(t - \tau)$, $\{x, t\} \in Q_{\tau, T}$; $G_c(x, \tau; \zeta, \tau) = 0$, $x \in \Omega$; $G_c(x, t; \zeta, \tau) = 0$, $\{x, t\} \in S_{\tau, T}$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, и решение понимается в смысле теории обобщенных функций. Функция $G_c(x, t; \zeta, \tau)$ имеет первые производные по переменным x [7, гл. 4, § 16]. Из [7, гл.4, теорема 16.3] следует, что выражения $\mathcal{A}_c[z](x, t) \equiv \int_0^t d\tau \int_\Omega G_c(x, t; \zeta, \tau) z(\zeta, \tau) d\zeta$, $\mathcal{B}_c[z](x, t) \equiv \int_0^t d\tau \int_\Omega (G'_{cx}(x, t; \zeta, \tau)) z(\zeta, \tau) d\zeta$, $\{x, t\} \in Q_T$, при любых $c(\cdot) \in \mathbf{D}$, $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$ ограничены на Q_T . Решение $y(\cdot)$ задачи (3), (4) представимо в виде

$$y(x, t) = \mathcal{A}_c[z](x, t), \quad \{x, t\} \in Q_T, \quad (5)$$

при этом $y'_x(x, t) = \mathcal{B}_c[z](x, t)$, $\{x, t\} \in Q_T$. С каждым $c \in \mathbf{D}$ свяжем класс W_c тех функций из $\overset{\circ}{V}_2^{1,0}(Q_T)$, любая из которых при данном $c(\cdot)$ и некотором $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$ является решением задачи (3),(4). Каждая функция из W_c и ее производная по x ограничены на Q_T .

Функцию $y(\cdot) \in \overset{\circ}{V}_2^{1,0}(Q_T)$ назовем решением УНКЗ (2),(3), отвечающим управлению $c(\cdot) \in \mathbf{D}$, если $y(\cdot)$ и $y'_x(\cdot)$ ограничены на Q_T и для п.в. $\xi \in [0, T]$ имеем тождество: $J[c, y, \eta, g(\cdot, y, y'_x), \xi] = 0$, $\eta(\cdot) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Так как при каждом $c(\cdot) \in \mathbf{D}$ формула (5) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классом W_c функций $y(\cdot)$ и пространством $L_\infty(Q_T)$ функций $z(\cdot)$, то при каждом $c(\cdot) \in \mathbf{D}$ УНКЗ (2),(3) эквивалентна ВФУ вида (1)

$$z(x, t) = g(x, t, \mathcal{A}_c[z](x, t), \mathcal{B}_c[z](x, t)), \{x, t\} \in Q_T, z \in L_\infty(Q_T), \quad (6)$$

в котором $\Pi = Q_T$, $N = n + 1$, $m = 1$, $l = n + 1$, $v(\cdot)$ отсутствует, $p = q = k = \infty$, оператор $A[z] \equiv \mathcal{A}_c[z] \equiv \{\mathcal{A}_c[z], \mathcal{B}_c[z]\}$, $z \in L_\infty(Q_T)$, вольтерров на системе цилиндров $\mathbf{T} = \{Q_{0,\tau}, \tau \in (0, T]\}$. Каждому $c(\cdot) \in \mathbf{D}$ не может отвечать более одного в $L_\infty(Q_T)$ решения ВФУ (6), а потому не может отвечать и более одного решения (в указанном выше смысле, то есть глобального) УНКЗ (2),(3). Свойства ВФУ (6) позволяют (см. [2, гл.1, §2; гл.2, §5]) доказать, например, следующую теорему об устойчивости (при возмущении управления) существования глобальных решений УНКЗ (2),(3) (результат получен автором совместно с М. С. Коржавиной).

Пусть \mathcal{R} — та часть \mathbf{D} , каждому элементу $c(\cdot)$ которой отвечает глобальное решение $y_c(\cdot)$ задачи (2),(3). Для $c(\cdot) \in \mathbf{D}$, $c_0(\cdot) \in \mathcal{R}$ положим $r(c, c_0) \equiv \|A_c - A_{c_0}\|_{L_\infty(Q_T) \rightarrow L_\infty^{n+1}(Q_T)}$.

Теорема. *Для любого $c_0(\cdot) \in \mathcal{R}$ существуют числа $\delta > 0, C > 0$ такие, что, если для какого-то $c(\cdot) \in \mathbf{D}$ выполняется неравенство $r(c, c_0) < \delta$, то $c(\cdot) \in \mathcal{R}$, при этом $\|y_c - y_{c_0}\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq Cr(c, c_0)$.*

Литература

1. Сумин В.И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами / В.И. Сумин // ДАН СССР. — 1989. — Т. 305, № 5. — С. 1056–1059.
2. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами / В.И. Сумин. — Н.Новгород : Изд-во ННГУ, 1992. — 110 с.

3. Sumin V. Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems / V. Sumin // IFAC PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, iss. 32. — P. 759–764.

4. Сумин В.И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений / В.И. Сумин // Тр. ИММ УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 262–278.

5. Сумин В.И. Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем / В.И. Сумин // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, № 132. — С. 422–440.

6. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. — М. : Наука, 1987. — 368 с.

7. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

М.И. Сумин (Тамбов, ТГУ; Нижний Новгород, ННГУ)
m.sumin@mail.ru

При получении классических условий оптимальности (КУО), в частности, принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП), в задачах оптимального управления с необходимостью приходится предполагать точное задание исходных данных этих задач. Между тем, существуют важные с прикладной точки зрения задачи, формально имеющие вид задач оптимального управления, в которых требование точности находится в явном несоответствии с физической сутью их постановок. К таким задачам можно отнести, прежде всего, многие актуальные обратные задачи для уравнений в частных производных. С формальной точки зрения они, как правило, записываются в форме задач оптимального управления с ограничениями-равенствами, однако, столь же формальная запись КУО в них вступает в противоречии с неустойчивостью этих задач по отношению к погрешностям исходных данных, влекущей, как следствие, неустойчивость самих КУО [1]. Таким образом, указанное выше условие точности плохо согласуется с естественным желанием «воспользоваться» КУО как инструментом для непосредственного

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00199).

© Сумин М.И., 2021

решения на их основе, «как можно большего» количества различных задач оптимального управления.

Анализ различных примеров задач условной оптимизации, оптимального управления приводит к естественному выводу о том, что свойства их некорректности, а также некорректности соответствующих КУО заложены в самой природе этих задач [1]. Поэтому, если возникает желание «привлекать» КУО непосредственно к решению современных содержательных оптимизационных задач, то и «относиться» к ним необходимо, в соответствии с традициями теории некорректных задач как к математическим объектам с выраженными свойствами некорректности. В этом случае мы неизбежно приходим к очевидной необходимости регуляризации КУО, то есть создания их «неких аналогов», в отсутствие точного задания исходных данных, «преодолевающих» указанные свойства некорректности. В докладе мы ставим во главу угла именно эту необходимость, предполагающую регуляризацию КУО и естественным образом объединяющую два направления математической теории: 1) КУО в задачах условной оптимизации и оптимального управления; 2) Регуляризация некорректных задач.

Для иллюстрации методов регуляризации КУО рассматривается (в упрощенной постановке) выпуклая задача оптимального граничного управления

$$(OC) \quad f(w) \rightarrow \min, \quad g(w) = 0, \quad w \in \mathcal{D} \subset L_2(S_T),$$

где непрерывные сильно выпуклый функционал $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ и векторный функционал $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ задаются равенствами

$$f(w) \equiv \langle A(\cdot, \cdot)z[w](\cdot, \cdot), z[w](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} + \langle B(\cdot, \cdot)w(\cdot, \cdot), w(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)},$$

$$g(w) \equiv A_1 z_m[w] + A_2, \quad z_m[w] \equiv (z[w](x_1, t_1), \dots, z[w](x_m, t_m))^*,$$

$(x_i, t_i) \in \overline{Q}_{i,T}$, $i = 1, \dots, m$, $t_i \in (0, T)$, $z[w]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$z_t - \sum_{i=1}^n z_{x_i x_i} + a(x, t)z = 0,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x, t)z = w(x, t), \quad (x, t) \in S_T,$$

$Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$, $Q_{i,T} \equiv \Omega \times (t_i, T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x, t) : x \in S, t \in (0, T)\}$, Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой

границей, $\mathcal{D} \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(x, t) \in W \text{ п.в. на } S_T\}$, $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклый компакт, $A : S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $B : S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$ — измеримые по Лебегу неотрицательные функции, $B(s, t) \geq L > 0$ п.в. на S_T , $a \in L_p(Q_T)$, $\sigma \in L_r(S_T)$, $a(x, t) \geq C$ п.в. на Q_T , $\sigma(x, t) \geq C$ п.в. на S_T , A_1 — заданная $(l \times m)$ -матрица, A_2 — заданный вектор из \mathbb{R}^l , $p > n/2 + 1$, $r > n + 1$, $n \geq 2$.

Задача (OC) содержит конечномерное ограничение-равенство: значения решения параболического уравнения в заранее выбранных фиксированных точках $(x_i, t_i) \in \bar{Q}_{i,T}$, $i = 1, \dots, m$, цилиндра Q_T , принадлежащих, возможно, его боковой граничной поверхности, должны быть равны некоторым заданным величинам. Задача (OC) в случае $A(\cdot, \cdot) = 0$, $B(\cdot, \cdot) = 1$ представляет собою обратную задачу дискретного граничного наблюдения, в которой решение начально-краевой задачи наблюдается (измеряется) в конечном наборе фиксированных точек на границе S_T и требуется найти по этим наблюдениям вызывающее их воздействие-управление.

Главное внимание в докладе уделяется вопросу получения для рассматриваемой задачи (OC) различных вариантов регуляризованных ПЛ и ПМП, формулируемых как в неитерационной, так и в итерационной формах, в терминах обобщенных минимизирующих последовательностей — минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги. Их основное предназначение — устойчивое генерирование МПР в задаче (OC) для целей ее непосредственного практического устойчивого решения. В докладе показывается, что регуляризованные ПЛ и ПМП: 1) формулируются как теоремы существования МПР в исходной задаче с одновременным конструктивным предъявлением их конкретных представителей; 2) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями классических ПЛ и ПМП — своих предельных вариантов, сохраняя общую структуру последних; 4) «преодолевают» некорректность КУО, представляя собою регуляризирующие алгоритмы для решения задачи (OC).

Существенными особенностями задачи (OC), характеризующими ее сложность, являются: 1) недифференцируемость по Фреше в $L_2(S_T)$ «точечных» функционалов $z[w](x_i, t_i)$, $w \in L_2(S_T)$, $i = 1, \dots, m$, и, как следствие, «такая же» недифференцируемость ее классической функции Лагранжа; 2) наличие регулярных борелевских мер (мер Радона) в правых частях уравнения и краевого условия, а также в «концевом» условии (при $t = T$) сопряженной краевой задачи классического ПМП. Однако, формулируемые и обсуждае-

мые в докладе регуляризованные ПМП для задачи (ОС) «преодолевают» как некорректность самой задачи и ПМП для нее, так и «неудобства» при возможной практической реализации регуляризованных ПМП, связанные с отмеченными особенностями.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах / М.И. Сумин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 279–296.

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ГОЛОМОРФНОСТИ

Д.С. Теляковский (Москва, НИЯУ МИФИ)

dtelyakov@mail.ru

Получено достаточное условие голоморфности функций $f(z)$, $z \in G \subset \mathbb{C}$, которые удовлетворяют некоторому ослабленному условию комплексной дифференцируемости.

Согласно теореме Гурса-Принсгейма функция, дифференцируемая в каждой точке области, является в этой области голоморфной. Предположение о дифференцируемости можно ослабить, но при этом на функцию надо дополнительно наложить те или иные метрические условия.

Объединение двух пересекающихся в точке ζ интервалов будем называть крестиком K_ζ с центром в точке ζ . Одним из ослабленных условий комплексной дифференцируемости являются условия Коши-Римана, выполнение которых в точке ζ означает существование производной относительно крестика K_ζ , причем один из его интервалов параллелен оси Ox , а другой — оси Oy декартовой системы координат.

Согласно теореме Лумана-Меньшова [1] непрерывная в области функция, которая в точках области удовлетворяет условиям Коши-Римана, является в области голоморфной. Условие непрерывности в этой теореме можно ослабить. Г.П. Толстов [2] в 1942 г. заменил условие непрерывности функции условием её ограниченности, Г.Х. Синдаловский [3] в 1985 г. — условием суммируемости $|f(z)|$ (относительно плоской меры Лебега), а Д.С. Теляковский [4] в 1986 г. — условием суммируемости $\log^+ |f(z)|$. Последнее, существенно ослабить уже нельзя, но предположение о выполнении условий Коши-Римана можно заменить менее ограничительным.

Д.Е. Меньшов [5, 6] в 1935 г. доказал, что на расположение интервалов крестиков можно не накладывать никаких ограничений и непрерывная функция, дифференцируемая во всех точках ζ относительно некоторого крестика с центром в точке ζ является голоморфной. Д.С. Теляковский [7] в 1989 г. показал, что если не накладывать никаких ограничений на расположение интервалов крестиков, то достаточно предполагать суммируемость $(\log^+ |f(z)|)^p$ при всех $p < 2$. Это условие является окончательным в терминах суммируемости $(\log^+ |f(z)|)^p$, но условие дифференцируемости вдоль крестиков можно заменить более слабым.

Будем говорить, что функция $f(z)$ удовлетворяет в точке ζ условию Липшица относительно крестика K_ζ если найдётся число $L_\zeta > 0$ для которого во всех точках $z \in K_\zeta$ выполнено неравенство

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq L_\zeta |z - \zeta|.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ определена в области $G \subset \mathbb{C}$ и для каждой точки $\zeta \in G$ найдутся

1° крестик K_ζ , относительно которого $f(z)$ удовлетворяет в ζ условию Липшица;

2° сходящаяся к ζ последовательность точек $\{z_n\}$, контингент которой в ζ содержит по крайней мере два неколлинеарных направления, относительно которой $f(z)$ дифференцируема в точке ζ .

Тогда, если $(\log^+ |f(z)|)^p$ локально суммируем в G при всех $p < 2$, то функция $f(z)$ является в области G голоморфной.

Если для всех точек $\zeta \in G$ интервалы крестика K_ζ ортогональны друг другу, то для голоморфности $f(z)$ достаточно предполагать суммируемость $\log^+ |f(z)|$.

Литература

1. Saks S. Theorie de l'integrale / S. Saks. — Warszawa-Lwów: G.E. Stechert & Co. : Monografie Matematyczne, 1933. — v. II. — 137 s.

2. Tolstoff G. Sur la fonctions bornees verifiant les conditions de Cauchy-Riemann / G. Tolstoff // Матем. сб. — 1942. — Т. 10 (52), № 1–2. — С. 79–86.

3. Синдаловский Г.Х. Об условиях Коши-Римана в классе функций с суммируемым модулем и некоторых граничных свойствах аналитических функций / Г.Х. Синдаловский // Матем. сб. — 1985. — Т. 128 (170), вып. 3 (11). — С. 364–382.

4. Теляковский Д.С. Об одном обобщении теоремы Лумана-Меньшова / Д.С. Теляковский // Матем. зам. — 1986. — Т. 39, вып. 4. — С. 539–549.

5. Menchoff D. Sur la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann / D. Menchoff // Fundamenta Math. — 1935 — V. 25. — P. 59–97.

6. Меньшов Д.Е. Об асимптотической моногенности / Д.Е. Меньшов // Матем. сб. — 1936. — Т. 1 (43), № 2. — С. 189–210.

7. Теляковский Д.С. Обобщение одной теоремы Меньшова о моногенных функциях / Д.С. Теляковский // Известия АН СССР. — 1989. — Т. 53, вып. 4. — С. 886–896.

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В СЛУЧАЕ « P -ВОЛНОВОГО» СВЕРХПРОВОДНИКА¹

Т.С. Тинюкова, Ю.П. Чубурин (Ижевск, УдГУ,
Удмуртский федеральный исследовательский центр Уро РАН)
ttinyukova@mail.ru, chuburin@udman.ru

Гамильтониан Боголюбова–де Жена в случае p -волнового сверхпроводящего порядка имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \mu & -\Delta \partial_x \\ \Delta \partial_x & \partial_x^2 + \mu \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\Delta \neq 0$ — вещественный параметр сверхпроводящего спаривания, μ — химический потенциал. Гамильтониан (1) действует на функции вида $\Psi(x) = (\psi_e(x), \psi_h(x))^T$, описывающие квазичастицы, где T означает транспонирование; $\psi_e(x)$ и $\psi_h(x)$ — электронная и дырочная компоненты, соответственно. В случае $\mu < \Delta^2/2$ спектр H определяется неравенством $|E| \geq |\mu|$. В дальнейшем предполагаем, что $|\mu| \ll \Delta^2/2$, и рассматриваем возмущенный гамильтониан $H + V$, где потенциал

$$V = Z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \delta(x),$$

описывает примесь; здесь Z — вещественный параметр, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

¹ Работа Т.С. Тинюковой выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект FEWS -2020-0010. Работа Ю.П. Чубурина поддерживается программой финансирования АААА-А16-116021010082-8.

© Тинюкова Т.С., Чубурин Ю.П., 2021

Как локализованные, так и резонансные состояния будем изучать с помощью уравнения Дайсона

$$\Psi = -(H - E)^{-1} V \Psi$$

и предварительно найденной функции Грина.

Теорема 1. 1) Для сколь угодно малых $Z > 0$ в случае топологической фазы, т.е. при $\mu > 0$, вблизи верхней и нижней границы щели существуют энергетические уровни

$$E = \pm \mu \left(1 - \frac{Z^2}{2\Delta^2} \right), \quad (2)$$

соответствующие собственным функциям (АЛС)

$$\Psi_{\mu}(x) = (0, 1)^T e^{-|\mu Z x|/\Delta^2}, \quad \Psi_{-\mu}(x) = (1, 0)^T e^{-|\mu Z x|/\Delta^2}.$$

2) В случае тривиальной фазы ($\mu < 0$) верно то же самое для $Z < 0$ и с заменой $\Psi_{\pm\mu}$ на $\Psi_{\mp\mu}$ (электроны и дырки меняются местами).

При уменьшении $\mu > 0$ до нуля два АЛС, отвечающие двум граничным точкам энергетической щели, в пределе образуют два майорано-подобных состояния $\psi_e^*(x) = \psi_h(x)$.

Функция Грина имеет ветвление в граничных точках $\pm\mu$, при этом энергия на втором листе отвечает резонансному (распадающемуся) состоянию. В случае $Z > 0$ при переходе из топологической фазы в тривиальную электрон на нижней границе щели и дырка на верхней превращаются в резонансные состояния, причём электрон оказывается на верхней границе, а дырка на нижней. Это же происходит при $Z < 0$, если локализованные и резонансные состояния поменять местами.

Литература

1. Elliot S.R. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics / S.R. Elliot, M. Franz // Rev. Mod. Phys. — 2015. — № 87. — P. 137–163.

2. Liu C.-X. Andreev bound states versus Majorana bound states in quantum dot–nanowire–superconductor hybrid structures: Trivial versus topological zero-bias conductance peaks / C.-X. Liu, J.D. Sau, T.D. Stanescu, S. Das Sarma // Phys. Rev. B. — 2017. — № 96. — 075161.

3. Szumniak P. Spin and charge signatures of topological superconductivity in Rashba nanowires / P. Szumniak, D. Chevallier, D. Loss, J. Klinovaja // Phys.Rev.B. — 2017. — № 96. — 041401(R).

**ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

Ю.А. Тихонов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)

yurytik@yandex.ru

В данной работе изучается вопрос о корректной разрешимости следующего абстрактного интегро-дифференциального уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве H :

$$\dot{u}(t) + \alpha Au(t) + B\rho(t) + \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0, \quad (1)$$

$$\dot{\rho}(t) - Bu(t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad \rho(+0) = \psi_0, \quad (3)$$

Операторы A и B — самосопряжённые положительные операторы в H , причём A^{-1} компактен, а оператор $BA^{-1/2}$ ограничен. Функция $K(t)$ задаётся интегралом:

$$K(t) = \int_{d_0}^{+\infty} \frac{e^{-\tau t}}{\tau} d\mu(\tau),$$

где $d_0 > 0$, $\mu(\tau)$ — неубывающая, непрерывная справа функция. Пусть выполнено условие

$$\int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1 \quad (4)$$

Обозначим $C^n(X, H)$ — множество вектор-функций, действующих из множества $X \subset \mathbb{R}$ в H , имеющих непрерывные производные вплоть до n -го порядка. Разрешимость задачи (1) – (3) будем понимать в следующем смысле [1]:

Определение 1. Пара функций $u(t)$ и $\rho(t)$ называется ослабленным решением задачи (1)-(3), если $u(t), \rho(t) \in C([0, +\infty], H) \cap C^1((0, +\infty), H)$, при этом $u(t)$ и $\rho(t)$ удовлетворяют уравнениям (1) - (2) при $t > 0$ и начальным условиям (3).

Теорема 1. Пусть выполнено условие (4), тогда для любых $\varphi_0 \in H$ и $\psi_0 \in H$ задача (1) - (3) — корректно разрешима в смысле

определения 1. Более того, существует $\theta \in (0, \pi/2)$, что в области $\{|\arg z| < \theta\}$ функции $u(z)$ и $\rho(z)$ являются аналитическими, причём найдутся $M > 0$, $m > 0$, $q \in (0, 1)$ и $\gamma > 0$, такие что справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \|u(t + i\tau)\|_H^2 + \|\rho(t + i\tau)\|_H^2 < \\ & < M e^{-2\gamma t} \ln \left(e + \frac{1}{t - \frac{m}{q}|\tau|} \right) (\|\varphi_0\|_H^2 + \|\psi_0\|_H^2). \end{aligned}$$

Заметим, что если формально продифференцировать уравнение (1) и, воспользовавшись (2), исключить $\rho(t)$, получим уравнение второго порядка

$$\ddot{u}(t) + \alpha A \dot{u}(t) + B^2 u(t) + K(0) A u(t) + \int_0^t \dot{K}(t-s) A u(s) ds = f(t), \quad (5).$$

Уравнение (5) возникает в различных задачах теории вязкоупругости, в частности, при изучении малых поперечных колебаний вязкоупругого стержня [2], [3]. Отметим, что при $\alpha = 0$, это уравнение является уравнением типа Гуртина-Пипкина. Уравнения подобного типа в случае, когда $B = 0$, подробно изучены на предмет корректной разрешимости в весовых пространствах Соболева в работах В.В. Власова и соавторов. Основные результаты опубликованы в монографии [4] (гл. 3) и цитированных в ней статьях автора.

Система уравнений типа (1) - (3) с нулевым α и ядром $K(t)$, представимым в виде конечной суммы экспонент, изучалась также в работе [5], в которой использовался подход к изучению разрешимости и экспоненциальной устойчивости задачи (1) - (3) с позиции теории полугрупп.

Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. / С.Г. Крейн. — М.:Наука., 1967. — 464 с.
2. Милославский А.И. О спектре неустойчивости операторного пучка. / А.И. Милославский// Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 4. — С. 88–94
3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости /А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. — М. : Наука, 1970. —279 с.
4. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений /В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М. : Макс Пресс, 2016. —488 с.

МОДИФИЦИРОВАННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЭНО С ГИСТЕРЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬ¹

А.В. Толкачев (Воронеж, ВГУ, ВГЛУ им. Г. Ф. Морозова)
tolkachev.akim@mail.ru

Рассмотрим пример динамической системы с дискретным временем, обладающей странным аттрактором. Она может служить для описания динамики ряда простых физических систем, таких как частица, в вязкой среде под действием импульсных толчков.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (1)$$

Такую систему еще называют отображением Эно, которое демонстрирует чувствительную зависимость к значениям своих параметров. При варьировании этих величин, динамика отображения имеет различные режимы. Например, для хаотического режима параметры принимают значения $(a, b) = (1.4, -0.3)$ [1].

Если в физической системе присутствует гистерезисное трение (например, движение ферромагнитного шарика в магнитном поле), то отображение модифицируется и для первого уравнения в системе (1) добавляется гистерезисное слагаемое z_n , который формализуем с помощью конструктивной модели или нелинейности Прејзаха, В этом случае исходная система (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - by_n - z_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (2)$$

Здесь z_n — переменный от времени τ выход с гистерезисного преобразователя $\hat{\Gamma}$, который определяют как $z_n = \hat{\Gamma}[\eta(\alpha, \beta), \tau_0, \chi_0] \psi(\tau)|_{\tau=1}$, а $\psi(\tau)$ — переменный от времени вход $\psi(\tau) = x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})\tau$. Сам же оператор задают следующим образом:

$$\hat{\Gamma}[\eta(\alpha, \beta), \tau_0, \chi_0] \psi(\tau) = \int\int_{\alpha < \beta} \hat{R}[\alpha, \beta, \chi_0, \tau_0,] \psi(\tau) d\alpha d\beta \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00158).

© Толкачев А.В., 2021

Преобразователь Прейзаха $\hat{\Gamma}$ является континуальным аналогом семейства неидеальных реле, соединенных параллельно. Пространство состояний этого преобразователя состоит из пар $(\psi, \eta(\alpha, \beta))$, где $\eta(\alpha, \beta)$ — характеристическая функция подмножества полуплоскости $\alpha < \beta$. В (3) через $\hat{R}[\alpha, \beta, \chi_0, \tau_0,]$ обозначен гистерезисный преобразователь, отвечающий неидеальному реле с пороговыми числами

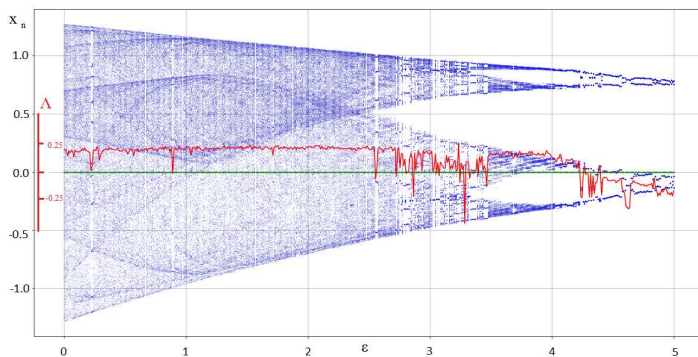


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма (синий) и старший показатель Ляпунова (красный) в зависимости от ε

ми α и β , начальным состоянием $\chi_0 \in \{-1, 1\}$ и начальным моментом времени τ_0 [2].

Учет гистерезиса в системе (2) должен привести к существенным изменениям её динамики при $(a, b) = (1.4, -0.3)$. Чтобы проверить это утверждение введем параметр ε перед слагаемым z_n . Далее рассчитаем бифуркационную диаграмму и старший ляпуновский показатель Δ при различных значениях этого параметра из отрезка $\varepsilon \in [0, 5]$. Полученный результат приведен на рис. 1. В итоге, видно, что наличие гистерезисной нелинейности в отображении приводит к регуляризации динамики, заключающееся в постепенный переходе от хаотического режима к периодическому или квазипериодическому при увеличении значения параметра ε .

Литература

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций) / С.П. Кузнецов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 295 с.
2. Красносельский М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.

**НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЕСОВОГО
ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В $L_p^{\gamma 1}$**

Н.И. Трусова (Липецк, ЛГПУ имени П.П.
Семенова-Тян-Шанского)
trusova.nat@gmail.com

Рассмотрим частно-интегральный оператор (сокращение ЧИО)

$$\int_{|x'| < \rho} k(|x'|, x'') u(|t'|, x'') dt, \quad x = (x', x'') \in \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n-m}, \quad (1)$$

с ядром $k(x, t')$, $(x, t') \in \mathbb{R}_{n+m}$. Применяя к (1) сферическое преобразование координат $x' = r\Theta$, $|\Theta| = 1$, получим следующую весовую форму ЧИО

$$\int_0^\rho k(r, x'') u(r, x'') r^{m-1} dr, \quad (r, x'') \in \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_{n-1}.$$

Общая конструкция весового ЧИО имеет вид

$$K^\gamma u(x) = \int_0^a k(x_1, x'', t_1) u(t_1, x'') t_1^\gamma dt_1, \quad (t_1, x'') \in \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_{n-1}.$$

Согласно работе [1] предполагаем, что параметр $\gamma > -1$. При этом значения $\gamma > 0$ отвечают дробно-мерной области интегрирования (см. [2], [3]); при $-1 < \gamma < 0$ параметр характеризует фрактальность области (среды) интегрирования (см. [3]).

Пусть $D = D_1 \times D_2 = (0, a) \times (0, b)$. Весовой ЧИО в \mathbb{R}_2 задается равенством

$$(K^{\gamma 1} u)(x) = \int_0^a k(x; t_1) u(t_1, x_2) t_1^{\gamma 1} dt_1, \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2)$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_i > -1$. Через $L_p^\gamma(D)$ обозначим весовое пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{L_p^\gamma(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}, \quad x^\gamma = |x_1|^{\gamma_1} |x_2|^{\gamma_2}.$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

© Трусова Н.И., 2021

Пусть p и q — взаимно сопряженные числа, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Получена оценка

$$\|K^{\gamma_1} u\|_{L_p^\gamma(D)} \leq \left[\int_{D_2} \|k(x_2)\|_{L_{(q,p)}^{(\gamma_1, \gamma_1)}(D_{1,1})}^{pq} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/pq} \times \\ \times \left[\int_{D_2} \|u(x_2)\|_{L_p^{\gamma_1}(D_1)}^2 x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/p^2},$$

которая с учетом [4] примет вид

$$\|K^{\gamma_1} u\|_{L_p^\gamma(D)} \leq \|k\|_{L_q^{\gamma_1}(D_1; L_{(p,pq)}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(D_1, D_2))} \|u\|_{L_{(p,p^2)}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(D_1, D_2)},$$

где через $L_{(p,pq)}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(D_1, D_2)$ и $L_{(p,p^2)}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(D_1, D_2)$ обозначены анизотропные лебеговы классы функций (в смысле С.М. Никольского [5]).

Теорема 1. *Оператор (2) непрерывен из $L_{(p,p^2)}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(D_1, D_2)$ в $L_q^{\gamma_1}(D_1; L_{(p,pq)}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(D_1, D_2))$.*

Литература

1. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательными параметрами операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56. № 12. С. 1–11.
2. Ляхов Л.Н. О радиальных функциях классических стационарных уравнениях в евклидовых пространствах дробной размерности / Л.Н. Ляхов — Минск : Издательский центр БГУ, 2012. AMADE–2011. С. 115–126.
3. Ляхов Л.Н. Построение ядер Дирихле и Валле-Пусена—Никольского для j -бесселевых интегралов Фурье / Л.Н. Ляхов // Тр. Московского Математ. Общества. — 2015. — Т.76. — Вып. 1. С. 67–84.
4. Лионс, Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.Л. Лионс. — М.: Мир. — 1972. С. 587.
5. О.В. Бессов. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бессов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. — М.: Наука, — 1975. — 478 с.

АНАЛОГ БИНОМА НЬЮТОНА ДЛЯ СУММЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛУ)

vum1@yandex.ru

Пусть A, B — линейные операторы, некоммутативные по умножению. Вводится сумма $S_{i,j}^{A,B}$ по всевозможным перестановкам из i элементов A и j элементов B .

В работе [1] доказан следующий аналог бинома Ньютона для степени суммы этих операторов.

Теорема 1.

$$(A + B)^n = \sum_{i=0}^n S_{i,j}^{A,B}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Если A, B — коммутативны по умножению, то формула (1) превращается в следующую. Пусть C_j^i — количество сочетаний из j элементов по i .

Теорема 2.

$$(A + B)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i A^{n-i} B^i, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Литература

1. Усков В.И. Свойства некоторого нагруженного интегрального оператора с весом / В.И. Усков, А.Г. Пантелеева // Воронежский научно-технический вестник. — 2020. — № 4 (34). — С. 4–10.

ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛУ им. Г.Ф. Морозова)

vum1@yandex.ru

Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения

$$A \frac{dx}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)x(t, \varepsilon), \quad (1)$$

где A, B, C, D — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховом пространстве E ; $t \in \mathfrak{T} = [0; T]$; $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$.

© Усков В.И., 2021

© Усков В.И., 2021

Оператор A обладает свойством: 0 является нормальным собственным числом (0-NEV). Он обладает двумерным ядром, элементы ядра не имеют присоединенных элементов (т.е. корневое подпространство оператора состоит только из элементов ядра).

Уравнение (1) с правой частью $(B + \varepsilon C)x(t, \varepsilon)$ было исследовано в работах [1] (A — фредгольмов с нулевым индексом, случай одномерного ядра) и [2] (A — 0-NEV-оператор), где в качестве примера приводилась динамическая модель Леонтьева межотраслевого баланса выпуска продукции.

Вследствие вырожденности оператора A возможно следующее поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$:

1. Равномерная сходимость на \mathfrak{X} решения допредельной задачи к решению предельной задачи.
2. Явление погранслоя [3] вблизи начальной точки.
3. Остальные случаи: предел решения по норме в банаховом пространстве E стремится к бесконечности, либо не существует.

В настоящей работе получено уравнение ветвления, позволяющее изучить влияние малого параметра на свойства решения. Определены условия, при которых имеет место соответствующее поведение решения.

Литература

1. Zubova S.P. Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case / S.P. Zubova, V.I. Uskov // *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 3, pp. 395–404.
2. Uskov V.I. Boundary layer phenomenon for a first order descriptor equation with small parameter on the right-hand side / V.I. Uskov // *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 250, no. 1, pp. 175–181.
3. Zubova S.P. The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative / S.P. Zubova // *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 89, pp. 72–75.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЖЕСТКОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ¹

Р.И. Фасхутдинова, Л.В. Еникеева (Уфа,
Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН,
Уфимский государственный нефтяной технический университет)
roza-fask@mail.ru

В качестве объекта исследования выбрана промышленная установка каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции. Сырьем данной установки является гидроочищенная бензиновая фракция, в качестве катализатора процесса применяют бифункциональный катализатор отечественного производства марки СИ-2 [1]. На основе имеющихся исходных данных представлена модифицированная вероятная схема химических превращений, учитывающая детальное образование побочных продуктов в ходе реакций гидрокрекинга. Схема разработана на основе решения обратной задачи химической кинетики с использованием численных методов решения жестких систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (СОНДУ) – математического описания изменения концентраций, участвующих в реакциях веществ (прямая задача).

Также проведено теоретическое и экспериментальное исследование прямой кинетической задачи на жесткость. Была найдена матрица Якоби (размерностью 17×17), для которой были рассчитаны собственные значения. В ходе исследования была установлена жесткость рассматриваемой СОНДУ на основе нескольких математических определений жесткости. При решении обратных задач химической кинетики часто возникают ситуации, когда константы скоростей реакции принимают значения, отличные друг от друга на несколько порядков. Стандартные явные численные методы зачастую не справляются с интегрированием таких систем и перед нами встает задача рассмотрения методов, способных решать жесткие задачи. Поэтому в среде ПО Matlab в ходе работы было произведено сравнение пяти методов *ode*, в числе которых были методы, зарекомендовавшие себя эффективными для решения жестких систем. Среди них неявные методы — одноитерационный метод Розенброка 2-го порядка точности и многошаговый метод Гира.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов на основе выбранных эффективных численных методов показали высо-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 20-31-90094).

© Фасхутдинова Р.И., Еникеева Л.В., 2021

кую адекватность. Данные промышленной установки были описаны с высокой точностью.

Предложенная методика может быть опробована для решения других задач химической кинетики, для решения которых требовались большие вычислительные ресурсы и раскрывает возможности для использования технологии параллельных вычислений при решении прямых и обратных задач при исследовании сложных механизмов промышленных технологических процессов [5-7].

Литература

1. Фасхутдинов А.Г., Ахметов И.В., Губайдуллин И.М., Мусина А.Е. Математическое моделирование процесса каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23. № 3. С. 739-744.

2. Хайер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.:Наука, 1999. С. 685.

3. Тихонова М. В., Губайдуллин И. М., Спивак С. И. Численное решение прямой кинетической задачи методами Розенброка и Мишельсена для жестких систем дифференциальных уравнений // Журнал средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. №2. С. 26–32.

4.Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998. С. 575.

5. Nurislamova L.F., Gubaydullin I.M., Koledina K.F., Safin R.R. Kinetic model of the catalytic hydroalumination of olefins with organoaluminum compounds // Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis. 2016. Т. 117. № 1.С. 1-14.

6. Усков С.И., Еникеева Л.В., Потемкин Д.И., Беляев В.Д., Снытников П.В., Губайдуллин И.М., Кириллов В.А., Собянин В.А. Кинетика мягкого парового риформинга пропана в избытке метана на Ni-содержащем катализаторе // Катализ в промышленности. 2017. № 1. С. 11-17.

7. Линд Ю.Б., Губайдуллин И.М., Мулюков Р.А. Методология параллельных вычислений для решения задач химической кинетики и буровой технологии // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 2 (36). С. 44-49.

**ГЛАДКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
В НЕГЛАДКОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ**

К.Д. Федоров (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
konstantin-dubna@mail.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ рассматривается область $\Omega = \{(x, t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с боковыми границами $\Sigma_k = \{(x, t) \in \bar{D} : x = g_k(t)\}$, $k = 1, 2$, $g_2(t) - g_1(t) \geq d > 0$, $t \in [0, T]$.

Функции $g_k \in C^1(0, T]$ и справедливы оценки: $|g'_k(t)| \leq C \frac{\omega(t^{\frac{1}{2}})}{t^{\frac{1}{2}}}$, $k = 1, 2$, $t \in (0, T]$, где ω – некоторый модуль непрерывности. Таким образом, условия на боковые границы области допускают у этих кривых наличие «клювов» в угловых точках области при $t = 0$.

В D рассматривается равномерно-параболический по Петровскому (см. [1]) матричный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ставится следующая задача:

$$Lu = 0, (x, t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, g_1(0) \leq x \leq g_2(0), \tag{2}$$

$$u \Big|_{\Sigma_1} = \psi_1, u \Big|_{\Sigma_2} = \psi_2. \tag{3}$$

В настоящей работе доказывается, что если $\psi_1, \psi_2 \in C^1_0[0, T]$, то существует классическое решение задачи (1)–(3). Это решение имеет вид специального параболического потенциала, принадлежит классу $C^{2,1}_{x,t}(\bar{\Omega})$ и справедливы соответствующие оценки.

Литература

1. Петровский И.Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций / И.Г. Петровский // Бюллетень МГУ, секция А. — 1938. — Т. 1, №7. — С. 1–72.

**ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ
С ОДНОРОДНЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ
В-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

Ф.Г. Хуштова (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)

khushtova@yandex.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x, y) - u_y(x, y) = 0, \quad (1)$$

где

$$B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

— оператор Бесселя [1], $|b| < 1$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и такую, что $u \in C(\Omega)$, $B_x u$, $u_y \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω .

Задача. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^b u_x(x, y) = hu(0, y) - \nu(y), \quad 0 < y < T, \quad (3)$$

где $\nu(y)$ — заданная функция, $h = \text{const}$.

Примем обозначения

$$\beta = \frac{1-b}{2}, \quad \lambda = \frac{2^{2\beta-1} \Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)} h,$$

$$K(x, y) = \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)} y^{\beta-1} e^{-\frac{x^2}{4y}}, \quad E(y) = y^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-hy^\beta),$$

$$\tilde{K}(x, y) = K(x, y) - \lambda K(x, y) * E(y).$$

Здесь $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера [2, с. 15], [3, с. 11]; $E_{\beta, \beta}(z)$ — функция типа Миттаг-Леффлера [4, с. 117], [5, с. 224]; $f(y) * g(y)$ — свертка Лапласа.

Теорема 1. Пусть $\nu(y) \in C[0, T]$. Тогда функция

$$u(x, y) = \int_0^y \tilde{K}(x, y - \eta) \nu(\eta) d\eta$$

является решение задачи (1)–(3).

Теорема 2. Пусть $h \geq 0$. Тогда существует не более одного регулярного решения задачи (1)–(3) в классе ограниченных функций.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука. Физматлит, 1997. — 208 с.
2. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1965. — 296 с.
3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. — М. : Физматлит, 1963. — 359 с.
4. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. — М. : Наука, 1966. — 672 с.
5. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1967. — 300 с.

СВОЙСТВА КУСОЧНО МОНОТОННЫХ МНОЖЕСТВ В $C[a, b]^1$

И.Г. Царьков (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова
механико-математический факультет, Московский Центр
фундаментальной и прикладной математики)
tsar@mech.math.msu.su

Через $B(x, r)$ и $\mathring{B}(x, r)$ обозначим соответственно замкнутый и открытый шар в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ (в дальнейшем для краткости будем обозначать как X) с центром x радиуса r , т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}$ и $\{y \in X \mid \|y - x\| < r\}$. Через $S(x, r)$ обозначим сферу с центром x радиуса r , т.е. множество $\{y \in X \mid \|y - x\| = r\}$. Нам также понадобится обозначение единичных сферы S^* и шара B^* сопряженного пространства X^* (в случае обычного линейно нормированного пространства X). И через $\text{ext } S^*$ будем обозначать множество всех экстремальных функционалов из S^* . Для произвольного множества M в некотором нормированном пространстве X через $\rho(y, M)$ ($y \in X, M \subset X$) обозначим расстояние до множества M , т.е. величину $\inf_{z \in M} \|z - y\|$. Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а).

© Царьков И.Г., 2021

точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}$. Для произвольных $x \in X$ и $\delta > 0$ рассмотрим также метрические δ -проекции $P_M^\delta x$ и $\tilde{P}_M^\delta x$ представляющие собой соответственно множества $\{y \in M \mid \|y - x\| \leq \varrho(x, M) + \delta\} = M \cap B(x, \varrho(x, M) + \delta)$ и $\{y \in M \mid \|y - x\| < \varrho(x, M) + \delta\} = M \cap B(x, \varrho(x, M) + \delta)$.

Пусть $\emptyset \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \emptyset$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$ (это геометрически означает, что из точки y исходит луч, проходящий через x , для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \emptyset$ и каждая точка $y \in P_M x$ является точкой светимости. Если все точки из $X \setminus M$ являются точками солнечности (строгой солнечности), то множество M называют солнцем (строгим солнцем).

Напомним, что множество, являющееся строгим солнцем, является так называемым множеством Колмогорова, т.е. все элементы наилучшего приближения могут быть охарактеризованы в форме критерия Колмогорова.

Подмножество $M \subset X$ называется сильно связным по Менгеру, если $\mathbf{m}(x, y) \cap M \neq \{x, y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$, где $\mathbf{m}(x, y) := \bigcap_{B(z, r) \supset \{x, y\}} B(z, r)$. Отметим также, что любое пересечение с открытым или замкнутым шаром связного по Менгеру множества является связным по Менгеру.

Путь $p : [0, 1] \rightarrow X$ (непрерывное отображение) в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ называется монотонным, если для любого функционала $x^* \in \text{ext } S^*$ функция $x^*(p(t))$ является монотонной. Множество M называется монотонно линейно связным, если любые две точки этого множества можно соединить монотонным путем, след которого лежит в M .

Пусть $a < b$, $M \subset C[a, b]$ – монотонно линейно связное непустое множество, обладающее свойством: для любых функций $f, g \in M$

$$\text{card}\{t \in [a, b] \mid f(t) = g(t)\} \leq 1 \text{ или } f \equiv g \text{ на } [a, b].$$

Функцию $\tau \in C[a, b]$ будем называть n -ломаной относительно множества M , если существует набор узлов $\{x_i\}_{i=0}^k$ ($k \leq n$): $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$, для которых $\tau(t) = f_i(t) \in M$ (говорят, что функция f_i задает i -ый кусок функции τ) на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, k}$). Множество всех n -ломаных относительно множества M будем обозначать как $S_n(M) = S_n(M, [a, b])$.

В качестве примера таких множеств M можно взять множество функций вида $\{cx + d\}$. В этом случае множество $S_n(M)$ будет множеством n -звенных ломаных с нефиксированными узлами. Можно также в качестве M взять множество функций вида $\{c; \frac{c}{x+d}\}$.

Теорема 1. *Множество $S_n(M, [a, b])$ связано по Менгеру.*

Пусть $\varepsilon \geq 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \rightarrow M$ называется аддитивной (мультипликативной) ε -выборкой, если для всех $x \in X$ выполняется включение $\varphi(x) \in P_M^\varepsilon x$ (соответственно $\varphi(x) \in P_M^{\varepsilon \varrho(x, M)} x$). В случае, когда эти включения выполняются на некотором множестве $E \subset X$, говорят о ε -выборке на E .

Теорема 2. *Пусть $M \subset C[a, b]$ непусто и ограничено компактно. Тогда множество $S_n(M, [a, b])$ является монотонно линейно связным, обладает непрерывной ε -выборкой для всех $\varepsilon > 0$ и является солнцем.*

СЦЕПЛЕННОСТЬ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ, СУПЕРКОМПАКТНОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

А.Г. Ченцов (Екатеринбург, ИММ УрО РАН)

chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается широко понимаемое измеримое пространство (ИП), получаемое оснащением непустого множества π -системой его подмножеств (п/м) с «нулем» и «единицей» (π -система есть непустое семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). На π -системе определяются ультрафильтры (у/ф) и максимальные сцепленные системы (МСС) [1, гл.VII, §4] множеств; у/ф являются МСС, но возможны МСС, не являющиеся у/ф. Множество всех МСС на заданной π -системе оснащается топологиями волмэновского и стоуновского типов, образуя битопологическое пространство (БТП). Множество всех у/ф данной π -системы также превращается в БТП, являющееся подпространством БТП с точками в виде МСС. В случае, когда π -система является решеткой замкнутых множеств в топологическом пространстве, отметим понятия суперкомпактности и суперрасширения [1–5]. В настоящем изложении (см.[6–9]) рассматривается аналог суперрасширения: на произвольной π -системе исследуется пространство МСС с топологией волмэновского типа и устанавливается его суперкомпактность («стоуновский» вариант пространства МСС является нульмерным T_2 -пространством).

Поскольку свойство суперкомпактности ТП не является, вообще говоря, наследственным (см.[5, 5.11]), вопрос его распространения на пространство u/ϕ с топологией волмэновского типа требует специального исследования. В частности, он решается положительно в случае, когда МСС исчерпываются u/ϕ . Указаны условия на π -систему, при которых МСС и u/ϕ данной π -системы отождествимы (свойство суперкомпактности, будучи топологическим, реализуется [7] для подпространства u/ϕ и в некоторых случаях, когда имеются МСС, не являющиеся u/ϕ). Упомянутое свойство отождествимости u/ϕ и МСС сохраняется произведениями π -систем, что представляется полезным для конструкций теории вероятностей (см.[10, гл.III]); алгебры и полуалгебры множеств являются π -системами. Построения на основе сцепленности и суперкомпактности получили развитие в [11] (имеются в виду n -сцепленность и n -суперкомпактность, где n — натуральное число).

Литература

1. Федорчук В.В. Общая топология. Основные конструкции / В.В.Федорчук, В.В.Филиппов. — М. : Физматлит, 2006. — 336 с.
2. de Groot J. Superextensions and supercompactness / de Groot J // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. —1969. — Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., P. 89–90.
3. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. / van Mill J. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977. — 238 p.
4. Strok M. Compact metric spaces have binary bases / M.Strok, A. Szymanski // Fund. Math. — 1975. — Vol. 89, No. 1. — P. 81–91.
5. Архангельский А.В. Компактность. Общая топология — 2. /А.В. Архангельский — Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М. : ВИНТИ, 1989. Т. 50, С. 5–128.
- 6.Ченцов А.Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств / А.Г.Ченцов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27, — Вып. 3. — С. 365–388.
- 7.Ченцов А.Г. Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем /А.Г.Ченцов // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, — № 2. — С. 240–257.
- 8.Ченцов А.Г. О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа / А.Г.Ченцов // Известия Ин-

ститута математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2019. — Т. 54. — С. 74–101.

9. Ченцов А.Г. Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры: основные представления и топологические свойства / А.Г.Ченцов // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т.25, — №129. — С.68-84.

10. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей / Ж.Неве. М. : Мир, 1969. — 310 с.

11. Ченцов А.Г. К вопросу о некоторых обобщениях свойств сцепленности семейств множеств и суперкомпактности топологических пространств / А.Г.Ченцов // Известия вузов. Математика. — 2020. — №11. — С. 65–80.

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ РАССМОТРЕНИИ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ИХ МНОГОКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, СЛУЧАИ НЕСОГЛАСОВАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

А.Д. Чернышов, М.И. Попов (Воронеж, ВГУИТ)

mihail_semilov@mail.ru

Задачи с разрывными решениями могут возникать при задании разрывным образом входных данных, при рассмотрении составных конструкций из разных материалов, при задании граничных условий разрывным способом и многих других случаях.

Известно, если функция терпит разрыв первого рода, то её ряд Фурье существует и в точке разрыва принимает среднее арифметическое значение. Такие ряды медленно сходятся и в окрестности точки разрыва имеют большую погрешность. Дифференцирование подобных рядов может привести к расходящимся рядам. Некоторые задачи физики и механики описываются расходящимися рядами. Поэтому возникли методы, позволяющие улучшить сходимость расходящихся рядов Фурье. Для их улучшения появились методы Эйлера, Линделефа, Фейера, Вороного, Абеля, Чезаро и др. Достаточно подробное изложение таких методов дано в работе [1]. В [2] получены спектры собственных функций и собственных значений для разрывных функций.

В настоящей работе предлагается использовать представление разрывных функций быстрыми разложениями [3-5] и др., которые

значительно превосходят все ранее известные методы и обладают уникальными качествами:

- сходятся быстрее классических рядов Фурье в сотни раз;
- допускают многократное дифференцирование и потому пригодны для решения прикладных задач;
- с их помощью разработана тригонометрическая интерполяция с высокой точностью и возможностью многократного дифференцирования;
- успешно применяются в задачах с быстро осциллирующими функциями;
- могут использоваться для решения задач с дельта-функциями;
- для многофазных задач с неизвестной границей типа Стефана;
- для задач с разрывными функциями 1-го и 2-го типов;
- для решения нелинейных задач в частных производных, когда не требуется предварительно решать довольно сложную задачу о нахождении собственных функций и собственных значений с последующим доказательством о возможности дифференцирования подобных разложений .

Обычно перечисленные проблемы исследуются некоторыми численными методами, тогда как в предлагаемом подходе решение получаем в аналитическом виде. В дальнейшем будем рассматривать разрывные функции. Для улучшения сходимости рядов Фурье разрывных функций в некоторых случаях используют аппроксимационные методы [6] с применением полиномов Бернулли, получившие название аппроксимантов Паде. Дифференцирование рядов Фурье разрывных функций в настоящей работе рассматривается впервые. Решение проблемы позволит использовать подобные ряды при рассмотрении интегро-дифференциальных задач.

В дальнейшем будем полагать, что $[0; a]$ — область, занимаемая материальным телом, или геометрическим пространством. При использовании рядов Фурье по синусам или косинусам на данном отрезке важное значение имеет сходимость рядов и сходимость производных не только внутри, но и на границах отрезка, так как при рассмотрении краевых задач граничные условия задаются на границах. Поэтому, если при $x = 0$ или при $x = a$ ряд не равен $f(0)$ или $f(a)$ соответственно, или значениям производных на этих границах, то будем говорить, что на концах отрезка рассматриваемый ряд расходится, хотя в строгом классическом понимании ряд может быть сходящимся. Кроме выполнения граничных условий могут проводиться исследования некоторых свойств решений на границах. В таких случаях подобный ряд не будет удовлетворять заданным гра-

ничным условиям и он не пригоден для задач прикладного характера, что является существенным недостатком.

Доказывается теорема о дифференцировании рядов Фурье для разрывных функций, где показано, что почленное дифференцирование подобных рядов для разрывной функции по синусам будет приводить к расходящимся рядам, по косинусам – ряд Фурье может быть сходящимся, но вторая производная всегда будет рядом расходящимся. Приводится тестовый пример разрывного решения прикладной задачи с интегро-дифференциальным уравнением. Показана высокая точность метода.

Литература

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. / Г. Харди. — М. : ИИЛ, 1951. — 504 с.

2. Шабров С.А. О возможности применения метода Фурье нахождения решения математической модели шестого порядка с производными Радона–Никодима / С.А. Шабров, О.М. Ильина, М.В. Шаброва, Ф.В. Голованева // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронеж. зимняя мат. школа. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 297–303.

3. Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А.Д. Чернышов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 13–24.

4. Чернышов А.Д. Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье / А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов, О.В. Лешонков, Е.А. Соболева, О.Ю. Никифорова // Вестник ВГУ. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2019. — № 1. — С. 27–34.

5. Чернышов А.Д. Решение двухфазной задачи Стефана с внутренним источником и задач теплопроводности методом быстрых разложений. / А.Д. Чернышов // Инженерно-Физический журнал. — 2021. — Т. 94, № 1. — С. 101–120.

6. Нерсесян А. Ускоренная сходимость рядов Фурье / А. Нерсесян, А. Погосян, Р. Бархударян // Известия НАН Армении. Математика. — 2006. — Т. 41, № 2. — С. 43–56.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВТОРЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ¹

С.А. Шабров, Е.А. Бородина,
Э.Ю. Курклинская (Воронеж; ВГУ; ВГУИТ)
shabrov_s_a@math.vsu.ru, eaborodina@inbox.ru

В работе доказано существование вторых решений у нелинейной математической модели шестого порядка с негладкими решениями. А именно, мы рассматриваем случай, когда граничная задача гарантированно имеет одно решение, и исследуем вопрос о наличии еще одного. При этом мы используем точечный подход Ю. В. Покорного, показавший свою эффективность при анализе моделей второго и четвертого порядков, получены достаточные условия существования второго решения для модели шестого порядка с производными по мере.

Исзуемая нелинейная математическая модель, реализуется в виде граничной задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu \equiv - (pu'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} - (gu'_x)'_{\mu} + Q'_{\mu}u = f(x, u, pu'''_{xx\mu}); \\ u(0) = u(\ell) = 0; \\ - (pu'''_{xx\mu})'_x(0) + \gamma_1 u''_{xx}(0) = 0; \\ (pu'''_{xx\mu})'_x(0) - ru''_{xx}(0) + \gamma_2 u'_x(0) = 0; \\ (pu'''_{xx\mu})'_x(\ell) + \gamma_4 u''_{xx}(\ell) = 0; \\ - (pu'''_{xx\mu})'_x(\ell) + ru''_{xx}(\ell) + \gamma_5 u'_x(\ell) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

с производными по мере. Основное внимание уделяется случаю, когда модель (1) имеет одно известное решение и стоит вопрос о существовании другого; это решение, без ограничения общности, мы будем считать нулевым, ввиду того, что можно сделать функциональную замену, осуществляющую сдвиг этого решения в нуль.

Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(x)$ — μ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$. В точках ξ , принадлежащих множеству точек разрыва $\sigma(x)$, уравнение в (1) по-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РФФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.

© Шабров С.А., Бородина Е.А., Курклинская Э.Ю., 2021

нимается как равенство

$$\begin{aligned}
 -\Delta (pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi) - \Delta (ru'_x)(\xi) + \Delta (gu''_{xx})'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \\
 = f(\xi, u(\xi), pu'''_{xx\mu}(\xi)),
 \end{aligned}$$

где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ .

Уравнение из (1) задано почти всюду (по мере σ) на следующем расширении отрезка $[0; \ell]$. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0; \ell] \setminus S(\sigma)$ зададим метрику $\rho(x; y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство $(J_\sigma; \sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0; \ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значений $\xi - 0, \xi + 0$, которые ранее были предельными. Индуцируя упорядоченность с исходного множества, приходим к неравенствам $x < \xi - 0 < \xi + 0 < y$ для всех x, y для которых выполнялись неравенства $x < \xi < y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi - 0$ и $\xi + 0$ множества $\overline{[0; \ell]}_S$ определим предельными значениями. Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\rho(x; y)$.

Объединение $\overline{[0; \ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0; \ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве.

Будем предполагать, что функции $p(x), r(x), g(x)$ и $Q(x)$ μ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$, $\min_{x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает,

а $F(x, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

- $f(x, u)$ при почти всех x (относительно μ -меры) определена и непрерывна по u ;
- функция $f(x, u)$ измерима по x при каждом u ;
- $|f(x, u)| \leq m(x)$, где $m(x)$ — μ -суммируемая функция на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Будем говорить, что однородное уравнение

$$-(pu'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{xx\mu} - (gu'_x)'_{xx\mu} + Q'_\mu u = 0$$

не осциллирует на $[0; \ell]$, если любое его нетривиальное решение имеет не более пяти нулей с учетом кратности.

Через K обозначим конус неотрицательных на $[0; \ell]$ функций.

Доказана теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x, u)$, непрерывно действует из $C[0; \ell]$ в $L_{p, \sigma}[0; \ell]$;
- 2) $f(x, u) \geq 0$ для всех $x \in [0; \ell]$ и $u \geq 0$;
- 3) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\sigma}$;
- 4) при некотором $R > 0$ и любом $\lambda \in (0; 1)$ дифференциальная модель

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = \lambda f(x, u, pu'''_{xx\mu}), \\ u(0) = u(\ell) = 0; \\ -(pu'''_{xx\mu})(0) + \gamma_1 u''_{xx}(0) = 0; \\ (pu'''_{xx\mu})'_x(0) - ru''_{xx}(0) + \gamma_2 u'_x(0) = 0; \\ (pu'''_{xx\mu})(\ell) + \gamma_4 u''_{xx}(\ell) = 0; \\ -(pu'''_{xx\mu})'_x(\ell) + ru''_{xx}(\ell) + \gamma_5 u'_x(\ell) = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

не имеет решений $u(x)$ таких, что

$$\sup_{x \in (0; \ell)} \frac{u(x)}{u_0(x)} \geq R, \quad (3)$$

где $u_0(x) = x \cdot (\ell - x)$.

Тогда задача (1) имеет хотя бы одно решение в K .

Условия теоремы естественно проверять при достаточно больших R . Поэтому конкретизация её условий мы можем проводить в терминах асимптотических свойств функции $f(x, u)$.

Литература

1. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.
3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.
4. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

5. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

6. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

7. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильтеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

8. Шабров С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

9. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стильтеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

10. Баев, А. Д. Дифференциал Стильтеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

11. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

12. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

13. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2019. — № 3. — С. 93–100.

14. Дифференциал Стильтеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, Д. А. Чечин, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 490, № 1. — С. 9–12.

**ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО
ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ
РАДОНА–НИКОДИМА¹**

**С.А. Шабров, О.М. Ильина, М.В. Шаброва,
Ф.В. Голованева** (Воронеж, ВГУ)

*shabrov_s_a@math.vsu.ru, olga-rodionova-rodionova,
koshka445@mail.ru; gfainav@mail.ru*

В этой работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения математической модели шестого порядка с негладкими решениями.

Мы изучаем математическую модель, реализуемая в виде смешанной задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (pu'''_{xx\mu})'''_{xx\sigma} - (ru''_{xx})''_{x\sigma} + (qu'_\sigma)' - uQ'_\sigma + f(x, t); \\ u(0, t) = u'_x(0, t) = u''_{xx}(0, t) = 0; \\ u(\ell, t) = u'_x(\ell, t) = u''_{xx}(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x); \\ u_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{array} \right. \quad (1)$$

которая возникает при описании малых поперечных вынужденных колебаний стержневой системы с внутренними особенностями и помещенной на двойное упругое основании с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения.

Построим базисные функции следующим образом. Отрезок $[0; \ell]$ разобьем на N частей, точки разбиения обозначим через x_k . Тогда $\varphi_{3k-2}(x)$ равна $1 + 10 \left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}} \right)^3 + 15 \left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}} \right)^4 + 6 \left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}} \right)^5$, если $x \in [x_{k-1}; x_k]$; $1 - 10 \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^3 + 15 \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^4 - 6 \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^5$, если $x \in [x_k; x_{k+1}]$; 0 на остальной части отрезка $[0; \ell]$; $\varphi_{3k-1}(x)$ равна $x - x_k - 6 \frac{(x-x_k)^3}{(x_k-x_{k-1})^2} - 8 \frac{(x-x_k)^4}{(x_k-x_{k-1})^3} - 3 \frac{(x-x_k)^5}{(x_k-x_{k-1})^4}$, если $x \in [x_{k-1}; x_k]$; $x - x_k - 6 \frac{(x-x_k)^3}{(x_{k+1}-x_k)^2} + 8 \frac{(x-x_k)^4}{(x_{k+1}-x_k)^3} - 3 \frac{(x-x_k)^5}{(x_{k+1}-x_k)^4}$, если $x \in [x_k; x_{k+1}]$; и 0 на остальной части отрезка $[0; \ell]$; $\varphi_{3k}(x)$ равна $\frac{1}{2} (x - x_k)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(x-x_k)^3}{x_k-x_{k-1}} + \frac{3}{2} \frac{(x-x_k)^4}{(x_k-x_{k-1})^2} + \frac{1}{2} \frac{(x-x_k)^5}{(x_k-x_{k-1})^3}$, если $x \in [x_{k-1}; x_k]$;

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РФФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.

© Шабров С.А., Ильина О.М., Шаброва М.В., Голованева Ф.В., 2021

$\frac{1}{2}(x-x_k)^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{(x-x_k)^3}{x_{k+1}-x_k} + \frac{3}{2} \frac{(x-x_k)^4}{(x_{k+1}-x_k)^2} - \frac{1}{2} \frac{(x-x_k)^5}{(x_{k+1}-x_k)^3}$, если $x \in [x_k; x_{k+1}]$; и 0 на остальной части отрезка $[0; \ell]$, $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Приближенное решение (1) мы будем искать в виде

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t)\varphi_{3k-2}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k(t)\varphi_{3k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} c_k(t)\varphi_{3k}(x). \quad (2)$$

Здесь $a_k(t)$, $b_k(t)$ и $c_k(t)$ — дважды дифференцируемые функции, и являются значением функции, первой и второй производной соответственно в узловой точке в момент времени t .

Удалось получить оценку скорости сходимости.

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.
3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.
4. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.
5. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.
6. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.
7. Голованёва, Ф. В. Адаптация метода конечных элементов для одной математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров, М. Меач // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. — 2016. — № 1 (22). — С. 89–92.

ОДНОРОДНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Введение коэффициентов в гладкой динамической системе, отвечающей за диссипацию, вообще говоря, довольно затруднительно. Но часто это может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях указывают на подкачку энергии. Это естественным образом приводит к потере классических первых интегралов, глобально выражающихся через гладкие функции на всем фазовом пространстве.

Как известно, топологическим препятствием к наличию в системе полного набора гладких первых интегралов являются асимптотические (притягивающие или отталкивающие) предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов [1, 2].

При исследовании систем с диссипацией если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле теории функций комплексного переменного) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Можно отдельно отметить важные частные случаи интегрируемости динамических систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. В динамике они соответствуют движению многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил, а, в случае двумерной сферы, — классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды [2, 3].

Данная тематика уже затрагивалась в ряде других работ автора (см., например, [4]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем, которые рассматриваются на касательном расслоении к конечномерному гладкому многообразию. При этом вводимые силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

В работе также обсуждается связь тензорных инвариантов систем дифференциальных уравнений с проблемой их точного интегрирования. Тем самым проводимое исследование тесно связано с [5, 6], где также рассматриваются динамические системы, которые описываются квазиоднородными системами дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями.

Литература

1. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле / М.В. Шамолин. — М. : ЛЕНАНД, 2019. — 456 с.

2. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности / М.В. Шамолин. — М. : ЛЕНАНД, 2021. — 400 с.

3. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 494, № 1. — С. 105–111.

4. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 84–90.

5. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 117–148.

6. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем / В.В. Козлов // Прикл. матем. и механ. — 2015. — Т. 79, № 3. — С. 307–316.

О ПОСЛОЙНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ИНВАРИАНТНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashananin@inbox.ru

Пусть $\mathcal{K}_x(P)$ – ядро билинейной формы

$$\mathcal{B}_x(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_2}{\partial \xi_j}(x, \xi) \eta_j,$$

порожденной старшим символом $p_2(x, \xi)$ линейного дифференциального оператора

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i^2 = -1,$$

определенного в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и имеющего C^∞ -коэффициенты. Точки множества $(x, \mathcal{K}_x(P) \setminus \{0\})$ являются двукратными характеристическими точками оператора P . На ковекторах $\xi \in \mathcal{K}_x(P)$ инвариантно определен субглавный символ оператора: $p_{\text{sub}}(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha(x) \xi^\alpha + \frac{i}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_l \partial \xi_l}(x, \xi)$. Будем говорить, что оператор P является *квазиэллиптическим*, если $p_2(x, \xi) + p_{\text{sub}}(x, \eta) \neq 0$ при всех $(x, \xi, \eta) \in \Omega \times (T_x^* \Omega \setminus \mathcal{K}_x(P)) \times \mathcal{K}_x(P)$. Если размерность ядра $\mathcal{K}_x(P)$ не зависит от выбора точки $x \in \Omega$, то отображение $x \rightarrow \mathcal{K}_x(P)$ порождает в касательном расслоении дифференциальную систему

$$\mathcal{L}(P) = \{(x, \tau) \in T\Omega \mid \xi(\tau) = 0 \forall \xi \in \mathcal{K}_x(P)\}$$

Предположим, что

- (1) ядро $\mathcal{K}_x(P)$ одномерно в каждой точке $x \in \Omega$;
- (2) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ инволютивна.

Говорят, что ростки обобщенных функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$, если существует открытая окрестность $V \subset \Omega$ этой точки, в которой $u^1(x) = u^2(x)$, то есть для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ с носителем $\text{supp } \varphi(x) \subset V$ выполняется равенство $\langle u^1, \varphi \rangle = \langle u^2, \varphi \rangle$.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – два открытых подмножества множества Ω , $\chi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ – диффеоморфизм и $g_\chi : C_0^\infty(\Omega_1) \rightarrow C^\infty(\Omega_2)$ – линейное отображение, удовлетворяющее условию локальности: $\text{supp } g_\chi(u) \subset \chi(\text{supp } u)$. Тогда композиция отображений $\chi^* \circ g_\chi : C_0^\infty(\Omega_1) \rightarrow C^\infty(\Omega_1)$ является линейным отображением, которое не расширяет носители: $\text{supp } (\chi^* \circ g_\chi)(u) \subset \text{supp } u$. В этом случае в силу теоремы Петре для каждого компактного подмножества $K \subset \Omega_1$ найдется линейный дифференциальный оператор $Q_K(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m(K)} q_{\alpha, K}(x) D^\alpha$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $q_{\alpha, K}(x) \in C^\infty(K)$, такой, что $(\chi^* \circ g_\chi)(u) = Q_K(x, D)u$ при $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$ с носителем $\text{supp } u \subset K$. Таким образом, $g_\chi u = (\chi^{-1})^* Q_K(x, D)u$ при $u \in \mathcal{D}_K(\Omega_1)$. Теперь из плотности множеств $C_0^\infty(\Omega_j)$ во множествах $\mathcal{D}'(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, полученного представления отображения g_χ следует, что отображение можно

продолжить до непрерывного отображения $g_\chi : \mathcal{D}'(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Отметим, что для любых точки $x^0 \in \Omega_1$ и $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ росток образа $(g_\chi(u))_{\chi(x^0)}$ однозначно определяется ростком u_{x^0} . Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ g_χ -инвариантна в точке $y^0 \in \Omega_2$, если $(g_\chi(f))_{y^0} \cong f_{y^0}$. Будем говорить, что дифференциальный оператор $P(x, D) : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ g_χ -инвариантен в точке $y^0 \in \Omega_2$, если $(g_\chi(P(x, D)u))_{y^0} \cong (P(x, D)g_\chi(u))_{y^0}$ для любой $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$.

Если P удовлетворяет условиям (1) и (2), то для каждой точки $x^0 \in \Omega$ найдется максимальное связанное интегральное подмногообразие \mathcal{M}_{x^0} дифференциальной системы $\mathcal{L}(P)$, содержащее точку x^0 . Пусть Υ – связанное, непрерывно вложенное в Ω , k -мерное подмногообразие.

Теорема 1. Пусть P – квазиэллиптический оператор, удовлетворяющий условиям (1) и (2), $y^0 \in \Upsilon \subset \mathcal{M}_{y^0} \cap \Omega_2$. Предположим, что оператор P и функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ g_χ -инвариантны вдоль подмногообразия Υ и $(g_\chi(u))_{y^0} \cong u_{y^0}$. Тогда $(g_\chi(u))_y \cong u_y$ при всех $y \in \Upsilon$.

Литература

1. Шананин Н.А. Об однозначном продолжении решений квазиэллиптических уравнений второго порядка / Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2020. — Т. 108, № 2. — С. 316–320.

НАЧАЛЬНО–КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ГРАНИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ И ВНУТРЕННИМ НЕЛИНЕЙНЫМ ФОКУСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА РОСТА

Г.Х. Шафиева (Баку, ИММ НАНА; БГУ)
gulshan.shafiyeva@mail.ru

Рассмотрим начально - краевую задачу:

$$u_{i_{tt}} - u_{i_{xx}} = f_i(x, u_1, u_2), 0 < x < l, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_2(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u_{1_x}(l, t) + |u_{1_t}(l, t)|^{r_1-1} u_{1_t}(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u_{2_x}(0, t) - |u_{2_t}(0, t)|^{r_2-1} u_{2_t}(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u_i(0, x) = u_{i0}(x), \quad u_{i_t}(0, x) = u_{i1}(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где

$$f_1(x, u_1, u_2) = |u_1 + u_2|^{2p(x)} (u_1 + u_2) + |u_1|^{p(x)-1} |u_2|^{p(x)+1} u_1,$$

$$f_2(x, u_1, u_2) = |u_1 + u_2|^{2p(x)} (u_1 + u_2) + |u_1|^{p(x)+1} |u_2|^{p(x)-1} u_2,$$

$r_1, r_2 > 1$, $p(x)$ непрерывная вещественнозначная функция такая, что

$$1 < \min_{0 \leq x \leq l} p(x) = p_1, \quad \max_{0 \leq x \leq l} p(x) = p_2 \quad (6)$$

и при любых $x, y \in [0, l]$, $|x - y| < \delta$ выполняется неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{\log|x - y|}, \quad A > 0. \quad (7)$$

Введем обозначение: ${}_\tau H^1 = \{v : v \in H^1, v(\tau) = 0\}$. Будем предполагать, что $u_{10}(\cdot) \in {}_0 H^1$, $u_{20}(\cdot) \in {}_l H^1$, $u_{i1}(\cdot) \in L_2(0, l)$, $i = 1, 2, 3$.

Определим энергетическую функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[\|u_{i_t}(t, \cdot)\|_2^2 + \|u_{i_x}(t, \cdot)\|_2^2 \right] - G(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot)), \quad (8)$$

где

$$G(u_1, u_2) = \int_0^l \frac{1}{2(p(x) + 1)} |u_1(x) + u_2(x)|^{2(p(x)+1)} dx + \int_0^l \frac{1}{p(x) + 1} |u_1(x) \cdot u_2(x)|^{p(x)+1} dx.$$

Заметим, что математические модели некоторых физических процессов сводятся к гиперболическим уравнениям с переменными показателями роста нелинейности (см. напр. [1,2]).

Основная цель данной работы заключается в исследовании возникновения взрыва решений смешанной задачи (1) – (5) за конечное время. Этот вопрос исследуется при выполнении следующего условия

$$\max\{r_1, r_2\} < p_1 + 1. \quad (9)$$

В случае, когда начальная энергия отрицательна, т.е. когда

$$E(0) < 0, \quad (10)$$

получен следующий результат об отсутствии глобальных решений.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (6), (7), (9) и (10), тогда решение задачи (1) - (5) разрывается за конечное время.

А в случае, когда начальная энергия не является отрицательной, вводятся следующие обозначения:

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^2 \|u_{i0x}(\cdot)\|_2^2, \alpha_1 = \{(p_1 + 1) 4^{p_2} l^{p_1+2}\}^{-\frac{1}{p_1}},$$

$$E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(p_1 + 1)} \right) \alpha_1$$

и доказывается следующая

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия (6), (7), (9) и (10), а также $l > \frac{1}{2^{p_2} \sqrt{p_1+1}}$, $\alpha_1 < \alpha_0 < \frac{1}{l}$, $E(0) < E_1$. Тогда решение задачи (1) - (5) разрывается за конечное время.

Литература

1. V.V. Zhikov, Questions of convergence duality and averaging for functionals of the calculus of variations, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 47 (1983), no. 5, p. 961 – 995.

2. M. Ruzicka, Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1748, Springer, Berlin, 2000, MR1810360.

О СХОДИМОСТИ СПЕРКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Р.И. Шахбазов (Баку, Азербайджанский Государственный Педагогический Университет,
Rahimshahbazov@bk.ru)

Рассмотрим на интервале $G = (0, 1)$ формальный дифференциальный оператор нечетного порядка

$$Lu = u^{(2m+1)} + P_2(x) u^{(2m-1)} + \dots + P_{2m+1}(x) u, m = 1, 2, \dots,$$

с комплекснозначными коэффициентами $P_l(x) \in W_1^{2m+1-l}(G)$, $l = \overline{2, 2m+1}$.

Обозначим через $D(G)$ класс функций абсолютно непрерывных со своими производными до $2m$ - го порядка включительно на $\overline{G} = [0, 1]$.

Рассмотрим произвольную систему $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ состоящую из собственных и присоединенных (корневых) функций оператора L , отвечающую системе собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и потребуем чтобы вместе с каждой корневой функцией порядка $r \geq 1$ эта система включала в себя соответствующие ей корневые функции порядка меньше r и ранг собственных функций был равномерно ограничен. Это означает, что $u_k(x) \in D(G)$ и удовлетворяет почти всюду в G уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1},$$

где θ_k равно либо 0 (в этом случае $u_k(x)$ - собственная функция), либо 1 (в этом случае мы требуем $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ и называем $u_k(x)$ - присоединенной функцией), $\theta_1 = 0$ (см. [1]).

Требуем, что система корневых функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и соответствующая система собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям A :

- 1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна и минимальна в $L_2(G)$;
- 2) выполняются условия Карлемана и «сумма единиц»

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \mu_k| &\leq \text{const}, k = 1, 2, \dots, \\ \sum_{\tau \leq \rho_k \leq \tau+1} 1 &\leq \text{const}, \forall \tau \geq 0, \rho_k = \operatorname{Re} \mu_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_k &= \begin{cases} (-i\lambda_k)^{1 \setminus (2m+1)} \operatorname{Im} \lambda_k \geq 0, \\ (i\lambda_k)^{1 \setminus (2m+1)} \operatorname{Im} \lambda_k < 0, \end{cases} \\ (\rho e^{i\varphi})^{1 \setminus (2m+1)} &= \rho^{1 \setminus (2m+1)} e^{i\varphi \setminus (2m+1)}, -\pi < \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

3) система $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогонально сопряжена к $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, является системой корневых функций формально сопряженного оператора

$$L^*v = (-1)^{2m+1} v^{(2m+1)} + (-1)^{2m-1} (\overline{P_2}v)^{(2m-1)} + \dots + \overline{P_{2m+1}}v,$$

т.е. $L^*v_k + \overline{\lambda_k}v_k = \theta_{k+1}v_{k+1}$;

4) для систем $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ выполняются «антиаприорные» оценки

$$\begin{aligned} \theta_k \|u_{k-1}\|_2 &\leq \text{const} (1 + |\mu_k|)^{2m} \|u_k\|_2, \\ \theta_{k+1} \|v_{k+1}\|_2 &\leq \text{const} (1 + |\mu_k|)^{2m} \|v_k\|_2, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(G)}$.

5) для любого $\tau \geq 0$ выполняются оценки

$$\sum_{0 \leq \rho_k \leq \tau} \|u_k\|_\infty^2 \|u_k\|_2^{-2} \leq \text{const} (1 + \tau),$$

$$\sum_{0 \leq \rho_k \leq \tau} \|v_k\|_\infty^2 \|v_k\|_2^{-2} \leq \text{const} (1 + \tau);$$

6) для любого номера k выполняется оценка

$$\|u_k\|_2 \|v_k\|_2 \leq \text{const}.$$

Пусть $f(x)$ произвольная функция из класса $W_2^1(G)$. Составим частичную сумму её биортогонального разложения по системе корневых функций оператора L :

$$\sigma_\nu(x, f) = \sum_{\rho_k \leq \nu} f_k u_k(x), \nu > 0,$$

где биортогональные коэффициенты f_k определяются формулой

$$f_k = (f, v_k) = \int_G f(x) \overline{v_k(x)} dx.$$

В данной работе мы доказываем следующую теорему об абсолютной и равномерной сходимости биортогонального разложения функции $f(x)$ по системе корневых функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$.

Теорема. Пусть система корневых функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$, и последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяют условиям A и функция $f(x) \in W_2^1(G)$ удовлетворяет условию $f(0) = f(1) = 0$, то биортогональное разложение функции $f(x)$ по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ сходится абсолютно и равномерно на $\overline{G} = [0, 1]$ и справедливы оценки

$$\|\sigma_\nu(\cdot, f) - f\|_{C[0,1]} \leq \text{const} \nu^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{W_2^1(G)}, \nu \geq 2;$$

$$\|\sigma_\nu(\cdot, f) - f\|_{C[0,1]} = o\left(\nu^{-\frac{1}{2}}\right), \nu \rightarrow +\infty,$$

где символ «о» зависит от $f(x)$, а const не зависит от $f(x)$.

Литература

1. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I. // Дифференц. уравнения. 1980. — Т. 16, — № 5, С. 771–794.

ПРИМЕНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ОКИСЛЕНИЯ ¹

Е.Н. Шварева, Л.В. Еникеева, Г.М. Шарипова

(Уфа, УГНТУ, БашГУ)

elenaniks@yandex.ru

Изучается кинетическая реакция окисления. Для моделирования процесса необходимо построение кинетической модели. Для этого решается обратная задача. Обратную задачу решаем методом гармонии. Исследуемая реакция протекает через ряд стадий, концентрация и время жизни которых замерить достаточно сложно. Но необходимо знать стадии, поведение во времени промежуточных веществ, константы скорости, характеризующими количественно каждую стадию реакции окисления органического вещества в присутствии ингибитора. Авторами решена обратная задача химической кинетики с использованием гармонического алгоритма (ГА) оптимизации. ГА представляет каждое решение, которое называется “гармонией”, с помощью вектора. ГА состоит из трех основных фаз: инициализация, импровизация вектора гармонии и обновление памяти гармонии. Алгоритм генерирует случайные векторы памяти гармонии, сохраняет их в памяти гармонии, затем новая гармония генерируется на основе всех индивидуумов путем выполнения правил сжатия памяти и регулировки высоты тона, а также случайной повторной инициализации, затем происходит замена худшей гармонии на лучшую гармония. Этот цикл поиска повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие завершения. Создан программный комплекс, с помощью которого составлена математическая модель, описывающая кинетическую реакцию ряда стадий, исследована концентрация участников реакции, в том числе и лабильных промежуточных продуктов и значений констант скорости стадий. Экспериментальные данные обрабатывались путем решения обратной задачи химической кинетики. Расчет значений концентраций наблюдаемых веществ осуществлялся путем решения прямой кинетической задачи. Расчет значений концентраций наблюдаемых веществ осуществляется путем решения прямой кинетической задачи. Математическая модель представляет собой задачу Коши. Прямая задача состоит в решении систем дифференциальных уравнений. Это сложная хи-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-60014) и РНФ (проект № 19-73-20073).

© Шварева Е.Н., Еникеева Л.В., Шарипова Г.М., 2021

мическая реакция. Каждая стадия представляет собой химическое уравнение. В нашей работе методом решения прямой кинетической задачи является формула обратного дифференцирования. Полученные экспериментальные результаты могут служить основанием для использования при анализе механизма реакции канонической схемы радикально-цепного окисления органических соединений в присутствии ингибиторов.

Литература

1. Курмакаева Н.В. Анализ механизма радикально-цепного окисления 1,4-диоксана в присутствии азепанобегулина / И.В. Сафарова, Г.М. Шарипова, А.Я. Герчиков — В сборнике: Химические проблемы современности 2020. Сборник материалов IV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Редколлегия: А.В. Белый (отв. ред.) [и др.]. 2020 — С. 277–278.

2. Shvareva E. Harmony search algorithm for chemical kinetics optimization problems / L. Enikeeva, E. Gizatova // International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). — Samara. — 2020, С. 1–4. —

УПРАВЛЕНИЕ МИКРОКЛИМАТОМ ЦЕХА ОБЖИГА КЛИНКЕРА ЦЕМЕНТНОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ ОКРЕСТНОСТНОЙ МОДЕЛИ¹

А.М. Шмырин, Н.М. Мишачев, В.В. Сёмина

(Липецк, ЛГТУ)

valvasem@mail.ru

Одним из перспективных направлений решения задач структурно-параметрического синтеза и идентификации сложных систем является окрестностное моделирование систем управления. Синтез окрестностной модели сложного производственного объекта или процесса основан, как правило, на системном анализе связей между составляющими его частями или узлами.

В работе [1] предложен метод апостериорного системного анализа окрестностных моделей для параллельных слабо связанных процессов, реализованных в первичной модели в виде окрестностной системы над одной и той же окрестностной структурой, без разделения общего процесса на составные части. Предлагаемый метод декомпозиции окрестностной системы с последующим агрегированием поз-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-48-480007 р_а).

© Шмырин А.М., Мишачев Н.М., Сёмина В.В., 2021

воляет упростить решение задач параметрической идентификации, оптимизации и управления.

В работах [2-3] разработана окрестностная система управления микроклиматом производственного помещения, отличающаяся разделением переменных по отношению к моделируемым процессам терморегулирования и аспирации и позволяющая оптимизировать управление с точки зрения энергопотребления и экологических требований.

Рассмотрим применение разработанных в [1-3] методов и моделей в задаче управления микроклиматом цеха обжига клинкера цементного производства. Для параметрической идентификации моделей были использованы данные Липецкого цементного завода. Массив исходных статистических данных разбит на четыре сезона для получения частных моделей, наилучшим образом соответствующих сезонным изменениям погоды.

Используя регрессионный анализ, определены коэффициенты моделей фильтрации и терморегуляции воздуха, проведена проверка адекватности и статистической значимости, а также о значимости их коэффициентов.

Для уравнения расхода энергии в единицу времени на фильтрацию и кондиционирование воздуха E_c^t для осеннего сезона график функции ошибок в процентах изображен на рисунке.

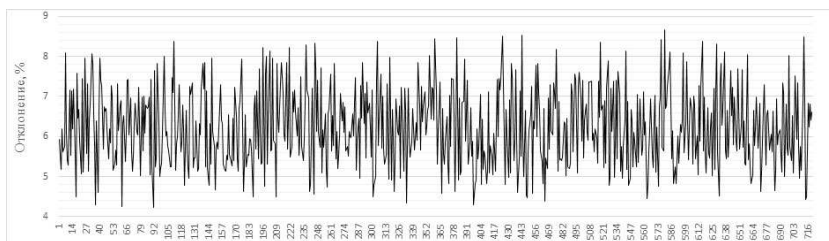


Рис. 1. График ошибок модели расхода энергии и экспериментальных данных

Качество моделей, исходя из относительных отклонений по каждому наблюдению, признается хорошим, т.к. средняя ошибка аппроксимации не превышает 10%. В работе решена задача минимизации затрат энергии на обеспечение процессов фильтрации и вентиляции производственного помещения на примере построенной модели для цеха обжига клинкера.

Оптимальные режимы работы системы производственной вентиляции, связанной с технологическим процессом, позволяют решать вопросы энергосбережения и максимальной производительности вращательных цементных печей.

Литература

1. Сёмина В.В. Агрегирование окрестностных систем в модели вентиляции цеха цементного производства / В.В. Сёмина, А.М. Шмырин, Н.М. Мишачев // Вестник Тамбовского государственного университета : — 2017. — Т. 22, вып. 6. — С. 1346–1354.

2. Semina V.V. Structural Identification of Neighborhood Model for Ventilation-Filtration System / A.M. Shmyrin, N.M. Mishachev, V.V. Semina // International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 : — 2017. — V. 12, N. 21. — P. 11114–11117.

3. Semina V.V. Neighborhood model for the ventilation system in the industrial premises / A.M. Shmyrin, V.V. Kavygin, V.V. Semina // International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 : — 2017. — V. 12, N. 16. — P. 6230–6234.

СТЕПЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА КЁТЕ, ЧАСТЬ 2

М. А. Шубарин (Ростов-на-Дону, ЮФУ)

mas102@mail.ru

1. В докладе предполагается продолжить обзор различных подходов к определению модельного класса пространств Кёте — степенных пространств Кёте, а так же некоторых обобщений этого класса.

Термин «степенное пространство» появился в работе Шагиняна Т. Б. [1].

Определение 1. Пространство Кёте $K(A)$ называют степенным пространством Кёте, если матрица Кёте $A = (a_{p,n})$ допускает представление $a_{p,n} = \exp(h_p(n))$ в котором $a = (a_n)$ — произвольная положительная числовая последовательность, а семейство $h = h_p(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\exists p_0 \forall q \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (h_q(n) - h_{p_0}(n)) < +\infty,$
2. $\forall p \exists s = s(p) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (h_s(n) - h_p(n)) > 0.$

Можно четыре типа характеристических свойств степенных пространств Кёте:

I. «внутренние» интерполяционные свойства;

© Шубарин М.А., 2021

- II. «внешние» интерполяционные свойства;
- III. «аппроксимационные» свойства;
- IV. «комбинаторные» интерполяционные свойства;

Внутренним интерполяционным свойствам степенных пространств Кёте был посвящён доклад автора на ВЗМШ-2021. Сейчас предполагается уделить внимание «внешним» интерполяционным свойствам и «комбинаторным» свойствам степенных пространств Кёте.

2. Внешние интерполяционные свойства (в отличие от внутренних интерполяционных) формулируются в терминах интерполяционных свойств пространства относительно подходящей категории пар пространств Фреше. Для теории степенных пространств Кёте представляет интерес категория, объектами которой являются пары пространств Кёте (которые всегда образуют интерполяционную пару). Точнее, рассматривается два типа интерполяционных свойств.

- В первом случае рассматриваются произвольные морфизмы категории. В докладе рассматривается категория, в которой морфизмами являются произвольные непрерывные операторы, действующие в паре пространств Кёте и диагональные относительно фиксированного общего базиса в этой паре.
- Второе интерполяционное свойство формулируется в терминах ограниченных морфизмов категории.

В [2] рассматривался класс пространств Кёте, степенных относительно подходящей пары из рассматриваемой категории и которые одновременно «интерполируют» непрерывные и ограниченные морфизмы, действующие в этой паре.

В [2] было доказано, класс степенных пространств Кёте и пространств, степенных относительно пары [СПК конечного типа, СПК бесконечного типа], совпадают с точностью до изоморфизма.

3. Комбинаторные свойства пространств Кёте формулируются в терминах семейства базисных подпространств рассматриваемого пространства. В этих терминах формулируются два утверждения:

- характеристика степенных пространств Кёте (следует отметить, что все степенные пространства Кёте будут шварцевскими тогда и только тогда, когда $a_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$);
- охарактеризованы пространства Кёте, степенные относительно другой пары степенных пространств Кёте.

Литература

1. Шагинян Т.Б. Об одном классе пространств Кёте / Т. Б. Шагинян // Теория функций, дифференциальные операторы и их прилож. — Элиста изд-во Калмыцкого гос. ун-та. — 1976. — 128–137.
2. Шубарин М. А., Классы пространств, порождаемые интерполяцией диагональных операторов / М. А. Шубарин // Изв ВУЗов Сев. Кавк. региона, сер. естеств. наук. — №1. —2006. — с. 24–26.

ON THE ROBUST H_∞ CONTROL DESIGN OF MARKOV JUMP LINEAR SYSTEMS BY LINEAR MATRIX INEQUALITIES

S.M. Hussin, V.G. Sufiyarov (Izhevsk , Kalashnikov ISTU)
sulimanh17@gmail.com, vsufiy@istu.ru

Markov jump system (MJS) is a special class of dynamic systems subject which abrupt changes in their dynamics, and the model of system is model linear systems or nonlinear systems, Markov chain determined switching between the models [1]. The literature surrounding this topic is now extensive. MJS is special case of hybrid systems with the switching matrix governed by a Markov chain. From a mathematical view, MJS can be regarded as a special class of stochastic linear systems with system matrices changing randomly at discrete- time points governed by a Markov process and remaining time- invariant between random jumps. Over the past decades, a great amount of attention has been paid to MJS, due their wide applications in systems. The robust H_∞ control of Markov jump linear systems (MJLS) with uncertain switching probabilities. The uncertain system under consideration involves norm-bounded uncertainties in system matrices and element-wise bounded uncertainties in the mode transition rate matrix.

Let the following MJLS, defined on a complete probability space (Ω, F, P) , are described as [2]:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t), \quad t \geq 0,$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is standing for the state variable of the system, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ is the control variable, A and B are matrices of appropriate dimensions. We define the set $S = \{1, 2, \dots, N\}$, $\{\theta(t), t \geq 0\}$ is a Markov chain on the probability space, takes values on set S with transition probability matrix $\Pi = (\pi_{ij})_{N \times N}$

$$P(\theta(t+h) = j | \theta(t) = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & i \neq j, \\ 1 + \pi_{ij}h + o(h), & i = j. \end{cases}$$

And the notation $o(h)$ is function on h such that $h > 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ and $\pi_{ij} \geq 0 (i, j \in S, i \neq j)$, represents the transition rate from i to j , which satisfies $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i} \pi_{ij}$ for all $i \in S$. Let for π_{ij} the error between them is referred as to $\Delta\pi_{ij}$ which can take any value in $[-\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}]$.

We will design a robust H_∞ controller coming by used linear matrix inequalities (LMIs) [3] condition such that, the closed loop system is stable with H_∞ performance. Moreover, the matrix of Lyapunov function is separated from system matrix successfully. And more practical H_∞ controller stabilizing a system without any mode information is given in terms of LMIs. Since the system mode is not necessary to controller operation, it has less limitation in practice application. Finally, we give an example of simulation to elucidate the usefulness of this work.

Литература

1. Kang Y. Stability Analysis of Markovian Jump Systems / Y. Kang, Y.B. Zhao, P. Zhao . — М. : Springer Singapore, 2018. — 200 p.

2. Hussin S.M. Analysis Robust Stabilization for Markov Jump Linear Systems / S.M. Hussin, V.G. Sufyanov // Интеллектуальные системы в производстве. — 2019. — Т. 17, № 4. — С. 163–166.

3. Boyd S. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory / S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. — М. : SIAM, 1994. — 193 p.

CONCLUSION OF THE SMOOTHNESS CRITERION FOR THE RIGHT-HAND SIDE OF THE MODEL TELEGRAPH EQUATION WITH RATE $a(x, t)$ BY THE CORRECTION METHOD

F.E. Lomovtsev (Minsk, BSU)

lomovtsev@bsu.by

The correction method test solutions for finding classical solutions from [1] is generalized to the model telegraph equation

$$u_{tt} - a^2(x, t)u_{xx} - a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t - a(x, t)a_x(x, t)u_x = f(x, t) \quad (1)$$

in the first quarter of the plane $G_\infty = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Using the developed correction method, a criterion (necessary and sufficient conditions) for the smoothness of the right-hand side f of the model telegraph equation (1) was established for its classical solution $F \in C^2(G_\infty)$ of the form (3) from [2]. Using the developed correction method, a smoothness

criterion (necessary and sufficient conditions) for the right-hand side f of the model telegraph equation (1) was established for its classical solution $F \in C^2(G_\infty)$ of the form (3) from [2].

Here $C^k(\Omega)$ is the set of k times continuously differentiable functions on Ω , $C(\Omega)$ is a set of continuous functions on $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ and \mathbb{R}^2 is a plane.

The characteristic equations $dx - (-1)^i a(x, t) dt = 0$ give the characteristics $g_i(x, t) = C_i$, $i = 1, 2$. If $a(x, t) \geq a_0 > 0$, then they are strictly in t : they decrease for $i = 1$ and increase for $i = 2$ with increasing x . Therefore, $y_i = g_i(x, t)$ have inverse $x = h_i\{y_i, t\}$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$, for which the following inversion identities hold:

$$\begin{aligned} g_i(h_i\{y_i, t\}, t) &= y_i, \quad \forall y_i, \quad h_i\{g_i(x, t), t\} = x, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) &= y_i, \quad \forall y_i, \quad h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} &= x, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

If $a \in C^2(G_\infty)$, then $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2, i = 1, 2$. The critical characteristic $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ divides G_∞ into sets $G_- = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) > g_2(0, 0)\}$ и $G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) \leq g_2(0, 0)\}$.

Definition. A function $u = u(x, t)$ is called a classical solution to equation (1) if it is $u \in C^2(G_\infty)$ and satisfies equation (1) for everybody $(x, t) \in G_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

With the help of the correcting Goursat problem, which indicates that the function $F \in C^2(G_+)$ and without its correction, it is proved

Theorem 1. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$ and the right-hand side $f \in C(G_\infty)$. Then equation (1) in G_+ has a classical solution

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds d\tau \in C^2(G_+). \quad (2)$$

Corollary 1. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. If the right-hand side f of equation (1) does not depend on x or t in G_∞ , then the continuity of f with respect to t and x , respectively, is necessary and sufficient for the function F from (2) was a classical solution to the inhomogeneous equation (1) in G_+ .

In Corollary 1, the need for continuity of f follows directly from the equation (1). The sufficiency of continuity of $f \in C[0, +\infty[$ is proved by the fact that the functions F from (2) are twice continuously differentiable in G_+ . In this case, the integral requirements of smoothness (4) are automatically satisfied in G_+ .

Theorem 2. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$ and the right-hand side $f \in C(G_-)$. Then the equation (1) in G_- has a classical solution

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{f(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds d\tau \in C^2(G_-). \quad (3)$$

The proof of Theorem 2 is similar to the proof of Theorem 1.

Corollary 2. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_-$, $a \in C^2(G_-)$. If the right-hand side f of the equation (1) does not depend on x or t in G_- , then the continuity of f with respect to t and x , respectively, is necessary and sufficient for the function F from (2) to be the classical solution of the inhomogeneous equation (1) in G_- .

The proof of Corollary 2 is similar to the proof of Corollary 1.

Theorem 3. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $a \in C^2(G_\infty)$. Then the function (2) is a classical solution to the inhomogeneous equation (1) in G_+ for the necessary and sufficient smoothness $f \in C(G_\infty)$ and

$$\int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_+), i = 1, 2. \quad (4)$$

The necessity of integral requirements of smoothness (4) follows from the continuous differentiability of the derivatives of $F \in C^2(G_+)$ from (2) along two families of characteristics of equation (1). Sufficiency (4) is also derived from this, since the first derivatives F_t and F_x are the only solutions of a linear system of equations with continuously differentiable right-hand sides.

Theorem 4. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $a \in C^2(G_\infty)$. Then the function (2) is a classical solution to the inhomogeneous equation (1) in G_- for the necessary and sufficient smoothness $f \in C(G_-)$ and

$$\int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_-), i = 1, 2. \quad (5)$$

The proof of Theorem 4 is similar to the proof of Theorem 3.

Corollary 3. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$ and the right-hand side $f \in C(G_\infty)$,

$$\int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), i = 1, 2. \quad (6)$$

Then the general integral of Equation (1) in the first quarter of the plane G_∞ in the set of classical (twice continuously differentiable in G_∞) solutions are the functions

$$u(x, t) = \tilde{f}_1(g_1(x, t)) + \tilde{f}_2(g_2(x, t)) + F(x, t), \quad (x, t) \in G_\infty,$$

where \tilde{f}_1 and \tilde{f}_2 are any twice continuously differentiable functions of their variables ξ, η of the form:

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0, 0)), \quad \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0, 0)). \quad (7)$$

In Corollary 3, the doubly continuous differentiability of the function F in G_∞ is confirmed by Theorems 3 in G_+ , 4 in G_+ and conditions (6) on the characteristic $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$. Functions (7) are derived by $\langle\langle$ the immersion method in solutions with fixed values $\rangle\rangle$ from [3].

Corollary 4. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. If the right-hand side f depends on x and t , then for $f \in C(G_\infty)$ the requirement that the integrals from (4)–(6) belong to the spaces $C^1(\Omega_k)$, where the sets Ω_k are equal respectively to the sets G_+ , G_- and G_∞ , are equivalent to their belonging to the spaces $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ or $C^{(0,1)}(\Omega_k)$, $i = \overline{1, 3}$. Here $C^{(1,0)}(\Omega_k)$, $C^{(0,1)}(\Omega_k)$ are respectively the spaces of functions continuously differentiable with respect to x and t and continuous with respect to t and x on subsets of Ω_k .

To proof Corollary 4, derivatives of integrals (6) with respect to t are expressed in terms of derivatives with respect to x as well as in [4].

Corollary 5. Let the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. If the right-hand side f of equation (1) does not depend on x or t in G_∞ , then the continuity of f in t and x , respectively, is necessary and sufficient for the function F from (2) was the classical solution to the inhomogeneous equation (1) in G_∞ .

Corollary 5 is deduced from Corollaries 1 and 2.

Note. For the coefficient $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$ the integral smoothness requirements (4)–(6) to a continuous $f \in C(G_\infty)$ are equivalent to the requirements

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau) \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

respectively, for $\Omega = G_+$, $\Omega = G_-$, $\Omega = G_\infty$.

References

1. Lomovtsev F.E. A correction method test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side / F.E. Lomovtsev // Journal of the Belarusian State University. Maths. Infcs. — 2017. — No. 3. — P. 38–52.
2. Baranovskaya S.N. On the classical solution of the first mixed problem for a one-dimensional hyperbolic equation / S.N. Baranovskaya // Author. dis. ... can-that physical-mat. Sciences (01.01.02). Minsk, BSU. — 1992. — 13 p.
3. Lomovtsev F.E. A non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives / F.E. Lomovtsev, V.V. Lysenko // Vesnik Vitsebskaga dzyarzhavnaga university. — 2019. — No. 3 (104). — P. 5–17.
4. Novikov E.N. Mixed problems for the equation of forced vibrations of a bounded string under nonstationary boundary conditions with first and second oblique derivatives: Author. dis. ... can-that physical-mat. Sciences / IM NAS RB. — Minsk, 2017. — 25 p.

GENERALIZED REMANN FORMULA OF THE CLASSICAL SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

F.E. Lomovtsev (Minsk, BSU)

lomovtsev@bsu.by

The Cauchy problem is explicitly solved in the upper half-plane \tilde{G}_∞ :

$$u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_t(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty = \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[, \quad (2)$$

where the coefficients a, b, c, q are real functions and the Cauchy problem data f, φ, ψ are given functions of their variables x и t . By subscripts of functions we denote their partial derivatives.

The characteristic equations $dx - (-1)^i a(x, t)dt = 0$ give the characteristics $g_i(x, t) = C_i, i = 1, 2$. If $a(x, t) \geq a_0 > 0$, then they decrease strictly in t at $i = 1$ and increase at $i = 2$ with increasing x . Therefore,

the functions $y_i = g_i(x, t)$ have inverse functions $x = h_i\{y_i, t\}$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$. If $a \in C^2(\tilde{G}_\infty)$, then $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2, i = 1, 2$.

Let $C^k(\Omega)$ be the set of k times continuously differentiable functions on the subset $\Omega \subset \mathbb{R}^2, C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Definition. *Classical solution to the Cauchy problem (1), (2) is the function $u \in C^2(\tilde{G}_\infty), \tilde{G}_\infty = \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, satisfying equation (1) on \tilde{G}_∞ in the usual sense, and initial conditions (2) in the sense of the values limits of functions $u(\dot{x}, \dot{t})$ и $u_t(\dot{x}, \dot{t})$ at interior points $(\dot{x}, \dot{t}) \in \tilde{G}_\infty$ for $\dot{x} \rightarrow x$ и $\dot{t} \rightarrow 0$.*

Theorem 1. *Let the coefficients be $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in \tilde{G}_\infty, a \in C^2(\tilde{G}_\infty), b, c, q \in C^1(\tilde{G}_\infty)$. The Cauchy problem (1), (2) in \tilde{G}_∞ has a unique and stable according to φ, ψ, f classical solution $u \in C^2(\tilde{G}_\infty)$ if and only if $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R}), f \in C(\tilde{G}_\infty)$ and*

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau) \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(\tilde{G}_\infty), i = 1, 2. \quad (3)$$

The classical solution to the Cauchy problem (1), (2) is the function

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{(auv)(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) + (auv)(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)}{2a(x, t)} + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds - \\ & - \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} f(s, \tau)v(s, \tau) ds, (x, t) \in \tilde{G}_\infty, \quad (4) \end{aligned}$$

where $u(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}), u(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\})$ and $v(s, \tau)$ is the solution to the Goursat problem:

$$\begin{aligned} v_{\tau\tau}(s, \tau) - (a^2(s, \tau)v(s, \tau))_{ss} - (b(s, \tau)v(s, \tau))_\tau - (c(s, \tau)v(s, \tau))_s + \\ + q(s, \tau)v(s, \tau) = 0, (s, \tau) \in \Delta MPQ, \end{aligned}$$

$$v(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, g_1(s, \tau) = g_1(x, t),$$

$$v(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, g_2(s, \tau) = g_2(x, t),$$

$0 \leq \tau \leq t$, with functions $k_1(s, \tau) = \{a(s, \tau)b(s, \tau) + 3a(s, \tau)a_s(s, \tau) - a_\tau(s, \tau) + c(s, \tau)\}/4a(s, \tau)$ on a curve QM and $k_2(s, \tau) = \{a(s, \tau)b(s, \tau) - 3a(s, \tau)a_s(s, \tau) - a_\tau(s, \tau) - c(s, \tau)\}/4a(s, \tau)$ on a curve MP .

Corollary. *If the continuous right-hand side $f \in C[0, +\infty[$ depends only on x or t , then Theorem 1 is true without requirements (3).*

Note. In the general case, the curve C , on which the Cauchy conditions (2) are specified in the same way as, for example, in [1, c. 136]:

$$u|_C = \varphi(x), \quad (\partial u / \partial \vec{n})|_C = \psi(x), \quad \vec{n}(x, t) \perp C, \quad (5)$$

the Riemann formula for the classical solution of the Cauchy problem (1), (5) is similar to (4). For its unique solvability, the curve C must be expressed by a continuously differentiable function and satisfy the condition: each characteristic $g_i(x, t) = C_i$, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, intersects the curve C at most once. Then the function u and its derivatives u_x , u_t are uniquely determined on C from conditions (5) by formulas from [1, p. 139]. Riemann formulas for the classical solutions of the Cauchy problems (1), (2) and (1), (5) for $a \equiv 1$ are given in [1].

References

1. Tikhonov A.N. Equations of mathematical physics / A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky. — Moscow : Nauka, 2004. — 798 p.

MIXED PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION ON THE SEGMENT WITH NON-CHARACTERISTIC SECOND DERIVATIVES IN BOUNDARY MODES

V.V. Lysenko, F.E. Lomovtsev (Minsk, BSU)

valery.sholomitskaya@gmail.com, lomovtsev@bsu.by

In the upper half-strip of the plane $\dot{G} =]0, d[\times]0, +\infty[$ by the method of "auxiliary mixed problems for a semi-bounded string (wave equation on the half-line)" from [1], it is found a classical solution in explicit form and a criterion (necessary and sufficient conditions) for the Hadamard correctness (existence, uniqueness and stability on the mixed problem data) in the set of classical solutions of linear mixed problem for the general ($a_1 \neq a_2$) forced vibration equation of a bounded string with non-stationary (with time-dependent coefficients) non-characteristic second derivatives in boundary modes:

$$(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x, t) = f(x, t), \quad \{x, t\} \in G, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in]0, d[, \quad (2)$$

$$[\zeta_i(t)u_{tt} + \xi_i(t)u_{xt} + \theta_i(t)u_{xx} + \alpha_i(t)u_t + \beta_i(t)u_x + \gamma_i(t)u]|_{x=\hat{d}_i} = \mu_i(t),$$

$$t > 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Here $f, \varphi, \psi, \mu_i, \zeta_i, \xi_i, \theta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$, are given bounded functions of their independent variables x and t .

Let $C^k(\Omega)$ be the set of all k times continuously differentiable functions on the subset Ω of the plane R^2 and $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

The following theorem uses particular classical solutions of the inhomogeneous equation (1) from [2] and the notations:

$$F_{2,k}^{(1)}(x, t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \left[\int_{d_k}^{t_2(x)} \int_{a_2[t_2(x)-\tau]}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_2(x)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right],$$

$$F_{2,k}^{(2)}(x, t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \left[\int_{d_k}^{t_2^*(x)} \int_{x-a_1(t-\tau)}^{d-a_1[t_2^*(x)-\tau]} e^{A\tau-Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_2^*(x)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right],$$

$$k = \overline{1, n}, \quad t_2(x) = t - x/a_1, \quad t_2^*(x) = t - ((d-x)/a_2),$$

$$\Phi_{3k-1}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 \varphi_k(x + a_2 t_k) + a_2 e^{B(x+a_2 t_k)} \varphi_k(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{x+a_2 t_k} e^{B(x+a_2 t_k-s)} [A\varphi_k(s) + \psi_k(s)] ds \right\},$$

$$\Phi_{3k}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_2 \varphi_k(x - a_1 t_k) + a_1 e^{B(x-a_1 t_k)} \varphi_k(d) + \right.$$

$$\left. + \int_{x-a_1 t_k}^d e^{B(x-a_1 t_k-s)} [A\varphi_k(s) + \psi_k(s)] ds \right\},$$

$$P_{3k-2+i}(t) = \mu_i(t) - i(t) \left(e^{-b_{3-i} t_k} {}_{3k-2+i}(x, t) + F_{2,k}^{(i)}(x, t) \right), \quad k = \overline{1, n},$$

$$\chi_i(a, b) = \exp \left\{ -a_i \int_a^b \sigma_i(s) ds \right\},$$

$$\sigma_i(t) = \frac{2a_i b_i \zeta_i(t) + (-1)^i b_i \xi_i(t) - a_i \alpha_i(t) - (-1)^i \beta_i(t)}{a_i^2 \zeta_i(t) + (-1)^i a_i \xi_i(t) + \theta_i(t)}, \quad i = 1, 2.$$

Theorem 1. *Let the coefficients of the boundary regimes (3) be continuous: $\zeta_i, \xi_i, \theta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in C[0, +\infty[, i = 1, 2$, these boundary modes are non-characteristic: $a_i^2 \zeta_i(t) + (-1)^i a_i \xi_i(t) + \theta_i(t) \neq 0, t \in [0, \infty[, i = 1, 2$, and there are solutions $v_i \in C^2[0, +\infty[, v_i(\rho) \neq 0, v_i'(\rho) \neq 0, \rho \in [0, +\infty[$, of the equations*

$$\begin{aligned} & [a_i^2 \zeta_i(\rho/a_i) + (-1)^i a_i \xi_i(\rho/a_i) + \theta_i(\rho/a_i)] v_i''(\rho) - \\ & - \left[2a_i b_i \zeta_i(\rho/a_i) + (-1)^i b_i \xi_i(\rho/a_i) - a_i \alpha_i(\rho/a_i) - (-1)^i \beta_i(\rho/a_i) \right] v_i'(\rho) + \\ & + [b_i^2 \zeta_i(\rho/a_i) - b_i \alpha_i(\rho/a_i) + \gamma_i(\rho/a_i)] v_i(\rho) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

The non-characteristic mixed problem (1)–(3) has a unique and stable classical solution $u \in C^2(G)$ if and only if it are met the smoothness requirements:

$$\begin{aligned} & \varphi \in C^2[0, d], \quad \psi \in C^1[0, d], \quad \mu_1, \mu_2 \in C[0, d_{n+1}], \quad f \in C(G), \\ & \int_{d_k}^t f(x - (-1)^p a_{3-p}(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_k), \quad p = 1, 2, \quad (4) \\ & \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] \int_{d_k}^{t_i(x) + (2-i)2d_k} f(x_{i,k}(t, \tau), \tau) d\tau + \\ & + \int_{t_i(x) + (2-i)2d_k}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k-1}), \quad i = 1, 2, \quad (5) \\ & \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] \int_{d_k}^{(-1)^i t_2^*(x) + (2-i)2d_k} f(x_{i,k}^*(t, \tau), \tau) d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \int_{(-1)^i t_2^*(x) + (2-i)2d_k}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k}), i = 1, 2, \quad (6)$$

where $x_{i,k}(t, \tau) = [1 - (-1)^i ((a_2/a_1) + 1)](x - a_1 t_{(2-i)k}) - a_2 \tau_{(2-i)k}$, $x_{i,k}^*(t, \tau) = d + [1 - (-1)^i ((a_1/a_2) + 1)](x + a_2 t_{(2-i)k} - d) + a_1 \tau_{(2-i)k}$, and the matching conditions:

$$\zeta_i(0)[f(\hat{d}_i, 0) + (-1)^i (a_i - a_{3-i})\psi'(\hat{d}_i) + a_1 a_2 \varphi''(\hat{d}_i) - (b_i + b_{3-i})\psi(\hat{d}_i) - (-1)^i (a_{3-i} b_i - a_i b_{3-i})\varphi'(\hat{d}_i) - b_i b_{3-i} \varphi(\hat{d}_i)] + \xi_i(0)\psi'(\hat{d}_i) + \theta_i(0)\varphi''(\hat{d}_i) + \alpha_i(0)\psi(\hat{d}_i) + \beta_i(0)\varphi'(\hat{d}_i) + \gamma_i(0)\varphi(\hat{d}_i) = \mu_i(0), \hat{d}_i = (i - 1)d, i = 1, 2.$$

This solution $u \in C^2(G)$ of the problem (1)–(3) is the function

$$u_{3k-2}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 e^{-b_2 t_k} \varphi_k(x + a_2 t_k) + a_2 e^{-b_1 t_k} \varphi_k(x - a_1 t_k) + \int_{x - a_1 t_k}^{x + a_2 t_k} e^{B(x-s) - At_k} [A\varphi_k(s) + \psi_k(s)] ds \right\} + \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \int_{d_k}^t \int_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau, (x, t) \in \Delta_{3k-2},$$

$$u_{3k-1}(x, t) = e^{-b_2 t_k} u_{3k-1}(x, t) + F_{2,k}^{(1)}(x, t) + e^{-b_1 t_k} \frac{a_1 v_1(a_1 d_k) [b_2 \varphi_k(0) + \psi_k(0) - a_2 \varphi'_k(0)]}{a_1 + a_2} \left. \int_{d_k}^{t - \frac{x}{a_1}} \frac{\chi_1(\delta, d_k)}{v_1^2(a_1 \delta)} d\delta \right\},$$

$$(x, t) \in \Delta_{3k-1},$$

$$u_{3k}(x, t) = e^{-b_1 t_k} u_{3k}(x, t) + F_{2,k}^{(2)}(x, t) + v_2(a_2 t - d + x) \times \left\{ e^{-b_2 t} \int_{d_k}^{t - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2 \delta)} \int_{d_k}^{\delta} \frac{e^{b_2 \rho} v_2(a_2 \rho) \chi_2(\delta, \rho) P_{3k}(\rho)}{a_2^2 \zeta_2(\rho) + a_2 \xi_2(\rho) + \theta_2(\rho)} d\rho d\delta + e^{-b_2 t} \frac{a_2 v_2(a_2 d_k) [b_1 \varphi_k(d) + \psi_k(d) - a_1 \varphi'_k(d)]}{a_1 + a_2} \int_{d_k}^{t - \frac{d-x}{a_2}} \frac{\chi_2(\delta, d_k)}{v_2^2(a_2 \delta)} d\delta \right\},$$

$(x, t) \in \Delta_{3k}$, $k = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \dots$, $d_k = (k - 1)d/(a_1 + a_2)$, $t_k = t - d_k$, where u_{3k-l} are the restrictions of the solution u to the problem (1)–(3) to Δ_{3k-l} , $l = 0, 1, 2$, and recurrent initial data are equal

$$\varphi_1(x) = \varphi(x), \psi_1(x) = \psi(x), x \in [0, d], \varphi_k(x) = u_{3k+j-4}|_{t=d_k},$$

$$\psi_k(x) = \partial_t u_{3k+j-4}|_{t=d_k}, x \in [ja_1d_2, (a_1 + ja_2)d_2], j = 0, 1, k = \overline{2, n}.$$

Corollary 1. If the right-hand side f depends only on x or t and is only continuous in x or t , then the statement of Theorem 1 is true without the integral smoothness requirements (4)–(6) to f .

It can be shown that if f does not depend on t or x , then smoothness requirements (4)–(6) on f are automatically satisfied [3].

Corollary 2. If the right-hand side f depends on x and t , then for $f \in C(G_k)$ the requirements that integrals (4)–(6) belong to the spaces $C^1(\Omega_k)$, where the sets Ω_k are respectively equal to the sets G_k , $\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k-1}$ and $\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k}$, are equivalent to the requirements that they belong to the spaces $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ or $C^{(0,1)}(\Omega_k)$, $k = \overline{1, n}$. Here $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ and $C^{(0,1)}(\Omega_k)$ are respectively spaces of continuously differentiable with respect to x and t and continuous in t and x functions on subsets Ω_k . The substantiation of this fact can be found in [3].

Remarks. A preliminary classical solution in an explicit form and a Hadamard correctness criterion for the mixed problem data in the set of classical solutions of an auxiliary mixed problem for a semi-bounded string (wave equation on a half-line) with non-stationary non-characteristic second derivatives in the boundary mode were established [4]. This article also introduced a new concept of characteristic second derivatives in boundary modes of the form (3) for the equation (1).

Literature

1. Lomovtsev F.E. Method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string. / F.E. Lomovtsev // Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations: Intern. math. Conf. — Minsk : Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2015. — Part 2. — P. 74–75.

2. Lomovtsev F.E. A method for correcting trial solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side. / F.E. Lomovtsev // Zh. Belarusian. state un-that. Maths. Informatics. — 2017. — No. 3. — P. 38–52.

3. Novikov E.N. Mixed problems for the equation of forced vibrations of a bounded string under nonstationary boundary conditions with first

and second oblique derivatives: Avtoref. dis. ... can-that physical-mat. sciences / Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus. — Minsk, 2017. — 25 p.

4. Lomovtsev F.E. Non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. / F.E. Lomovtsev, V.V. Lysenko // Vesnik Vitseb. dzvyarzh. University. — 2019. — No. 3. — P. 5–17.

SYMMETRIC PROPERTIES OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF BEAMS UNDER AXIAL LOADS¹

D. Nurakhmetov, S. Jumabayev, A. Aniyarov, R. Kussainov (Almaty, Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Nur-Sultan, Institute of Management, Academy of Public Administration under the President of the Republic of Kazakhstan, Semey, Shakarim University of Semey)

nurakhmetov@math.kz, ser_jum@inbox.ru, aniyarov@math.kz, rinat.k.kus@mail.ru

We consider a spectral problem with boundary conditions on transverse vibrations of a beam of unit length:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right) + T \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + k(x) Y(x) = \lambda Y(x) \quad (1)$$

where $Y(x)$ are the eigenfunctions of the transverse static deflection of the beam; E is the elastic modulus of materia; $I(x)$ is moment of inertia of the beam cross-section; T is compressive axial load; $\lambda = \rho A \omega^2$ is an eigenvalue; ω are the frequency parameters; ρ is material density; A is the cross-sectional area; $k(x)$ is the variable coefficient of foundation.

Spectral problems with different boundary conditions under axial loads for equation (1) were investigated in connection with practical applications in [1-3] at $k(x) = 0$ and in [4] at $k(x) = const$. In [3], closed form of the eigenfrequencies of various boundary value problems for equation (1) for $k(x) = 0$ was obtained and the known results from [1, 2] were modified. The symmetric equivalence of boundary value problems was also investigated. Refining the concept of symmetric equivalence from [3] as a possibility to factorize the eigenvalues of the spectral problem (1) with symmetric coefficients on a complete segment in the form of eigenvalues on a truncated segment with different types of

¹ Авторы были поддержаны грантом МОН РК (проект № AP08052239).
© Nurakhmetov D., Jumabayev S., Aniyarov A., Kussainov R., 2021

fixation at the ends. The influence of a constant coefficient of foundation on natural frequencies was investigated in [4]. The symmetric equivalence of boundary value problems for a uniform beam was investigated in [5] at the variable coefficient of foundation without axial load.

In this talk, we study the symmetric equivalence of boundary value problems for equation (1).

Литература

1. Bokaian A. Natural frequencies of beams under compressive axial loads // Journal of Sound and Vibration. — 1988. — 126:1. —P. 49–65.
2. Bokaian A. Natural frequencies of beams under tensile axial loads // Journal of Sound and Vibration. — 1990. — 142:3. —P. 481–498.
3. Valle J. Closed-form equation for natural frequencies of beams under full range of axial loads modeled with a spring-mass system / J. Valle, D. Fernandez, J. Madrenas // International Journal of Mechanical Sciences. — 2019. — 153-154. —P. 380–390.
4. Lawrence N. Virgin, Vibration of Axially Loaded Structures / N. Lawrence. — New York: Cambridge University Press, 2007 —369 p.
5. Nurakhmetov D. Symmetric properties of eigenvalues and eigenfunctions of uniform beams / D. Nurakhmetov, S. Jumabayev, A. Aniyarov, R. Kussainov // Symmetry. — 2020. — 12 (2097). —P. 1–13.

APPROXIMATION OF NONHOMOGENEOUS FRACTIONAL EQUATIONS IN BANACH SPACE¹

S. Piskarev (Moscow, Lomonosov Moscow State University)
piskarev@gmail.com

In this talk we have a deal with the well-posedness and approximation of nonhomogeneous fractional differential equations in Banach space E :

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T]; \quad u(0) = x,$$

where \mathbf{D}_t^α is the Caputo-Dzhrbashyan derivative $0 < \alpha < 1$, the operator A generates analytic C_0 -semigroup, the function $f(\cdot) : [0, T] \rightarrow E$ is smooth enough.

The same way as in [1-2] we get the necessary and sufficient condition for the coercive well-posedness of nonhomogeneous fractional Cauchy problems in the spaces $C_0^\beta([0, T]; E)$, $L^p([0, T]; E)$. Then we consider

¹ This research was partially supported by the grant from Russian Science Foundation (RSF) N20-11-20085.

© Piskarev S., 2021

semidiscrete approximation in the spaces E_n . Finally, using implicit difference and explicit difference schemes, we deal with the full discretization of the solutions of nonhomogeneous and semilinear fractional differential equations in time variables and as in [3] we get the stability of the schemes and the order of convergence.

Also we discuss the full discretization of autonomous semilinear problem.

Літэратура

1. Liu R. The Order of Convergence of Difference Schemes for Fractional Equations / Li Miao, Piskarev S. // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2017. — Vol. 38, No. 6. — P. 754–769.

2. Li Liu. Maximal Regularity for Fractional Cauchy Equation in Holder Space and its Approximation/ Zhenbin Fan, Gang Li, and Piskarev S. // Comput. Methods Appl. Math. — 2019. — Vol. 19. Issue 2. — P. 160–178.

3. Ru Liu. Approximation of semilinear fractional Cauchy problem: II./ Sergey Piskarev. // Semigroup Forum. — 2020, — Vol. —101. — P. 751–768.

THE CORRECTNESS CRITERION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION ON THE HALF-LINE WITH CHARACTERISTIC SECOND DERIVATIVES AT THE END

K.A. Spesivtseva, F.E. Lomovtsev (Minsk, BSU)

kzenia.spesivtseva@gmail.com, lomovcev@bsu.by

In the first quarter of the plane $\dot{G}_\infty = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ the Hadamard correctness of the initial-boundary value problem is deduced:

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2) u_{xt}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$[\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Let $C^k(\Omega)$ be the set k times continuously differentiable real functions on the subset Ω of the plane R^2 .

Definition 1. The function $u \in C^n(G_\infty)$, $G_\infty = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, is called *smooth* (n times continuously differentiable) solution of the characteristic mixed problem (1)–(3), if it satisfies equation (1) on \dot{G}_∞

in the usual sense, and initial conditions (2) and boundary regime (3) in the sense of the limits of the corresponding expressions from its values $u(\dot{x}, \dot{t})$ at interior points $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ for $\dot{x} \rightarrow x$, $\dot{t} \rightarrow t$ for specified boundary points x and t .

For the characteristic initial-boundary value problem (1)–(3) the necessary and sufficient matching conditions the boundary regime (3) with the initial conditions (2) and the equation (1) take place:

$$Y_{k+1} \equiv \sum_{i=0}^k Z_{i,k} = \mu^{(k)}(0), \quad k \in [0, n-1], \quad n \geq 2, \quad (4)$$

$$Z_{i,k} \equiv \frac{k!}{i!(k-i)!} \left\{ S_{i,k} + \alpha^{(k-i)}(0)A_i + \beta^{(k-i)}(0)B_i + [\eta_i \alpha^{(k-i)}(0) + \right. \\ \left. + \eta_{i-1} \beta^{(k-i)}(0)] \varphi^{(i+1)}(0) + [\rho_i \alpha^{(k-i)}(0) + \rho_{i-1} \beta^{(k-i)}(0)] \psi^{(i)}(0) + \right. \\ \left. + \gamma^{(k-i)}(0)[D_i + \eta_{i-1} \varphi^{(i)}(0) + \rho_{i-1} \psi^{(i-1)}(0)] \right\},$$

$$S_{i,k} = \zeta^{(k-i)}(0) \left\{ f^{(0,i)}(0,0) + (a_2 - a_1)Z_i + (a_2 - a_1)a_2^i [a_1 \varphi^{(i+2)}(0) + \right. \\ \left. + \psi^{(i+1)}(0)] \right\} + \xi^{(k-i)}(0) \left\{ \Xi_i + a_2^i [a_1 \varphi^{(i+2)}(0) + \psi^{(i+1)}(0)] \right\},$$

$$i \in [0, k], \quad k \in [0, n-1],$$

where the terms A_i , B_i , D_i , Z_i , Ξ_i and coefficients ρ_i , η_i look like:

$$A_i = \sum_{s=1}^i \rho_{s-1} f^{(s-1, i-s)}(0,0), \quad i \geq 1, \quad A_0 = 0,$$

$$B_i = \sum_{s=1}^{i-1} \rho_{s-1} f^{(s, i-s-1)}(0,0), \quad i \geq 2, \quad B_0 = B_1 = 0,$$

$$D_i = \sum_{s=1}^{i-1} \rho_{s-1} f^{(s-1, i-s-1)}(0,0), \quad i \geq 2, \quad D_0 = D_1 = 0,$$

$$Z_i = \sum_{s=1}^i a_2^{s-1} f^{(s, i-s)}(0,0), \quad i \geq 1, \quad Z_0 = 0,$$

$$\Xi_i = \sum_{s=1}^i a_2^{s-1} f^{(s, i-s)}(0,0), \quad i \geq 1, \quad \Xi_0 = 0,$$

$$\rho_j = (a_2 - a_1)\rho_{j-1} + a_1 a_2 \rho_{j-2}, \quad j \geq 1, \quad \rho_{-1} = 0, \quad \rho_0 = 1, \quad \rho_1 = a_2 - a_1,$$

$$\eta_j = (a_2 - a_1)\eta_{j-1} + a_1 a_2 \eta_{j-2}, \quad j \geq 1, \quad \eta_{-1} = 1, \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_1 = a_1 a_2.$$

For the right-hand side $f \in C^{n-1}(G_\infty)$ in (4) the expression $S_{n-1, n-1}$ for $n \geq 2$ contains higher partial derivatives of order $n - 1$ from f :

$$K_n \equiv \{(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0)\} \left(\sum_{s=1}^{n-1} a_2^{s-1} f^{(s, n-s-1)}(0, 0) \right) + \\ + \zeta(0) f^{(0, n-1)}(0, 0). \quad (5)$$

Definition 2. If there is a finite limit K_n of expression (5) over all functions $f \in C^{n-1}(G_\infty)$, which converge to less smooth functions $f \in C^{n-2}(G_\infty)$, satisfying the following smoothness requirement

$$\theta(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{a_1 - a_2}{a_1} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t f(a_2(t - \tau), \tau) d\tau \right] - f(0, t) \right\} + \\ + a_2 \xi(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^t f(a_2(t - \tau), \tau) d\tau \right] \in C^{n-2}(R_+), \quad R_+ = [0, +\infty), \quad (6)$$

then this limit of K_n is called the *criterion* value of the highest derivatives of f under matching conditions (4) for integer $n \geq 2$.

The critical characteristic $x = a_1 t$ divides the first quarter G_∞ of the plane R^2 into sets $G_- = \{(x, t) \in G_\infty : x \geq a_1 t \geq 0\}$ and $G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x \leq a_1 t\}$. We use particular classical solutions of the inhomogeneous equation (1) on \dot{G}_∞ from [1]:

$$F_i(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_i(x)} \int_{x_i(t, \tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_i(x)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right], \quad t_i(x) = (-1)^i \left(t - \frac{x}{a_1} \right), \quad (7)$$

where $x_i(t, \tau) = \left[1 - (-1)^i ((a_2/a_1) + 1) \right] (x - a_1 t) - a_2 \tau$, $i = 1, 2$.

We introduce the following notations

$$\Gamma(t) = [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]_{x=0},$$

$$L(y) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[a_1 \varphi(y) + a_2 \varphi(0) + \int_0^y \psi(s) ds \right],$$

$$M(t) = \Gamma(t) [L(x + a_2t) + F_2(x, t)].$$

Theorem 1. *Let in the boundary regime (3) the coefficients $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma \in C^{m-1}(R_+)$, non-characteristic first oblique derivatives, i.e. $a_1\alpha(t) \neq \beta(t), t \in R_+$, and characteristic second partial derivatives [2], i.e. $a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \equiv 0, t \in R_+$. Then the initial-boundary value problem (1)–(3) on \dot{G}_∞ has a unique and stable in φ, ψ, μ, f smooth solution $u \in C^n(G_\infty), n \geq 2$, for those and only those data φ, ψ, μ, f , which have the following smoothness:*

$$\varphi \in C^n(R_+), \psi \in C^{n-1}(R_+), \mu \in C^n(R_+), f \in C^{n-2}(G_\infty), \quad (8)$$

$$\int_0^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{n-1}(G_\infty), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & [1 - (-1)^i(a_2/a_1 + 1)] \int_0^{t_i(x)} f(x_i(t, \tau), \tau) d\tau + \\ & + \int_{t_i(x)}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{n-1}(G_\infty), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$[(a_2 - a_1)\zeta(t) + \xi(t)]\varphi^{(n+1)}(a_2t), [(a_2 - a_1)\zeta(t) + \xi(t)]\psi^{(n)}(a_2t) \in C(R_+), \quad (11)$$

and the matching conditions (4) are satisfied for $n \geq 2$ with the criterion value (5) of the sum of the highest derivatives of order $n-1$ for the right-hand side $f \in C^{n-2}(G_\infty)$, satisfying the smoothness requirement (6). This smooth solution $u \in C^n(G_\infty)$ of the characteristic mixed problem (1)–(3) on \dot{G}_∞ is the function:

$$\begin{aligned} u_-(x, t) = & \frac{1}{a_1 + a_2} \left[a_1\varphi(x + a_2t) + a_2\varphi(x - a_1t) + \int_{x-a_1t}^{x+a_2t} \psi(s) ds + \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right], \quad (x, t) \in G_-, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u_+(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[a_1\varphi(x + a_2t) + a_2\varphi(0) + \int_0^{x+a_2t} \psi(s) ds \right] +$$

$$+a_1 \int_0^{t_2(x)} e^{a_1 \int_{t_2(x)}^{\rho} \frac{\gamma(\nu)}{a_1 \alpha(\nu) - \beta(\nu)} d\nu} \frac{\mu(\rho) - M(\rho)}{a_1 \alpha(\rho) - \beta(\rho)} d\rho + F_2(x, t), \quad (x, t) \in G_+. \quad (13)$$

Idea of the proof. Formulas (12), (13) of the unique and stable smooth solution $u \in C^n(G_\infty)$ of the characteristic mixed problem (1)–(3) on \dot{G}_∞ obviously coincide with the formulas of the unique classical solutions $u \in C^2(G_\infty)$ of this problem from [3]: u_- is the solution to the Cauchy problem (1), (2) in G_- , and u_+ is the solution to Picard problem (1), (3) and the equality $u_- = u_+$ on $x = a_1 t$ in G_+ .

The next step is establish sufficiency of smoothness requirements (8)–(10) for n times continuous differentiability of the functions u_- on G_- and u_+ on G_+ . Necessity and sufficiency of the integral smoothness requirements (9), (10) on the right-hand side $f \in C^{m-2}(G_\infty)$ for n times continuous differentiability of functions (7) on G_∞ is established similarly to how it was done for particular classical solutions (7) of the inhomogeneous equation (1) on G_∞ in [1].

For initial data $\varphi \in C^n(R_+)$, $\psi \in C^{n-1}(R_+)$ from (8) the necessary smoothness (11) from [3] is obviously sufficient for existence of following bounded terms $[(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0)]\varphi^{(n+1)}(0), [(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0)]\psi^{(n)}(0) \in R$ in $S_{n-1, n-1}$ matching conditions (4) for all $n \geq 2$.

The values of partial derivatives are calculated up to order $n \geq 2$ inclusive of the difference of the functions u_+ and u_- on characteristic $x = a_1 t$ in terms of the values of the differences $Y_{k+1} - \mu^{(k)}(0)$, $k \in [0, n - 1]$. Using the criterion value K_n we derive from this n times the continuous differentiability of the functions u_+ and u_- on the characteristic $x = a_1 t$ from the matching conditions (4) for all $n \geq 2$.

The stability of the solution of u_- in G_- and u_+ in G_+ with respect to the corresponding norms of Banach spaces of a smooth solution in the products of the Banach spaces with corresponding norms of the initial data f, φ, ψ, μ is directly derived from formulas (12) and (13).

Remarks. The definition of the characteristic second derivatives in the boundary mode (3) is given in the article [2]. In Theorem 1 above, the criterion value K_n for $n = 2$ becomes the derivative $f'_{\vec{v}_1}(0, 0)$ with respect to the vector $\vec{v}_1 = \{(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0), \zeta(0)\}$ from the right-hand side f of the equation (1) at the origin $(0, 0)$ from the correctness criterion of the article [3]. In the article [4] only sufficient conditions for the Hadamard correctness of the characteristic mixed problem (1)–(3) were considered and only for even orders of smoothness $n = 2m$ for all integer $m \in N$, for which, for all right-hand sides of $f \in C^{n-1}(G_\infty)$ of

equation (1) expression (5) is equal to

$$K_n \equiv \left\{ (a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0) \right\} \left\| \vec{\nu}_2 \right\| \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}_2} \left[\sum_{s=1}^{(n/2)-1} a_2^s f^{(2s, n-2s-2)} \right] (0, 0) + \\ + \left\| \vec{\nu}_1 \right\| \frac{\partial f^{(0, n-2)}(0, 0)}{\partial \vec{\nu}_1},$$

where $\partial[\cdot](0, 0)/\partial \vec{\nu}_l$ are values of derivatives with respect to vectors $\vec{\nu}_l$ at the origin $(0, 0)$, $\|\vec{\nu}_l\|$ are vectors lengths $\vec{\nu}_1 = \{(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0), \zeta(0)\}$ and $\vec{\nu}_2 = \{a_2, 1\}$, $l = 1, 2$. Already in the curvilinear quarter of the plane, an explicit solution is found and a Hadamard correctness criterion of a non-characteristic initial-boundary value problem for the wave equation is derived so far only for a non-stationary first oblique derivative in the boundary mode [5]. A similar initial-boundary value problem can be studied for non-stationary second derivatives in the boundary mode. It is planned to develop mathematical methods for explicitly solving and correctness investigating of initial-boundary value problems in curvilinear plane domains.

References

1. Lomovtsev F.E. Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side. / F.E. Lomovtsev // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. — 2017. — № 3. — P. 38–52.
2. Lomovtsev F.E. Non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. / F.E. Lomovtsev, V.V. Lysenko // Vitebsk State University Bulletin. — 2019. — № 3. — P. 5–17.
3. Spesivtseva K.A. Criterion for the correctness of the initial-boundary value problem for the general wave equation with characteristic second derivatives in a non-stationary boundary condition. / K.A. Spesivtseva, F.E. Lomovtsev // XIX International Scientific Conference on Differential Equations (ERUGIN'S READING-2019), Mogilev, 14th–17th of May 2019 y. / BRU / Materials Int. scientific. conf. P. 2. – Minsk : IM National Academy of Sciences of Belarus, 2019. — P. 34–36.
4. Spesivtseva K.A. Sufficient correctness of the mixed problem for the wave equation with characteristic second derivatives. / K.A. Spesivtseva // Collection of articles of the 77th scientific conference of students and postgraduates of BSU. 2020. 4 p.

5. Lomovtsev F.E. Hadamard solution and correctness of the mixed problem in the curvilinear quarter of the plane for the wave equation with non-characteristic and non-stationary first oblique derivative in the boundary mode. / F.E. Lomovtsev // XIX International Scientific Conference on Differential Equations (ERUGIN'S READING-2019), Mogilev, 14th– 17th of May 2019 y. / BRU / Materials Int. scientific. conf. P. 2. – Minsk : IM National Academy of Sciences of Belarus, 2019. P. 2. — P. 25–27.

Содержание

<i>Абдурагимов Г.Э.</i> О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного ФДУ 2-го порядка	5
<i>Алиев А.Б., Гасымова В.Ф.</i> Начально краевая задача для одного класса систем полулинейных гиперболических уравнений четвертого порядка	6
<i>Амосов А.А.</i> Стационарная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в выпуклом абсолютно черном теле с полупрозрачным включением	8
<i>Арефьев И.А., Еникеева Л.В., Агзамова М.Р.</i> Разработка математической модели процесса сернокислотного алкилирования изобутана олефинами	10
<i>Аристов А.И.</i> Точные решения уравнения с псевдолапласианом	12
<i>Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.</i> О задаче управления для параболического уравнения с коэффициентами, переменными по времени	13
<i>Асхабов С.Н.</i> Интегральное уравнение с суммарным ядром и степенной нелинейностью	17
<i>Атанов А.В.</i> Однородные гиперповерхности в \mathbb{R}^4 : компьютерные алгоритмы описания	19
<i>Афанасенкова Ю.А., Гладышев Ю.А.</i> Применение метода обобщенных степеней Берса для решения системы дифференциальных уравнений Мойсила-Теодореску	21
<i>Безмельницына Ю.Е., Корнев С.В.</i> Об асимптотическом поведении решений случайных ФДВ	23
<i>Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л.</i> О существовании стационарных решений системы уравнений Власова-Пуассона	25
<i>Бердышев А.С., Рыскан А.Р.</i> Аналог задачи Хольмгрена для четырехмерного вырождающегося эллиптического уравнения	27
<i>Бирюков А.М.</i> Задача Коши для систем комплексных дифференциальных уравнений в классах целых функций	28
<i>Бобренева Ю.О., Еникеева Л.В., Мазитов А.А., Узянбаев Р.М., Губайдуллин И.М.</i> Численное моделирование массопереноса двухфазной жидкости в трещиноватопоровом коллекторе	29

<i>Богатов Е.М.</i> О развитии теории нелинейных интегральных уравнений в работах А.И. Некрасова	30
<i>Богомолов С.В.</i> Вероятностные агентно – ориентированные модели	33
<i>Болтачев А.В.</i> О фредгольмовых краевых задачах для волнового уравнения с данными на всей границе	35
<i>Бондаренко Н.П.</i> Неполная обратная задача для дифференциального оператора на произвольном графе	36
<i>Боревич Е.З.</i> Явление бифуркации в нелинейной краевой задаче из теории полупроводников	38
<i>Борисов Д.И.</i> О несимметричных возмущениях внутренних порогов существенного спектра	39
<i>Буксаева Л.З.</i> О покомпонентной равномерной равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, отвечающих разрывным операторам Дирака	40
<i>Булатов М.В., Соловарова Л.С.</i> Системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода	43
<i>Бурый А.О., Абрашина-Жадаева Н.Г.</i> К численному моделированию процессов лазерной обработки материалов	44
<i>Васильев В.Б., Ходырева А.А.</i> Дискретная задача Дирихле в четверти плоскости	45
<i>Ватолкин М.Ю.</i> О новой форме представления решений квазидифференциального уравнения	47
<i>Вирченко Ю.П., Новосельцева А.Э.</i> Гиперболичность ковариантных систем квазилинейных уравнений первого порядка для векторного и скалярных полей	50
<i>Власов В.В.</i> Спектральный анализ и устойчивость решений интегро-дифференциальных уравнений	52
<i>Гагарин Ю.Е., Никитенко У.В., Степович М.А.</i> Интервальное оценивание вероятности ошибки в байесовских сетях доверия	53
<i>Галин А.Ш., Еникеева Л.В., Еникеев М.Р.</i> Применение методов машинного обучения в задаче идентификации сфер мезофазы игольчатого кокса	55
<i>Гаркавенко Г.В., Ускова Н.Б.</i> О спектральных свойствах одного разностного оператора с инволюцией	57
<i>Гетманова Е.Н., Обуховский В.В.</i> О периодических решениях одного класса случайных дифференциальных включений	58

<i>Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А.</i> О построении обобщенных степеней для уравнения квантовой электродинамики Дирака	60
<i>Гликлик Ю.Е., Сергеева Д.С.</i> Об условиях глобальной по времени продолжимости решений стохастических дифференциально-алгебраических уравнений	63
<i>Годжаева Х.Р.</i> Скорость равномерной равносходимости ортогонального разложения с тригонометрическим рядом для дифференциального оператора четного порядка	65
<i>Горелов В.А.</i> О коградиентности и контрградиентности линейных дифференциальных уравнений	67
<i>Гриценко С.А.</i> О модели засоления грунта	69
<i>Давыдов А.В.</i> Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих при изучении флаттера вязкоупругой пластины	71
<i>Даринский Б.М., Лобода А.В., Сайко Д.С.</i> О некоторых характеристиках гармонических многочленов	73
<i>Джабраилов А.Л.</i> Задача Коши для одного интегродифференциального уравнения с точечной сингулярностью	76
<i>Джсеналиев М.Т., Ергалиев М.Г.</i> О граничной задаче для двумерной системы Навье-Стокса в конусе	77
<i>Джсеналиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Касымбекова А.С.</i> О однородной задаче Дирихле для двумерного уравнения Бюргерса в конусе	79
<i>Додонов А.Е.</i> Необходимое условие сходимости рядов наимпростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$	80
<i>Додонов А.Е.</i> Неравенство разных метрик для наимпростейших дробей	81
<i>Домнич А.А., Барановский Е.С., Артемов М.А.</i> Нелинейные задачи о протекании неравномерно нагретой вязкой жидкости через заданную область	82
<i>Дубинский Ю.А.</i> О некоторых нелокальных задачах теории поля на плоскости	84
<i>Дубовцев Д.А., Еникеева Л.В., Губайдуллин И.М.</i> Исследование математической модели синтеза метил-третбутилового эфира (МТБЭ)	86

<i>Еникеева Л.В., Губайдуллин И.М.</i> Эвристические методы оптимизации при решении обратных задач химической кинетики	88
<i>Ерусалимский Я.М., Русаков В.А., Скороходов В.А.</i> О потоках в сетях с барьерной достижимостью	90
<i>Жуйков К.Н., Савин А.Ю.</i> Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами	91
<i>Заборский А.В., Нестеров А.В.</i> Математическая модель переноса полидисперсной примеси в атмосфере при ветровом подхвате с подстилающей поверхностью	93
<i>Задорожная Н.С.</i> Линейная задача о свободных длинноволновых колебаниях идеальной жидкости	94
<i>Задорожная Н.С., Кручинина Е.В.</i> Расчет водопроницаемости грунтопленочного экрана в случае неполного размыва защитного покрытия	96
<i>Зайнуллина Э.З., Павленко В.С., Сесекин А.Н., Гредасова Н.В.</i> Об устойчивости по Уламу-Хайерсу решений дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием	98
<i>Зайцева Н.В.</i> Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами	99
<i>Засорин Ю.В.</i> Принцип эквивалентности и теоремы единственности для некоторых классов псевдодифференциальных уравнений	101
<i>Зверева М.Б.</i> Двумерная задача о деформациях струны с нелинейным граничным условием	102
<i>Звягин А.В.</i> Термовязкоупругая модель движения растворов полимеров	104
<i>Звягин В.Г., Костенко Е.И.</i> О дробной модели Фойгта с бесконечной памятью	106
<i>Зубова С.П., Раецкая Е.В.</i> Решение задачи стабилизации движения дескрипторной системы управления	107
<i>Иванова Е.П.</i> Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с бесконечной орбитой границы	109
<i>Изварина Н.Р., Савин А.Ю.</i> Об эллиптических комплексах в относительной эллиптической теории	110
<i>Ильинкова Н.И., Рушинова И.И., Чехменок Т.А.</i> Об электронном учебно-методическом комплексе «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной»	112

<i>Кадченко С.И., Рязанова Л.С.</i> Решение обратных спектральных задач, порожденных операторами Штурма-Лиувилля произвольного четного порядка	114
<i>Калитвин В.А.</i> Об алгоритмах численного решения одного класса уравнений с частными интегралами	116
<i>Калманович В.В., Картанов А.А.</i> О моделировании процесса теплопроводности в многослойной среде при неидеальном тепловом контакте матричным методом .	120
<i>Карпов Е.А.</i> Модель колебаний балки с гистерезисными свойствами	121
<i>Катрахова А.А., Купцов В.С.</i> Об исследовании свойств модифицированных функций Бесселя первого рода	123
<i>Качалов В.И.</i> Точные и ε -регулярные решения дифференциальных уравнений с малым параметром	124
<i>Кащенко А.А.</i> Динамика одной сингулярно возмущенной модели трех связанных осцилляторов	126
<i>Кокурин М.М.</i> Класс методов аппроксимации квазирешений нелинейных нерегулярных операторных уравнений с апостериорным критерием останова итераций . .	127
<i>Кокурин М.Ю.</i> О кластеризации решений нерегулярных уравнений с негладкими операторами	128
<i>Кокурин М.Ю., Недопёкин А.Е.</i> Итеративно регуляризованный метод Гаусса–Ньютона в обратной задаче восстановления профиля электронной концентрации ионосферы	130
<i>Колесникова И.В.</i> Квартичные бинарные формы	132
<i>Колтаков А.И., Райцин А.М.</i> Контроль параметров оптического делителя мощности лазерного излучения в информационно-измерительной система эталона	133
<i>Кораблина Э.В., Левенштам В.Б.</i> Волновое уравнение с быстро осциллирующими данными. Восстановление неизвестных функций по частичным асимптотикам решений	135
<i>Корнев В.В., Хромов А.П.</i> Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения, не допускающая разделение переменных	136
<i>Коровина М.В.</i> Проблема Пуанкаре в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений	139

<i>Коронова Л.Н., Коростелева Д.М., Соловьёв С.И.</i> Конечно-элементная аппроксимация спектральной задачи о продольных собственных колебаниях стержня с упруго присоединёнными грузами	144
<i>Коростелева Д.М., Левинская К.О., Соловьёв С.И.</i> Исследование существования и свойств решений задачи о поперечных собственных колебаниях балки с упруго присоединёнными грузами	145
<i>Крутских В.В., Лобода А.В.</i> О 7-мерных алгебрах Ли с единственным 4-мерным абелевым идеалом	146
<i>Крымов Н.Е.</i> Оценка погрешности дискретной аппроксимации стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в двумерной периодической структуре . .	148
<i>Кузнецова М.А.</i> О восстановлении операторов Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале	150
<i>Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А.</i> Качественные свойства дифференциальных уравнений четвертого порядка на графах	152
<i>Курбанов В.М., Исмаилова А.И.</i> Оценка скорости сходимости для одномерного оператора шредингера с потенциалом из класса $L, r \geq 1$	154
<i>Левинская К.О., Коростелева Д.М., Соловьёв С.И.</i> Конечно-элементная аппроксимация спектральной задачи о собственных колебаниях составной механической системы	156
<i>Лобода А.В.</i> О невырожденных орбитах в \mathbb{C}^4 7-мерных нильпотентных алгебр Ли	157
<i>Лобода А.В., Даринский Б.М.</i> Об унитарных преобразованиях гармонических многочленов	159
<i>Ломов И.С.</i> Построение обобщенного решения смешанной задачи для гиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями	161
<i>Ляхов Л.Н., Иноземцев А.И.</i> О существовании и единственности решения уравнения Фредгольма в анизотропных пространствах Лебега	162
<i>Макин А.С.</i> О спектре несамосопряженного оператора Дирака с периодическими краевыми условиями	164
<i>Марушкина Е.А.</i> Бифуркация Неймарка-Сакера в системе трех связанных разностных автогенераторов	166

<i>Махмутова Д.Ф., Еникеева Л.В.</i> Моделирование алкилирования генетическим алгоритмом и методом оптимизации роя частиц.	168
<i>Мейрманов А.М., Гальцев О.В., Сельдемиров В.Е.</i> Математические модели нефтяного резервуара	170
<i>Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.</i> Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и формулы для сумм некоторых сходящихся рядов	172
<i>Миронов А.Н.</i> О функции Римана — Адамара для трехмерного уравнения Бианки	174
<i>Миронова Л.Б.</i> Задача Дарбу для одной системы с двумя независимыми переменными	176
<i>Мохамад А.Х.</i> Условия для решения дифференциальных уравнений неразрешенных относительно производной в частных производных	178
<i>Неверова Д.А.</i> Гладкость обобщенных решений третьей краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения	179
<i>Осин Р.А.</i> О дискретном неравенстве среднего для субгармонических функций	181
<i>Пальшин Г.П.</i> Новая бифуркационная диаграмма в одной модели вихревой динамики	184
<i>Перескоков А.В.</i> Об асимптотике спектра атома водорода в электромагнитном поле вблизи верхних границ спектральных кластеров	186
<i>Переходцева Э.В.</i> Результаты успешности прогнозирования сильных шквалов и смерчей на основе гидродинамико-статистической модели прогноза в течение аномально-го лета 2020 года	188
<i>Петросян Г.Г.</i> Разрешимость задач управляемости для включений с каузальными операторами	190
<i>Половинкина М.В., Половинкин И.П.</i> Об одном свойстве моделей в биологии	193
<i>Преображенская М.М.</i> Периодические решения вида дискретных бегущих волн в кольцевой цепи генераторов типа Мэки-Гласса	194
<i>Прокопьева Д.Б., Жук Т.А., Головкин Н.И.</i> Операторный анализ СМО с диффузионной интенсивностью входного потока	195
<i>Прядиев В.Л.</i> Свойства решения волнового уравнения на графе для некоторых классов условий трансмиссии . .	197

<i>Раецкий К.А.</i> Об одной модели движения динамической системы с многоточечными условиями	198
<i>Раутиан Н.А.</i> О свойствах полугрупп операторов, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями	200
<i>Родионова Е.С., Сапронова Т.Ю.</i> Ответвления изолированных экстремалей от критических орбит при разрушении сферической симметрии	201
<i>Руденко А.Е.</i> Задача четвертого порядка на графе – звезда с локализованными особенностями	203
<i>Русяк И.Г., Суфиянов В.Г., Клюкин Д.А.</i> Математическое моделирование упругих колебаний стержней с динамическими внутренними силами	204
<i>Рыхлов В.С.</i> Формула Даламбера решения задачи Коши для гиперболического уравнения со смешанной производной и постоянными коэффициентами	206
<i>Сабитов К.Б.</i> Начально-граничные задачи для уравнения колебаний пластинки	208
<i>Савин А.Ю., Семенова Е.Н.</i> О спектральных задачах с условиями на подмножествах произвольной размерности	211
<i>Сандакова С.Л.</i> Экстремальные задачи для тригонометрических полиномов на отрезке, меньшем периода	212
<i>Санина Е.Л., Булатов Ю.Н., Терлеукая Е.С.</i> Оператор Лапласа–Киприянова на сфере	214
<i>Сахаров С.И.</i> Контактная задача для параболических систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами	216
<i>Сергазы Г.</i> Ортогонализация функций внутренних колебаний в многомерной эмпирической модовой декомпозиции	217
<i>Серебрянский С.М.</i> Об идентификации функциональной зависимости в граничных данных при решении обратных задач тепловой диагностики	219
<i>Сидоров С.Н.</i> Трехмерная начально-граничная задача для уравнения параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью	221
<i>Силаева М.Н., Алкади Хамса Мохамад</i> Уравнение субдиффузии и задача с периодическим и краевым условием	223

<i>Симонов Б.В., Симонова И.Э., Самофалова Л.В., Мишта В.П.</i> Оценка смешанного модуля гладкости функции с преобразованным рядом Фурье	224
<i>Симонова И.Э., Самофалова Л.В., Симонов Б.В., Мишта В.П.</i> Коэффициенты Фурье функций из класса Бесова-Никольского	226
<i>Скороходов В.А., Ерусалимский Я.М., Муртузалиева С.Ч.</i> Задача нахождения начального состояния ресурсной сети	228
<i>Снегур М.О., Лапич А.О., Смолькин Е.Ю.</i> Метод оператор-функций в задаче о вытекающих волнах неоднородного волновода	229
<i>Сомлев Ю.С.</i> Об аппроксимации сингулярного интеграла с косекансным ядром	231
<i>Соловьёв П.С., Коростелева Д.М., Левинская К.О., Соловьёв С.И.</i> Аппроксимация дифференциальной задачи на собственные значения с дробно-рациональной зависимостью от спектрального параметра	236
<i>Солонуха О.В.</i> О линейной параболической задаче с нелокальными краевыми условиями	237
<i>Степович М.А., Туртин Д.В., Кальманович В.В.</i> О корректности математических моделей диффузии неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в однородных и многослойных полупроводниковых мишенях	238
<i>Сумин В.И.</i> Вольтерровы функциональные уравнения и оптимизация распределенных систем	239
<i>Сумин М.И.</i> Принцип максимума Понтрягина и некорректные задачи оптимального управления	243
<i>Теляковский Д.С.</i> Об одном достаточном условии голоморфности	246
<i>Тинюкова Т.С., Чубурин Ю.П.</i> Фазовый переход в случае « p -волнового» сверхпроводника	248
<i>Тихонов Ю.А.</i> Об аналитичности решений системы интегродифференциальных уравнений, возникающей в теории вязкоупругости	250
<i>Толкачев А.В.</i> Модифицированное отображение Эно с гистерезисной нелинейностью	252
<i>Трусова Н.И.</i> Непрерывность весового частного интегрального оператора в L_p^γ	254

<i>Усков В.И.</i> Аналог биннома Ньютона для суммы двух линейных операторов	256
<i>Усков В.И.</i> Влияние малого параметра в уравнении первого порядка	256
<i>Фасхутдинова Р.И., Еникеева Л.В.</i> Численный анализ жесткости дифференциальных уравнений в химической кинетике	258
<i>Федоров К.Д.</i> Гладкое решение задачи Дирихле для модельной параболической системы в негладкой плоской области	260
<i>Хуштова Ф.Г.</i> Третья краевая задача в полуполосе с однородным начальным условием для B -параболического уравнения	261
<i>Царьков И.Г.</i> Свойства кусочно монотонных множеств в $C[a, b]$	262
<i>Ченцов А.Г.</i> Сцепленность семейств множеств, суперкомпактность и некоторые обобщения	264
<i>Чернышов А.Д., Попов М.И.</i> Применение быстрых разложений при рассмотрении разрывных функций с возможностью их многократного дифференцирования, случаи несогласованных граничных условий	266
<i>Шабров С.А., Бородина Е.А., Курклинская Э.Ю.</i> О существовании вторых решениях нелинейной математической модели шестого порядка с производными по мере	269
<i>Шабров С.А., Ильина О.М., Шаброва М.В., Голованова Ф.В.</i> Об адаптации метода конечных элементов для математической модели шестого порядка с производными Радона–Никодима	273
<i>Шамолин М.В.</i> Однородные интегрируемые системы высокого порядка с диссипацией	275
<i>Шананин Н.А.</i> О послыном продолжении инвариантности решений квазиэллиптических уравнений второго порядка	276
<i>Шафиева Г.Х.</i> Начально–краевая задача для систем волновых уравнений с граничной диссипацией и внутренним нелинейным фокусирующим источником переменного порядка роста	278

<i>Шахбазов Р.И.</i> О сходимости спектрального разложения функции из пространства $W_2^1(G)$ по корневым функциям дифференциального оператора нечетного порядка	280
<i>Шварева Е.Н., Еникеева Л.В., Шарипова Г.М.</i> Применение гармонического алгоритма при моделировании кинетического процесса окисления	283
<i>Шмырин А.М., Мишачев Н.М., Сёмина В.В.</i> Управление микроклиматом цеха обжига клинкера цементного производства на основе окрестностной модели	284
<i>Шубарин М.А.</i> Степенные пространства Кёте, часть 2	286
<i>Hussin S.M., Sufiyanov V.G.</i> On The Robust H_∞ Control Design Of Markov Jump Linear Systems By Linear Matrix Inequalities	288
<i>Lomovtsev F.E.</i> Conclusion of the smoothness criterion for the right-hand side of the model telegraph equation with rate $a(x, t)$ by the correction method	289
<i>Lomovtsev F.E.</i> Generalized Remann formula of the classical solution to the Cauchy problem for the general telegraph equation with variable coefficients	293
<i>Lysenko V.V., Lomovtsev F.E.</i> Mixed problem for the wave equation on a segment with non-characteristic second derivatives in boundary modes	295
<i>Nurakhmetov D., Jumabayev S., Aniyarov A., Kussainov R.</i> Symmetric Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of Beams under axial loads	300
<i>Piskarev S.</i> Approximation of nonhomogeneous fractional equations in banach space	301
<i>Spesivtseva K.A., Lomovtsev F.E.</i> The correctness criterion of the initial-boundary value problem for the wave equation on the half-line with characteristic second derivatives at the end	302

Contents

<i>Abduragimov G.E.</i> On the existence and uniqueness of a positive solution of a boundary value problem for one nonlinear second –order FDE	5
<i>Aliiev A.B., Gasimova V.F.</i> An initial boundary value problem for a class of systems of fourth-order semilinear hyperbolic equations	6
<i>Amosov A.A.</i> Stationary problem of radiative-conductive heat transfer in a convex absolutely black body with a semitransparent inclusion	8
<i>Arefyev I. A., Enikeeva L. V., Agzamova M. R.</i> Development of a mathematical model of the process of sulfuric acid alkylation of isobutane with olefins	10
<i>Aristov A.I.</i> Exact Solutions of an equation with p-laplacian	12
<i>Astashova I.V., Lashin D.A., Filinovskiy A.V.</i> On the control problem for a parabolic equation with time variable coefficients	13
<i>Askhabov S.N.</i> Integral equation with sum kernel and power nonlinearity	17
<i>Atanov A.V.</i> Homogeneous hypersurfaces in \mathbb{R}^4 : computer algorithms for classification	19
<i>Afanasenkov Y.V., Gladyshev Y.A.</i> Application of the generalized bers degree method for solutions of the moisl-teodorescu system of differential equations	21
<i>Bezmelnitsyna Yu.E., Kornev S.V.</i> On asymptotic behavior of solutions of random differential inclusion	23
<i>Belyaeva Yu.O., Skubachevsky A.L.</i> On the existence of stationary solutions of the Vlasov-Poisson system of equations	25
<i>Berdyshev A.S., Ryskan A.R.</i> An analogue of the Holmgren problem for a four-dimensional degenerate elliptic equation	27
<i>Biriukov A.M.</i> Cauchy problem for systems of complex differential equations in classes of entire functions	28
<i>Bobrenyova Yu.O., Enikeeva L.V., Mazitov A.A., Uzyanbaev R.M., Gubaydullin I.M.</i> Numerical mass transfer modeling of two-phase fluid in fractured-porous reservoir	29
<i>Bogatov E.M.</i> On the development of the theory of nonlinear integral equations in the works of A.I. Nekrasov	30

<i>Bogomolov S.V.</i> Probabilistic agent-based models	33
<i>Boltachev A.V.</i> On Fredholm boundary value problems for the wave equation with the conditions given over the entire boundaries	35
<i>Bondarenko, N.P.</i> Partial inverse problem for the differential operator on an arbitrary graph	36
<i>Borevich E.Z.</i> Bifurcation of solutions of the basic equations for carrier distributions in semiconductors	38
<i>Borisov D.I.</i> On non-symmetric perturbations of internal thresholds in essential spectrum	39
<i>Buksaeva L.Z.</i> On componentwise uniform equiconvergence with trigonometric series of spectral expansions corresponding to discontinuous Dirac operators	40
<i>Bulatov M.V., Solovarova L.S.</i> Systems of Volterra integral equations of the first kind	43
<i>Bury A.O., Abrashina-Zhadaeva N.G.</i> Numerical modeling of laser materials processing	44
<i>Vasilyev V.B., Khodyreva A.A.</i> Discrete Dirichlet problem in a quarter plane	45
<i>Vatolkin M.Yu.</i> On a new form of representation of solutions of a quasi-differential equation	47
<i>Vlasov V.V.</i> Spectral analysis and stability of the solutions of integro-differential equations	52
<i>Gagarin Yu.E., Nikitenko U.V., Stepovich M.A.</i> Interval error probability assessment in Bayesian Belief Networks	53
<i>Galín A.S., Enikeeva L.V., Enikeev M.R.</i> Using machine learning methods in the problem of identification of needle coke mesophase spheres	55
<i>Garkavenko G.V., Uskova N.B.</i> Spectral properties of a difference operator with involution	57
<i>Getmanova E.N., Obukhovskii V.V.</i> On periodic solutions of one class of random differential inclusions	58
<i>Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A.</i> On the construction of generalized degrees for the Dirac quantum electrodynamics equation	60
<i>Gliklikh Yu.E., Sergeeva D.S.</i> On conditions of global in time prolongation for solutions of stochastic differential- algebraic equations	63
<i>Godzhaeva H.R.</i> Rate of uniform equiconvergence of an orthogonal expansion with a trigonometric series for a differential operator of even order	65

<i>Gorelov V.A.</i> On cogredience and contragredience of linear differential equations	67
<i>Gritsenko S.A.</i> On the model of soil salinization	69
<i>Davydov A.V.</i> Correct solvability and spectral analysis of integrodifferential equation arising in the ttudy of flutter of a viscoelastic plate	71
<i>Darinsky B.M., Loboda A.V., Saiko D.S.</i> About some characteristics of harmonic polynomials	73
<i>Dzhabrailov A.L.</i> The Cauchy problem for one an integro-differential equation with point singularity	76
<i>Dzhenaliev M.T., Ergaliev M.G.</i> On a boundary value problem for a two-dimensional Navier-Stokes system in a cone	77
<i>Dzhenaliev M.T., Imanberdiev K.B., Kasymbekova A.S.</i> On the homogeneous Dirichlet problem for the two-dimensional Burgers equation in a cone	79
<i>Dodonov A.E.</i> The necessary condition for the convergence of the series of simple partial fractions in $L_p(\mathbb{R})$	80
<i>Dodonov A.E.</i> Inequality of various metrics for simple partial fractions	81
<i>Domnich A.A., Baranovskiy E.S., Artemov M.A.</i> Nonlinear problems of the flow of an unevenly heated viscous fluid through a given region	82
<i>Dubinskii Yu.A.</i> Some Kernels of Trace Functionals and Boundary Value Problems of Field-Theory on the Plane	84
<i>Dubovtsev D.A., Enikeeva L.V., Gubaydullin I.M.</i> Study of a mathematical model for the synthesis of methyl-tert-butyl ether (MTBE)	86
<i>Enikeeva L.V., Gubaydullin I.M.</i> Heuristic optimization methods for solving inverse problems of chemical kinetics	88
<i>Erusalimskiy I.M., Rusakov V.A., Skorochodov V.A.</i> About flows in networks with barrier reachability	90
<i>Savin A.Yu., Zhuikov K.N.</i> Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients	91
<i>Zaborsky A.V., Nesterov A.V.</i> Mathematical model of the transport of a polydisperse admixture in the atmosphere during wind pick-up from the underlying surface	93
<i>Zadorozhnaya N.S.</i> Linear problem of free long-wave oscillations ideal fluid	94
<i>Zadorozhnaya N.S., Kruchinina E.V.</i> Calculation of the water permeability of the soil film screen in the case of incomplete erosion of the protective coating	96

<i>Zainullina E.Z., Pavlenko V.S., Sesekin A.N., Gredasova N.V.</i>	
On Ulam-Hayers stability of solutions of first-order differential equations with generalized action	98
<i>Zaitseva N.V.</i>	
Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with incommensurable shifts	99
<i>Zvereva M.B.</i>	
Two-dimensional problem of deformations of a string with a nonlinear boundary condition	102
<i>Zvyagin A.V.</i>	
Thermoviscoelastic model of polymer solutions motion	104
<i>Zvyagin V.G., Kostenko E.I.</i>	
About fractional Voigt model with infinite memory	106
<i>Zubova S.P., Raetskaya E.V.</i>	
Solving the problem of stabilizing the motion of the descriptor control system	107
<i>Ivanova E.P.</i>	
Boundary value problems for differential-difference equations with infinite boundary orbit	109
<i>Izvarina N.R., Savin A.Yu.</i>	
On elliptic complexes in relative elliptic theory	110
<i>Ilyinkova N.I., Rushnova I.I., Chakhmianok T.A.</i>	
About the electronic educational and methodological complex «Mathematical analysis. Differential and integral calculus of functions of one variable»	112
<i>Kadchenko S.I., Riazanova L. S.</i>	
Solving inverse spectral problems, generated by Sturm - Liouville operators of arbitrary even order	114
<i>Kalitvin V.A.</i>	
On algorithms for the numerical solution of some classes of Barbashin integro-differential equations with partial integrals	116
<i>Kalmanovich V.V., Kartanov A.A.</i>	
On a modeling of heat conductivity in a multilayer medium with nonideal thermal contact with the matrix method	120
<i>Karpov E.A.</i>	
Beam oscillations model using hysteresis feature	121
<i>Katrakhova A. A., Kuptsov V. S.</i>	
On the study of properties of modified Bessel functions of the first kind	123
<i>Kachalov V.I.</i>	
Exact and ε -regular solutions of differential equations with a small parameter	124
<i>Kashchenko A.A.</i>	
Dynamics of one singularly perturbed model of three coupled oscillators	126
<i>Kokurin M.M.</i>	
A class of quasi-solution approximation methods with a-posteriori parameter choice rule for nonlinear irregular operator equations	127

<i>Kokurin M.Yu.</i> On the clustering of solutions to irregular equations with nonsmooth operators	128
<i>Kokurin M.U., Nedopekin A.E.</i> Iterative regularized Gauss-Newton method in the inverse problem of reconstructing the ionosphere electronic concentration profile	130
<i>Kolesnikova I.V.</i> Quartic binary forms	132
<i>Kolpakov A.I., Raitsin A.M.</i> Control of the parameters of the optical power divider of laser radiation in the information-measuring system of the standard	133
<i>Korablina E.V., Levenshtam V.B.</i> Wave equation with rapidly oscillating data. Recovery of unknown functions from partial asymptotics of solutions	135
<i>Kornev V.V., Khromov A.P.</i> Divergent series and wave equation mixed problem that does not allow separation of variables	136
<i>Korovina M.V.</i> Poincaré's problem in the analytic theory of ordinary differential equations	139
<i>Koronova L.N., Korosteleva D.M., Solov'ev S.I.</i> Finite element approximation of the spectral problem on longitudinal eigenvibrations of a bar with elastically attached loads	144
<i>Korosteleva D.M., Levinskaya K.O., Solov'ev S.I.</i> Investigation of the existence and properties of the solutions of the problem on vertical eigenvibrations of a beam with elastically attached loads	145
<i>Krutskikh V.V., Loboda A.V.</i> On 7-dimensional Lie algebras with a unique 4-dimensional abelian ideal	146
<i>Krymov N.E.</i> Error estimate for discrete approximation of the stationary radiative-conductive heat transfer problem in a periodic media	148
<i>Kuznetsova M.A.</i> On recovery of Sturm–Liouville operators with frozen argument on a time scale	150
<i>Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A.</i> Qualitative properties of differential equations of the fourth order on graphs	152
<i>Kurbanov V.M., Ismaylova A.I.</i> An estimate for the rate of equiconvergence for a one-dimensional Schrödinger operator with a potential from the class $L, r \geq 1$	154
<i>Levinskaya K.O., Korosteleva D.M., Solov'ev S.I.</i> Finite element approximation of the spectral problem on eigenvibrations of a composite mechanical system	156
<i>Loboda A.V.</i> On nondegenerate orbits in \mathbb{C}^4 7-dimensional nilpotent Lie algebras	157

<i>Loboda A.V., Darinskii B.M.</i> On the unitary equivalence of harmonic polynomials	159
<i>Lomov I.S.</i> Construction of a generalized solution of a mixed problem for a hyperbolic equation with non-local boundary conditions	161
<i>Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I.</i> On the existence and uniqueness of the solution of the Fredholm equation in anisotropic Lebesgue spaces	162
<i>Makin A.S.</i> On the spectrum of a non-self-adjoint Dirac operator with periodic boundary conditions	164
<i>Marushkina E.A.</i> Neimark-Sacker bifurcation in a system of three coupled difference autogenerators	166
<i>Makhmutova D.F, Enikeeva L.V.</i> Simulation of alkylation with a genetic algorithm and a particle swarm optimization method.	168
<i>Meirmanov A.M., Galtsev O.V., Seldemirov V.E.</i> Oil reservoir mathematical models	170
<i>Mirzoev K.A., Safonova T.A.</i> Differential operators with constant coefficients and formulas for the sums of some converging series	172
<i>Mironov A.N.</i> On the Riemann-Hadamard function for the three-dimensional Bianchi equation	174
<i>Mironova L.B.</i> On the Darboux problem for one system with two independent variables	176
<i>Mohamad A.H.</i> Conditions for solving unresolved differential equations with respect to the partial derivative	178
<i>Neverova D.A.</i> Smoothness of generalized solutions to the third boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equation	179
<i>Osin R.A.</i> On discrete form of the mean value inequality for subharmonic functions	181
<i>Palshin G.P.</i> New bifurcation diagram in one model of the vortex dynamics	184
<i>Pereskokov A.V.</i> On the asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in an electromagnetic field near the upper boundaries of spectral clusters	186
<i>Petrosyan G.G.</i> Solvability of controllability problems for inclusions with causal operators	190
<i>Polovinkina M.V., Polovinkin I.P.</i> On an effect in growth and distribution models	193

<i>Preobrazhenskaia M.M.</i> Periodic solutions of the form of discrete traveling waves in a ring chain of Mackie-Glass-type generators	194
<i>Prokopena D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I.</i> Operator analysis of a queuing system with a diffusive input flow intensity	195
<i>Pryadiev V.L.</i> Properties of the solution of the wave equation on the graph for some classes of transmission conditions	197
<i>Raetskiy K.A.</i> On one model of motion dynamic system with multi-point conditions	198
<i>Rautian N.A.</i> On the properties of operator semigroups generated by Volterra integro-differential equations	200
<i>Rodionova E.S., Sapronova T.Yu.</i> Branches of isolated extremals from critical orbits upon breaking spherical symmetry	201
<i>Rudenko A.E.</i> Problem of the fourth order on the graph - a star with localized singularities	203
<i>Rusyak I.G., Suftyanov V.G., Kljukin D.A.</i> Mathematical modeling of elastic rods vibrations with dynamic internal forces	204
<i>Rykhlov V.S.</i> D'Alembert formula for solving the Cauchy problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and constant coefficients	206
<i>Sabitov K.B.</i> Initial-boundary value problems for the equation of vibrations of a plate	208
<i>Savin A.Yu., Semenova E.N.</i> On spectral problems with conditions on submanifolds of arbitrary dimension	211
<i>Sandakova S.L.</i> Extreme problems for trigonometric polynomials on a segment smaller than the period	212
<i>Sanina E.L., Bulatov Yu.N., Terletskaya E.S.</i> Laplace operator — Kipriyanov on the sphere	214
<i>Sakharov S.I.</i> Contact problem for a second-order parabolic system with Dini-continuous coefficients	216
<i>Sergazy G.</i> Orthogonalization of intrinsic mode functions in multivariate empirical mode decomposition	217
<i>Serebryansky S.M.</i> On identification of functional dependence in boundary data when solving inverse problems of thermal diagnostics	219
<i>Sidorov S.N.</i> Three-dimensional initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part	221

<i>Silaeva M.N., Alkadi Hamsa Mohamad</i> The subdiffusion equation and the periodic and boundary condition problem	223
<i>Simonov B.V., Simonova I.E., Samofalova L.V., Mishta V.P.</i> Estimate of the mixed modulus of smoothness of a function with a transformed Fourier series	224
<i>Simonova I.E., Samofalova L.V., Simonov B.V., Mishta V.P.</i> Fourier coefficients of functions from the Besov-Nikol'skii class	226
<i>Skorokhodov V.A., Erusalimskii I.M., Murtuzaliev S.Ch.</i> The problem of finding the initial state of the resource network	228
<i>Snegur M.O., Lapich A.O., Smolkin E.Yu.</i> Method of operator-functions in the problem of leaky waves of an inhomogeneous waveguide	229
<i>Soliev Yu.S.</i> On approximation of singular integral with cosecant kernel	231
<i>Solov'ev P.S., Korosteleva D.M., Levinskaya K.O., Solov'ev S.I.</i> Approximation of the differential eigenvalue problem with fractional rational dependence on the spectral parameter	236
<i>Solonukha O.V.</i> On a linear parabolic problem with nonlocal boundary conditions	237
<i>Stepovich M.A., Turtin D.V., Kalmanovich V.V.</i> On the correctness of mathematical models for the diffusion of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide electron beam in homogeneous and multilayer semiconductor targets	238
<i>Sumin V.I.</i> Volterra functional equations and optimization of distributed systems	239
<i>Sumin M.I.</i> Pontryagin maximum principle and ill-posedness optimal control problems	243
<i>Telyakovskii D.S.</i> On a sufficient condition of the holomorphy	246
<i>Chuburin Yu.P., Tinyukova T.S.</i> Phase transition in the case of a p -wave superconductor	248
<i>Tikhonov Yu.A.</i> On the analyticity of the system of integro-differential equations arising in the theory of viscoelasticity	250
<i>Tolkachev A.V.</i> Modified Henon map with hysteresis nonlinearity	252

<i>Trusova N.I.</i> Continuity of a weighted partial integral operator in L_p^{gamma}	254
<i>Uskov V.I.</i> Analog of Newton's binom for sum of two linear operators	256
<i>Uskov V.I.</i> Influence of small parameter in a first-order equation	256
<i>Faskhutdinova R.I., Enikeeva L.V.</i> Numerical analysis of the stiffness of differential equations in chemical kinetics . . .	258
<i>Fedorov K.D.</i> The smoothness of solution of the Dirichlet problem for model parabolic system in a domain with non- smooth lateral boundaries	260
<i>Khushtova F.G.</i> The third boundary problem in the half-strip with a homogeneous initial condition for the B-parabolic equation	261
<i>Tsar'kov I.G.</i> Properties of piecewise monotone sets in $C[a, b]$.	262
<i>Chentsov A.G.</i> Linkedness of sets families, supercompactness, and some generalizations	264
<i>Chernyshov A.D., Popov M.I.</i> Application of fast expansions when considering discontinuous functions with the possibility of their multiple differentiation, cases of inconsistent boundary conditions	266
<i>Shabrov S.A., Borodina E.A., Kurklinskaya E.Yu.</i> On the existence of second solutions of a sixth-order nonlinear mathematical model with derivatives with respect to measure	269
<i>Shabrov S.A., Ilyina O.M., Shabrova M.V., Golovaneva F.V.</i> On adaptation of the finite element method for a sixth- order mathematical model with Radon - Nikodym derivatives	273
<i>Shamolin M.V.</i> Homogeneous Integrable Systems of Higher- Order with Dissipation	275
<i>Shananin N.A.</i> On Fiber Invariance Continuation of Solutions of Second-Order Quasi-Elliptic Equations	276
<i>Shafiyeva G.Kh.</i> An initial boundary value problem for a class of systems of fourth-order semilinear hyperbolic equations	278
<i>Shakhbazov R.I.</i> On the convergence of the spectral expansion of a function from the space $W_2^1(G)$ in root functions of a differential operator of odd order	280

<i>Shvareva E.N., Enikeeva L.V., Sharipova G.M.</i> Application of the harmonic algorithm in modeling the kinetic oxidation process	283
<i>Shmyrin A.M., Mishachev N.M., Semina V.V.</i> Microclimate control based on the neighborhood model for the clinker firing department	284
<i>Shubarin M.A.</i> Power Spaces Kete. Part 2	286
<i>Hussin S.M., Sufiyarov V.G.</i> On The Robust H_∞ Control Design Of Markov Jump Linear Systems By Linear Matrix Inequalities	288
<i>Lomovtsev F.E.</i> Conclusion of the smoothness criterion for the right-hand side of the model telegraph equation with rate $a(x, t)$ by the correction method	289
<i>Lomovtsev F.E.</i> Generalized Remann formula of the classical solution to the Cauchy problem for the general telegraph equation with variable coefficients	293
<i>Lysenko V.V., Lomovtsev F.E.</i> Mixed problem for the wave equation on a segment with non-characteristic second derivatives in boundary modes	295
<i>Nurakhmetov D., Jumabayev S., Aniyarov A., Kussainov R.</i> Symmetric Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of Beams under axial loads	300
<i>Piskarev S.</i> Approximation of nonhomogeneous fractional equations in banach space	301
<i>Spesivtseva K.A., Lomovtsev, F.E.</i> The correctness criterion of the initial-boundary value problem for the wave equation on the half-line with characteristic second derivatives at the end	302

Именной указатель

Aniyarov A., 300
Hussin S.M., 288
Jumabayev S., 300
Kussainov R., 300
Lomovtsev F.E., 289, 293, 295,
302
Lysenko V.V., 295
Nurakhmetov D., 300
Piskarev S., 301
Spesivtseva K.A., 302
Sufiyanov V.G., 288

А

Абдурагимов Г.Э., 5
Абрашина-Жадаева Н.Г., 44
Агзамова М.Р., 10
Алиев А.Б., 6
Алкади Хамса Мохамад , 223
Амосов А.А., 8
Арефьев И.А., 10
Аристов А.И., 12
Артемов М.А., 82
Асташова И.В., 13
Асхабов С.Н., 17
Атанов А.В., 19
Афанасенкова Ю.А., 21

Б

Барановский Е.С., 82
Безмельницына Ю.Е., 23
Беляева Ю.О., 25
Бердышев А.С., 27

Бирюков А.М., 28
Бобренева Ю.О., 29
Богатов Е.М., 30
Богомоллов С.В., 33
Болтачев А.В., 35
Бондаренко Н.П., 36
Боревич Е.З., 38
Борисов Д.И., 39
Бородина Е.А., 269
Буксаева Л.З., 40
Булатов М.В., 43
Булатов Ю.Н., 214
Бурый А.О., 44

В

Васильев В.Б., 45
Ватолкин М.Ю., 47
Вирченко Ю.П., 50
Власов В.В., 52

Г

Гагарин Ю.Е., 53
Галин А.Ш., 55
Гальцев О.В., 170
Гаркавенко Г.В., 57
Гасымова В.Ф., 6
Гетманова Е.Н., 58
Гладышев Ю.А., 21, 60
Гликлих Ю.Е., 63
Годжаева Х.Р., 65
Голованева Ф.В., 273
Головко Н.И., 195

Горелов В.А., 67
Гредасова Н.В., 98
Гриценко С.А., 69
Губайдуллин И.М., 29, 86, 88

Д

Давыдов А.В., 71
Даринский Б.М., 73, 159
Джабраилов А.Л., 76
Дженалиев М.Т., 77, 79
Додонов А.Е., 80, 81
Домнич А.А., 82
Дубинский Ю.А., 84
Дубовцев Д.А., 86

Е

Еникеев М.Р., 55
Еникеева Л.В., 10, 29, 55, 86,
88, 168, 258, 283
Ергалиев М.Г., 77
Ерусалимский Я.М., 90, 228

Ж

Жуйков К.Н., 91
Жук Т.А., 195

З

Заборский А.В., 93
Задорожная Н.С., 94, 96
Зайнуллина Э.З., 98
Зайцева Н.В., 99
Засорин Ю.В., 101
Зверева М.Б., 102
Звягин А.В., 104
Звягин В.Г., 106
Зубова С.П., 107

И

Иванова Е.П., 109
Изварина Н.Р., 110
Ильина О.М., 273
Ильинкова Н.И., 112

Иманбердиев К.Б., 79
Иноземцев А.И., 162
Исмайлова А.И., 154

К

Кадченко С.И., 114
Калитвин В.А., 116
Калманович В.В., 120, 238
Карпов Е.А., 121
Картанов А.А., 120
Касымбекова А.С., 79
Катрахова А.А., 123
Качалов В.И., 124
Кащенко А.А., 126
Клюкин Д.А., 204
Кокурин М.М., 127
Кокурин М.Ю., 128, 130
Колесникова И.В., 132
Колпаков А.И., 133
Кораблина Э.В., 135
Корнев В.В., 136
Корнев С.В., 23
Коровина М.В., 139
Коронова Л.Н., 144
Коростелева Д.М., 144, 145,
156, 236
Костенко Е.И., 106
Крутских В.В., 146
Кручинина Е.В., 96
Крымов Н.Е., 148
Кузнецова М.А., 150
Кулаев Р.Ч., 152
Купцов В.С., 123
Курбанов В.М., 154
Курклинская Э.Ю., 269

Л

Лалич А.О., 229
Лашин Д.А., 13
Левенштам В.В., 135
Левинская К.О., 145, 156, 236

Лобода А.В., 73, 146, 157, 159

Ломов И.С., 161

Лошкарева Е.А., 60

Ляхов Л.Н., 162

М

Мазитов А.А., 29

Макин А.С., 164

Марушкина Е.А., 166

Махмутова Д.Ф., 168

Мейрманов А.М., 170

Мирзоев К.А., 172

Миронов А.Н., 174

Миронова Л.Б., 176

Мишачев Н.М., 284

Мишта В.П., 224, 226

Мохамад А.Х., 178

Мургузалиева С.Ч., 228

Н

Неверова Д.А., 179

Недопёкин А.Е., 130

Нестеров А.В., 93

Никитенко У.В., 53

Новосельцева А.Э., 50

О

Обуховский В.В., 58

Осин Р.А., 181

П

Павленко В.С., 98

Пальшин Г.П., 184

Перескоков А.В., 186

Переходцева Э.В., 188

Петросян Г.Г., 190

Половинкин И.П., 193

Половинкина М.В., 193

Попов М.И., 266

Преображенская М.М., 194

Прокопьева Д.Б., 195

Прядиев В.Л., 197

Р

Раецкая Е.В., 107

Раецкий К.А., 198

Райцин А.М., 133

Раутиан Н.А., 200

Родионова Е.С., 201

Руденко А.Е., 203

Русаков В.А., 90

Русяк И.Г., 204

Рушнова И.И., 112

Рыскан А.Р., 27

Рыхлов В.С., 206

Рязанова Л.С., 114

С

Сабитов К.Б., 208

Савин А.Ю., 91, 110, 211

Сайко Д.С., 73

Самофалова Л.В., 224, 226

Сандакова С.Л., 212

Санина Е.Л., 214

Сапронова Т.Ю., 201

Сафонова Т.А., 172

Сахаров С.И., 216

Сельдемиров В.Е., 170

Семенова Е.Н., 211

Сёмина В.В., 284

Сергазы Г., 217

Сергеева Д.С., 63

Серебрянский С.М., 219

Сесекин А.Н., 98

Сидоров С.Н., 221

Силаева М.Н., 223

Симонов Б.В., 224, 226

Симонова И.Э., 224, 226

Скороходов В.А., 90, 228

Скубачевский А.Л., 25

Смолькин Е.Ю., 229

Снегур М.О., 229

Солиев Ю.С., 231

Соловарова Л.С., 43

Соловьёв П.С., 236
Соловьёв С.И., 144, 145, 156,
236
Солонуха О.В., 237
Степович М.А., 53, 238
Сумин В.И., 239
Сумин М.И., 243
Суфиянов В.Г., 204

Т

Теляковский Д.С., 246
Терлецкая Е.С., 214
Тинюкова Т.С., 248
Тихонов Ю.А., 250
Толкачев А.В., 252
Трусова Н.И., 254
Туртин Д.В., 238

У

Узянбаев Р.М., 29
Уртаева А.А., 152
Усков В.И., 256
Ускова Н.Б., 57

Ф

Фасхутдинова Р.И., 258
Федоров К.Д., 260
Филиновский А.В., 13

Х

Ходырева А.А., 45
Хромов А.П., 136
Хуштова Ф.Г., 261

Ц

Царьков И.Г., 262

Ч

Ченцов А.Г., 264
Чернышов А.Д., 266
Чехменок Т.А., 112
Чубурин Ю.П., 248

Ш

Шабров С.А., 269, 273
Шаброва М.В., 273
Шамолин М.В., 275
Шананин Н.А., 276
Шарипова Г.М., 283
Шафиева Г.Х., 278
Шахбазов Р.И., 280
Шварева Е.Н., 283
Шмырин А.М., 284
Шубарин М.А., 286

Научное издание
СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы
Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
Понтягинские чтения — XXXII

(3–9 мая 2021 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета *С. А. Шаброва*

Подписано в печать 30.04.2021. Формат 60×90/16.

Усл. п.л. 20,9. Тираж 150 экз. Заказ 303.

Издательский дом ВГУ
394000 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394000 Воронеж, ул. Пушкинская, 3