Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы
Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXX
(3–9 мая 2019 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2019

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

С56 **Современные методы теории краевых задач** : материалы Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXX» (3–9 мая 2019 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова ; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — 328 с.
ISBN 978-5-9273-2799-7

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы. Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, преподавания математики.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-2799-7

Содержание

AN IMPROVED MATHEMATICAL FORMULATION OF THE GOVERNING EQUATIONS FOR THE CHEMICAL COMPOSITIONAL SIMULATION[1]

B. Bekbauov, A. Berdyshev, Zh. Baishemirov
(Almaty, Kazakhstan, Satbayev University,
Abai Kazakh National Pedagogical University,
Insitute of Information and Computational Technologies)
berdyshev@mail.ru

This work presents a new mathematical formulation of the chemical compositional reservoir flow equations. The newly developed mathematical formulation is extended from the model formulation used in existing chemical compositional simulators. During the model development process, it was discovered that the currently used chemical compositional model estimates the adsorption effect on the transport of a component reasonably well but it does not satisfy the principle of mass conservation precisely. The energy conservation equation in the currently used chemical compositional model does not consider any change in the effective pore size caused by adsorption, which leads to inconsistency between the overall compositional balance equations and the energy conservation equation.

In the scope of this research work, a new mathematical formulation of the chemical compositional reservoir flow equations for the sequential simulation has been developed. The mathematical formulation developed in the scope of this work is extended from the existing model formulation for use in chemical flooding studies. During the process of this research, it was revealed that the approach used in the existing chemical compositional model estimates the adsorption effect on the transport of a component reasonably well but it does not satisfy the species conservation equation. Since the energy conservation equation in the currently used chemical compositional model does not take into account any change in the porosity due to adsorption, the approach leads to inconsistency between the overall compositional balance equations and the energy conservation equation. In the present work we introduce an approach to model the reduction in pore volume due to adsorption that satisfies the conservation laws for mass and

[1] This research has been supported from the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grants № AP05132680, № AP05130477).

energy. One can be convinced of the validity of this conclusion by comparing the energy conservation equation and the reaction rate terms of the species conservation equations in our formulation with those of the currently used chemical compositional model formulation. The mathematical formulation of species conservation equations suggested in this work does not require overall change in the currently used algorithm and makes it possible to apply a sequential solution approach to solve each of these equations separately and implicitly. A comparison with UTCHEM simulator has been performed for the case when change in porosity due to the adsorption does not influence the process significantly. Comparative studies show that the results obtained from IMPEC implementation of the newly proposed formulation are in a good agreement with that of UTCHEM simulator.

Acknowledgements

This research has been supported in part by Grants AP05132680 and AP05130477 from the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan. The authors sincerely thank Professor Kamy Sepehrnoori of The University of Texas at Austin and his research team for their insights and expertise that greatly assisted this research. Thanks are also due to Sciencesoft Ltd for providing the software used in this work.

ON THE NEWTON-LIKE METHOD FOR NONLINEAR PROBLEM IN HILBERT SPACE

N. Bouazila, H. Guebbai

(Guelma, Algeria, Université 8 Mai 1945)

nada.bouazila@gmail.com; nada.bouazila@univ-guelma.dz, guebaihamza@yahoo.fr; guebbai.hamza@univ-guelma.dz

Let $(\mathcal{H}, <.,.>_{\mathcal{H}})$ be a Hilbert space, with the norm $||.||_{\mathcal{H}} = \sqrt{<.,.>_{\mathcal{H}}}$. We denote $\mathbb{BL}(\mathcal{H})$ the set of all bounded linear operators defined on $\mathcal{H}$ to itself and his norm is given for $T \in \mathbb{BL}(\mathcal{H})$, by $||T|| = sup\{||Tx||_{\mathcal{H}} : ||x||_{\mathcal{H}} = 1\}$.

Let $A : \Omega \subseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ be a nonlinear Fréchet differentiable functional defined on Ω, which is a non empty open set of $\mathcal{H}$. We suppose that there is a unique $\zeta \in \Omega$ such that $A(\zeta) = 0_{\mathcal{H}}$, and $A'(.) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ is $\delta-$lipschitzian on Ω. We recall that for $T \in \mathbb{BL}(\mathcal{H})$, T^* denoted the adjoint operator.

Our goal is to build a Newton-like sequence that converges to the exact solution ζ and does not need to compute the inverse operator.

Theorem. *Let* $\{\zeta^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *be a Newton-like sequence defined by*

$$\begin{cases} \zeta^0 \text{ chosen in } \Omega, \\ \zeta^{k+1} = \zeta^k - \dfrac{1}{3||A'(\zeta^k)||^2}(A'(\zeta^k))^* A(\zeta^k), \ k \geqslant 0. \end{cases}$$

Then, $\exists\ C > 0,\ ||\zeta^0 - \zeta||_{\mathcal{H}} < C \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} ||\zeta^k - \zeta||_{\mathcal{H}} = 0.$

References

1. Kantorovich L.V. Functional Analysis (translated by Howard L. Silcock) / L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. — New York : Pergamon Press, 1982.

2. Ahues M. A note on perturbed fixed slope iterations / M. Ahues // Applied mathematics letters. — 2005. — T. 18, № 4. — C. 375–380.

PARTIAL INVERSE PROBLEM FOR STURM-LIOUVILLE TYPE DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT DELAY[1]

N. Djuric*, V. Vladicic**

(*Banja Luka, University of Banja Luka,
**East Sarajevo, University of East Sarajevo,
Bosnia and Herzegovina)

nebojsa.djuric@aggf.unibl.org

The topic of this paper is second order differential operators with constant delay generated by $-y'' + q(x)y(x-\tau)$ where potential q is real-valued function, $q \in L^2[0,\pi]$. We establish properties of the spectral characteristics and research the inverse problem of recovering operators from their spectra when $\tau \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$. We prove that the delay and the potential is uniquely determined from two spectrum, firstly when $y(0) = y(\pi) = 0$ and secondly when $y(0) = y'(\pi) = 0$, of those operators, when $q(x)$ is known on $(\frac{3\tau}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\tau}{4})$.

[1] Research supported by Ministry for Scientific and Technological Development, Higher Education and Information Society Government of the Republic of Srpska

References

1. Pikula. M. Inverse Spectral Problems for Sturm–Liouville Operators with a Constant Delay Less than Half the Length of the Interval and Robin Boundary Condition / M. Pikula, V. Vladicic, B. Vojvodic // Results Math. — 2019.

2. Vladicic V. An inverse problems for Sturm-Liouville-type differential equation with a constant delay / V. Vladicic, M. Pikula // Sarajevo Journal of mathematics. — 2016. — Vol. 12 (24), No. 1. — P. 83–88.

3. Freiling G. Inverse problems for Sturm-Liouville differential operators with a constant delay / G. Freiling, V.A. Yurko // Appl. Math. Lett. — 2012. — № 25. — P. 1999–2004.

4. Bondarenko N.P. An inverse problem for Sturm-Liouville differential operators with deviating argument / N.P. Bondarenko, V.A. Yurko // Appl. Math. Lett. — 2018 — Vol. 83. — P. 140–144.

5. Yurko V. An Inverse Spectral Problem for Second Order Differential Operators with Retarded Argument / V. Yurko // Results in Mathematics. — 2019. — Vol. 74(2). — P. 71.

ANALYTICAL STUDY OF A SYSTEM OF NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH WEAKLY SINGULAR KERNELS

S. Kamouche, M. Ghiat

(Guelma, Algeria, Université 8 Mai 1945)

soumia.kamouche@gmail.com, mourad.ghi24@gmail.com; ghiat.mourad@univ-guelma.dz

In this work, we are interested in the system of nonlinear integral equations of Volterra with weakly singular kernels of the form: $\forall t \in [a, b]$

$$(S)\begin{cases} u(t) &= \displaystyle\int_a^t p_1(t-s)K_1(t,s,u(s),v(s))ds + f_1(t), \\ v(t) &= \displaystyle\int_a^t p_2(t-s)K_2(t,s,u(s),v(s))ds + f_2(t), \end{cases}$$

where, $f_1,\ f_2 \in C^0([a,b]),\ K_1, K_2 \in C^0\left([a,b]^2 \times \mathbb{R}\right)$ and verify the lipschitz' condition in the following sense:

$$\begin{cases} \exists L_1, L_2, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t, s \in [a,b],\ \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}, \\ |K_1(t,s,x,y) - K_1(t,s,\tilde{x},\tilde{y})| \leqslant L_1 |x-\tilde{x}| + L_2 |y-\tilde{y}|, \\ |K_2(t,s,x,y) - K_2(t,s,\tilde{x},\tilde{y})| \leqslant \tilde{L}_1 |x-\tilde{x}| + \tilde{L}_2 |y-\tilde{y}|. \end{cases}$$

The weakly singularity comes from $p_1,\ p_2 \in L^1(0, b-a)$, who are supposed to verify :

$$\lim_{\tau\to 0} p_1(\tau) ds = +\infty, \lim_{\tau\to 0} p_2(\tau) ds = +\infty,$$

and $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \int_t^{t+\delta} |p_1(t+\delta-s)|\, ds = 0,\ \lim\limits_{\delta\to 0^+} \int_t^{t+\delta} |p_2(t+\delta-s)|\, ds = 0.$

Theorem. *Under the conditions presented below, the system (S) admits unique solution $(u,v) \in C^0([a,b]) \times C^0([a,b])$.*

References

1. Ghiat M. Etude analytique et numérique des équations intégro-différentielle de Volterra : Traitement des noyaux faiblement singuliers / M. Ghiat // Thèse en Mathématiques Appliquées, Université 8 Mai 1945 Guelma. — 2018.

SOLVING THIRD-ORDER DIFFERENCE EQUATIONS BY FACTORING

I.N. Parasidis, E. Providas
(Larissa, Greece, University of Thessaly)
paras@teilar.gr, providas@uth.gr

We investigate the solvability and find the exact solution of initial value problems for linear third-order difference equations with variable polynomial coefficients.

Denote by S the linear space of all real-valued functions (sequences) $u_k = u(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Let $A : S \to S$ be a third-order linear difference operator defined by

$$Au_k = u_{k+3} + a_k u_{k+2} + b_k u_{k+1} + c_k u_k,$$

where $a_k, b_k, c_k \in S$ and $c_k \neq 0$ for all $k \geqslant k_1$, usually $k_1 = 1$.

Lemma 1. *The difference operator A can be factorized to $A = A_2 A_1$ if there exist $p_k, q_k, g_k \in S$ such that*

$$\begin{gathered} Au_k = A_2 z_k, \\ A_2 z_k = z_{k+2} + p_k z_{k+1} + g_k z_k, \\ A_1 u_k = z_k = u_{k+1} + q_k u_k, \end{gathered}$$

and satisfy the equations

$$\begin{gathered} q_{k+2} + p_k = a_k, \\ g_k + p_k q_{k+1} = b_k, \\ q_k g_k = c_k. \end{gathered}$$

We consider the case where a_k, b_k, c_k are polynomials. Then the polynomials q_k, p_k, g_k can be constructed by means of the following theorem.

Theorem 1. *Let a_k, b_k, c_k be polynomials of degree $Deg\, a_k$, $Deg\, b_k$ and $Deg\, c_k$, respectively. Then, the third-order operator A is factorable to $A = A_2 A_1$ if $Deg\, b_k \leqslant Deg\, a_k + 4 Deg\, c_k$ and there exists a polynomial p_k of degree $Deg\, p_k = \frac{1}{2}(Deg\, a_k + Deg\, b_k - 2Deg\, c_k)$ or $\frac{1}{2}(Deg\, a_k + Deg\, b_k - 2Deg\, c_k) + 1 \dots$ or $Deg\, a_k + Deg\, c_k$, satisfying the equation*

$$(a_k - p_k)[b_{k+2} - p_{k+2}(a_{k+1} - p_{k+1})] = c_{k+2}.$$

Then the polynomial p_k can be constructed by the method of undetermined coefficients and thus

$$\begin{gathered} q_{k+2} = a_k - p_k, \\ g_k = b_k - p_k q_{k+1}. \end{gathered}$$

Lemma 2. *Let the linear difference operators $\widehat{A}, \widehat{A}_1, \widehat{A}_2$ be defined as follows*

$$\begin{gathered} \widehat{A} u_k = u_{k+3} + a_k u_{k+2} + b_k u_{k+1} + c_k u_k, \\ D(\widehat{A}) = \{u_k \in S :\ u_i = \beta_i,\ i = 1, 2, 3\}, \\ \widehat{A}_1 u_k = u_{k+1} + q_k u_k = z_k, \\ D(\widehat{A}_1) = \{u_k \in S :\ u_1 = \beta_1\}, \\ \widehat{A}_2 z_k = z_{k+2} + p_k z_{k+1} + g_k z_k, \\ D(\widehat{A}_2) = \{z_k \in S : z_1 = \delta_1,\ z_2 = \delta_2\}. \end{gathered}$$

Then, the operators $\widehat{A}, \widehat{A}_1, \widehat{A}_2$ are injective and $D(\widehat{A}) = D(\widehat{A}_2 \widehat{A}_1)$ if $\delta_1 = \beta_2 + q_1 \beta_1,\ \delta_2 = \beta_3 + q_2 \beta_2$.

Theorem 2. *Suppose Theorem 1 and Lemma 2 hold true. Then:*
(i) The operator $\widehat{A}$ can be decomposed to $\widehat{A} = \widehat{A}_2\widehat{A}_1$.
(ii) The unique solution to the boundary value problem $\widehat{A}u_k = f_k$ is acquired by solving the two difference equations $\widehat{A}_2 z_k = f_k$ and $\widehat{A}_1 u_k = z_k^*$ and is given in closed-form by the formula

$$u_k = \widehat{A}^{-1} f_k = \widehat{A}_1^{-1} z_k^* = \widehat{A}_1^{-1}\widehat{A}_2^{-1} f_k,$$

where $z_k^* = \widehat{A}_2^{-1} f_k$.

Example The operator $\widehat{A} : S \to S$ defined by

$$\begin{gathered} \widehat{A}u_k = u_{k+3} - (k-1)u_{k+2} - (3k+7)u_{k+1} + 4ku_k, \\ D(\widehat{A}) = \{u_k \in S : u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3\} \end{gathered}$$

is injective and the unique solution to the problem $\widehat{A}u_k = 2^k$ can be obtained in closed-form by the factorization method presented.

Note that $a_k = -k+1,\ b_k = -3k-7,\ c_k = 4k,\ f_k = 2^k$. The operator $\widehat{A}$ is a restriction of the operator

$$Au_k = u_{k+3} - (k-1)u_{k+2} - (3k+7)u_{k+1} + 4ku_k,$$

which can be decomposed to $A = A_2A_1$ where by Theorem 1 and Lemma 1 we get

$$A_1u_k = u_{k+1} - ku_k = z_k, \quad A_2z_k = z_{k+2} + 3z_{k+1} - 4z_k,$$

where $q_k = -k$, $p_k = 3$, $g_k = -4$. By Theorem 2, we obtain the decomposition $\widehat{A}u_k = \widehat{A}_2\widehat{A}_1u_k$, where

$$\begin{gathered} \widehat{A}_1u_k = u_{k+1} - ku_k, \\ D(\widehat{A}_1) = \{u_k \in S : u_1 = 1\}, \\ \widehat{A}_2z_k = z_{k+2} + 3z_{k+1} - 4z_k, \\ D(\widehat{A}_2) = \{z_k \in S : z_1 = 1,\ z_2 = -1\}, \end{gathered}$$

$z_k = u_{k+1} - ku_k$, since $\beta_2 + q_1\beta_1 = 1, \quad \beta_3 + q_2\beta_2 = -1$. It is easy to verify that the problem $\widehat{A}_2z_k = f_k$ admits the unique solution

$$z_k^* = \widehat{A}_2^{-1}2^k = \tfrac{1}{5} + \tfrac{7}{15}(-4)^{k-1} + \tfrac{1}{3}2^{k-1}.$$

The solution of the problem $\widehat{A}_1u_k = z_k^*$, is obtained easily by using standard formulas in the literature and hence from Theorem 2, we obtain

$$u_k = \left[1 + \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\left(\frac{1}{5} + \frac{7}{15}(-4)^{j-1} + \frac{2^{j-1}}{3}\right)\right](k-1)!\,.$$

References

1. Voevodin A.F. Factorization method for linear and quasilinear singularly perturbed boundary value problems for ordinary differential equations / A.F. Voevodin // Numer. Analys. Appl. — 2009. — Vol. 2, No. 1. — P. 1–12.

2. Dobrogowska A. Factorization method applied to the second order difference equations / A. Dobrogowska, G. Jakimowicz // Appl. Math. Lett. — 2017. — V. 74. — P. 161–166.

3. Parasidis I.N. Factorization method for the second order linear nonlocal difference equations / I.N. Parasidis, E. Providas // International Conference Polynomial Computer Algebra, Saint-Petersburg, Russia, Euler International Mathematical Institute, April 16–22, 2018. — P. 84–88.

INVERSE MEDIUM PROBLEM FOR SINGULAR CONTRAST

V.S. Serov (Oulu, Finland, University of Oulu)
valserov@gmail.com

It is well known (see, for example, [1]) that the propagation of time harmonic acoustic waves (with frequency ω) of small amplitude in a slowly varying inhomogeneous medium can be governed by the following steady-state Helmholtz equation

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} u(x) = 0, \quad x \in R^n, \quad n = 2, 3,$$

where $u(x)$ denotes the corresponding amplitude in two or three dimensions, Δ is the multidimensional Laplacian and $c^2(x)$ is the speed of sound. The wave motion is caused by an incident wave u_0 satisfying the unperturbed linearised equation being scattered by the inhomogeneous medium. Assuming the inhomogeneous region is contained inside a bounded domain $\Omega \subset R^n$, i.e., $c(x) = c_0 =$ constant for $x \in R^n \setminus \Omega$, we can see that the scattering problem under consideration is now modelled by

$$-\Delta u(x) - k_0^2 u(x) = k_0^2 m(x) u(x),$$

where $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ is a fixed wave number, $m(x) = \frac{c_0^2}{c^2(x)} - 1 := n(x) - 1$ is a perturbation of the refractive index $n(x)$ and

$$u(x) = u_0(x) + u(x), \quad u_0(x) = e^{ik_0(x,\theta)}, \quad \theta \in S^{n-1},$$

where the scattered field u is required to satisfy the Sommerfeld radiation condition at the infinity

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial r} - ik_0 u(x) \right) = 0, \quad r = |x|.$$

We allow for m to be complex-valued in order to include the possibility that the medium is absorbing. The main practical example (it can be considered as the motivation of this research) concerns to refractive index with an imaginary component. As described in [1], this is often modelled in the literature by adding a term that is proportional to velocity in Euler's equation which implies that $n(x)$ is now of the form

$$n(x) = n_1(x) + i\frac{n_2(x)}{k_0} =: 1 + m(x),$$

such that m has compact support in some bounded domain Ω. It is assumed (for uniqueness purposes of the corresponding boundary value problem) that $0 < n_1 \leqslant 1, n_2(x) \geqslant 0$, that is, $-1 < \mathrm{Re}(m) \leqslant 0$ and $\mathrm{Im}(m) \geqslant 0$.

The scattering solutions are the unique solutions of the Lippmann-Schwinger equation

$$u(x) = u_0(x) + k_0^2 \int\limits_{R^n} G_{k_0}^{+}(|x-y|)m(y)u(y)\,\d{y},$$

where $G_{k_0}^{+}$ is the outgoing fundamental solution of the operator $(-\Delta - k_0^2)$ in R^n, i.e., the kernel of the integral operator $(-\Delta - k_0^2 - i0)^{-1}$.

Our basic assumption for refractive index m is that it is a complex-valued function which belongs to $L^2(\Omega)$ (physically, only imaginary part of m can have some infinite singularities from L^2 whereas the real part of m can only have jump singularities). In this case, for any fixed $k_0 > 0$, there is a unique solution u of the above mentioned form such that

$$\|u_{sc}\|_{L^s(R^n)} < \infty$$

for some s depending on the dimension n. More precisely, using the parametrisation $v = |m|^{\frac{1}{2}} u$ we may rewrite (4) as

$$v(x) = v_0(x) + k_0^2 \int\limits_{\Omega} K(x, y) m(y) v(y) \underset{\cdot}{\mathrm{y}},$$

where $v_0 = |m|^{\frac{1}{2}} u_0$ and $K(x, y) = |m(x)|^{\frac{1}{2}} G^{+}_{k_0}(|x - y|) m_{\frac{1}{2}}(y)$ with $m_{\frac{1}{2}} = \mathrm{sign}(m)|m|^{\frac{1}{2}}$. Since the integral operator with kernel $K(x, y)$ is compact in $L^2(\Omega)$ (see, for example, [2], Chapter 23) we may apply the Riesz theory to prove the existence and uniqueness of the solution u. These solutions u_{sc} belong to $L^s(R^n)$ with $s = 4$ if $n = 3$ and with $s = 6$ if $n = 2$ (see [2], Chapter 23). Even more is true, these solutions u belong to $W^2_{p,\mathrm{loc}}(R^n)$ with $p = \frac{4}{3}$ if $n = 3$ and with $p = \frac{3}{2}$ if $n = 2$ (see, for example, [2], Chapter 23).

These properties allow us to conclude that the solution $u(x, k_0, \theta)$ for fixed $k_0 > 0$ admits asymptotically as $|x| \to \infty$ uniformly with respect to θ the representation

$$u(x, k_0, \theta) = e^{ik_0(x,\theta)} + C_n \frac{e^{ik_0|x|} k_0^{\frac{n-3}{2}}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} A(k_0, \theta', \theta) + O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}\right),$$

where $\theta' := \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$, C_n is a known constant depending only on the dimension n, and the function $A(k_0, \theta', \theta)$ is called the scattering amplitude and is defined by

$$A(k_0, \theta', \theta) := k_0^2 \int\limits_{\Omega} e^{-ik_0(\theta', y)} m(y) u(y, k_0, \theta) \underset{\cdot}{\mathrm{y}}.$$

In this work we consider an inverse problem of reconstruction of unknown function m from the knowledge of the scattering amplitudes $A(k_0, \theta', \theta)$ for all $\theta', \theta \in S^{n-1}$. We note that these results work also in the more limited (and important) case of backscattering data $\theta' = -\theta$.

The following theorems hold.

Theorem 1. $[n = 3]$ *Suppose that $m_1(x), m_2(x) \in L^2(\Omega)$ and the corresponding scattering amplitudes are equal to each other*

$$A_1(k_0, \theta', \theta) = A_2(k_0, \theta', \theta)$$

for fixed $k_0 > 0$ and for all $\theta', \theta \in \mathbb{S}^2$. Then

$$m_1(x) = m_2(x)$$

a.e. in Ω.

Theorem 2. $[n = 2]$ *Suppose that* $m_1, m_2 \in L^2(\Omega)$ *and the corresponding scattering amplitudes are equal to each other*

$$A_1(k_0, \theta', \theta) = A_2(k_0, \theta', \theta)$$

for fixed $k_0 > 0$ *and for all* $\theta', \theta \in \mathbb{S}^1$. *Then*

$$m_1(x) = m_2(x) \qquad (\mathrm{mod}\ H^t_{\mathrm{loc}}(R^2))$$

for $t < 1$.

Corollary *Suppose all conditions of Theorem 2 are satisfied. If the contrasts* m_1 *and* m_2 *contain jumps over some smooth curves, then these curves and the height functions of the jumps are the same for both contrasts* m_1 *and* m_2.

The inverse medium problem (with fixed wavenumber) is very similar to the fixed energy problem for the Schrödinger operator. In dimensions higher than two it is well known that the scattering amplitude for a fixed positive energy uniquely determines a compactly supported potential. Recently Bukhgeim [3] proved the uniqueness result in two-dimensional fixed energy problem for a bounded potential with compact support from W^1_p, $p > 2$, and then Lakshtanov and Vainberg [4] proved the uniqueness result for a singular potential from L^p, $p > 2$. It should be noted that the reconstruction of singularities in two-dimensional case for Schrödinger operator (using the Born approximation) is known much earlier. Numerically, in case of the Helmholtz operator one has to take into account the size of k_0 (this is not needed with Schrödinger operator).

Литература

1. Colton D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 3rd edition / D. Colton, R. Kress. — New York : Springer, 2013. — 405 p.

2. Serov V. Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics / V. Serov. — New York : Springer, 2017. — 534 p.

3. Bukhgeim A.L. Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case / A.L. Bukhgeim // Inverse and Ill-Posed Problems. — 2008. — V. 16. — P. 19–33.

4. Lakshtanov E. Recovery of L^p−potential in the plane / E. Lakshtanov, B. Vainberg // Inverse and Ill-Posed Problems. — 2017. — V. 25. — P. 633–651.

SLOW-FAST DECOMPOSITION OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH DISTRIBUTED DELAYS[1]

O.B. Tsekhan (Grodno, YaKSUG)
tsekhan@grsu.by

Consider the singularly perturbed linear time-invariant system with delays in the slow state variables (SPLTISD):

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} \mathcal{A}_1(\xi)x(t+\xi)d\xi + A_2 y(t) + B_1 u(t),\ x \in R^{n_1},\ y \in R^{n_2},$$
$$\mu\dot{y}(t) = \int_{-h}^{0} \mathcal{A}_3(\xi)x(t+\xi)d\xi + A_4 y(t) + B_2 u(t),\ u \in R^{r},\ t \geqslant 0,$$
$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0), x_0 \in R^{n_1},\ y_0 \in R^{n_2}.$$

Here u is a control, $u(t) \in U$, U is a set of piecewise continuous for $t \geqslant 0$ vector functions, μ is a small parameter, $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1$, $A_i(\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$, $i = 1, 3$, are matrix functions of bounded variations on $[-h, 0]$, A_2, A_4, B_1, B_2 are constant matrices of appropriate sizes, $\det A_4 \neq 0$, $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0)$, is a piecewise continuous n_1-vector-function.

The generalization of nondegenerate Chang's type transformation [1] was constructed for the SPLTISD, that splits the original system with fast and slow variables into two independent subsystems — slow and fast ones. Two parameter-free systems are obtained: degenerate system — the linear stationary n_1- system with distributed delays, and boundary layer system — linear stationary n_2-system without delay. They are $O(\mu)-$close to the decoupled slow and fast subsystems. The decomposition allows us to study properties of the original SPLTISD via analogous properties of two independent on small parameter subsystems of lower dimensions, than the original SPLTISD.

References

1. Tsekhan O.B. Decoupling transformation for linear stationary singularly perturbed system with delay and its applications to analysis and control of spectrum / O.B. Tsekhan // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control. — 2017. — V. 7, no. 1. — P. 50–61.

[1] The work is partially supported by the Education Ministry of the Republic of Belarus, the state program of scientific research Convergence-2020, code of task 1.3.02.

AN INVERSE PROBLEM FOR STURM-LIOUVILLE TYPE DIFFERENTIAL EQUATION WITH TWO CONSTANT DELAYS[1]

B. Vojvodic*, M. Pikula**

(*Banja Luka, University of Banja Luka,
**East Sarajevo, University of East Sarajevo,
Bosnia and Herzegovina)
b.vojvodic@heaars.com

Paper deals with non-self-adjoint second-order differential operators with two constant delays. We consider the boundary value problems $D_{(1,k)}$

$$-y''(x) + q_1(x)y(x - \tau_1) + q_2(x)y(x - \tau_2) = \lambda y(x), x \in [0, \pi]$$
$$y'(0) - hy(0) = 0, y'(\pi) + H_k y(\pi) = 0,$$

and the boundary value problems $D_{(2,k)}$ with a sign minus in front of the q_2 in differential equation, under the same boundary conditions, $k = 1, 2$. We assume that $\pi/3 \leqslant \tau_2 < \pi/2$, $\tau_1 = 2\tau_2$, $h, H_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $q_i(x)$ are real-valued function such that $q_i \in L_2[\tau_i, \pi]$ and $q_i(x) = 0$, $x \in [0, \tau_i)$, $i = 1, 2$ and λ is a spectral parameter. The inverse spectral problem of recovering operators from their spectra has been studied. We prove that a delay τ_2 and parameters h, H_1, H_2 are uniquely determined from the spectra. Then we prove that potentials are uniquely determined by Volterra linear integral equations.

References

1. Pikula M. Inverse Spectral Problems for Sturm–Liouville Operators with a Constant Delay Less than Half the Length of the Interval and Robin Boundary Conditions / M. Pikula, V. Vladicic, B. Vojvodic // Results Math. — 2019.

2. Vladicic V. An inverse problems for Sturm-Liouville-type differential equation with a constant delay / V. Vladicic, M. Pikula // Sarajevo Journal of mathematics. — 2016. — Vol. 12 (24), № 1. — P. 83–88.

3. Shahriari M. Inverse problem for Sturm-Liouville differential operators with two constant delays / M. Shahriari // J. Turk Math. — 2019. — № 43(2). — P. 965–976.

---

[1] Research supported by Ministry for Scientific and Technological Development, Higher Education and Information Society Government of the Republic of Srpska

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПОД ЗНАКОМ ЛАПЛАСИАНА[1]

А.И. Аристов (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
ai_aristov@mail.ru

Работа посвящена построению точных решений уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u - u\right) + \Delta u + div(u \nabla u) = 0.$$

Оно может использоваться для моделирования нестационарных процессов в полупроводниковой среде [1].

Качественным свойствам решений нелинейных уравнений со смешанными производными по времени и по пространственным переменным высоких порядков посвящены обширные исследования (например, [1]), но в литературе о точных решениях такие уравнения встречаются редко.

В данном исследовании построено 10 классов точных решений названного уравнения. Использованы метод бегущей волны, метод обобщенного разделения переменных, поиск решений специального вида [2]. Некоторые вычисления были автоматизированы с помощью системы компьютерной математики Maple.

Показано, что среди построенных решений есть как обращающиеся в бесконечность на конечных промежутках времени (разрушающиеся) решения названного уравнения, так и ограниченные глобально по времени.

Литература

1. Свешников А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.

2. Полянин А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. — М. : Физматлит, 2005. — 256 с.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук (проект № МК-1829.2018.1).

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Е.М. Аристова (Воронеж, ВГУ)
pmim@yandex.ru

В работе рассматриваются некоторые подходы к решению задач линейной многокритериальной оптимизации: метод последовательных уступок, принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению, метод, учитывающий коэффициенты важности целевых функций и метод, построенный на основе введения меры конфликта между целевыми критериями.

Во многих реальных экономических задачах критериев, которые оптимизируются, может быть несколько. Например, при производстве продукции максимизируется качество и минимизируется себестоимость, при взятии ссуды в банке максимизируется кредитный срок и минимизируется процентная ставка и т.д.

В статье указанные выше подходы используются для решения задачи о разработке плана организации производства при выпуске нового продукта.

Литература

1. Аристова Е.М. Учет взаимодействия между целевыми функциями и их агрегирование в задачах оптимизации : дис. . . . канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 / Е.М. Аристова // Воронежский государственный университет. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2012. — 152 с.

2. Мелькумова Е.М. О некоторых подходах к решению многокритериальных задач / Е.М. Аристова // Вестник ВГТУ. — 2011. — Т. 7, № 7. — С. 122–127.

3. Мелькумова Е.М. Решение задачи многокритериальной оптимизации с помощью учета коэффициентов важности целевых функций / Е.М. Аристова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов международной конференции. — Воронеж : Издательство ВГУ, 2011. — С. 265–269.

4. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде / В.Д. Ногин. — М. : Физматлит, 2002. — 175 с.

5. Петровский А.Б. Теория принятия решений / А.Б. Петровский. — М. : Академия, 2009. — 399 с.

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В ТЕРМИНАХ ВРЕМЕНИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Р.В. Арутюнян (Москва, МГТУ имени Н. Э. Баумана)
rob57@mail.ru

Моделирование теплопереноса с фазовыми превращениями является практически важной задачей. Соответствующая краевая задача (КЗ) называется задачей Стефана и в терминах сосредоточенной теплоемкости имеет вид [1-3]:

$$\rho[c + r_{melt}\delta(u - u_f)]\partial u/\partial t = div(\lambda\nabla u) + f(M,t), M \in V, t > 0,$$

$$\lambda\partial u/\partial n + \kappa u = q, M \in S, u(M,0) = u_0(M), |u(M,t)| < const < \infty,$$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, V — область m-мерного евклидового пространства E^m, не имеющая разрезов, с кусочно-гладкой границей $S = \partial V$, u — функция, описывающая нестационарное температурное поле при наличии фазовых превращений на поверхности S_f, u_f — температура фазового перехода.

Функции $\rho(M), c(M), \lambda(M), f(M,t), r_{melt}(M)$,$\kappa(M)$ будем считать таковыми, что существует классическое решение КЗ $u(M,t)$ и классическое решение КЗ при $r_{melt} = 0$, которое обозначим $H(M,t)$. Согласно [1] это будет выполнено, например, если $\rho(M), c(M), \lambda(M), f(M,t), r_{melt}(M), \kappa(M)$ будут положительными константами, $f \in L_2(V), q \in L_2(S), u_0(M) \in C^1(V)$. Пусть $0 < t < \vartheta$ — интервал времени, на котором происходит расширение области плавления. Введем в рассмотрение функцию $t_f(M)$, являющуюся наименьшим корнем уравнения $u(M, t_f(M)+0) = u_f+0, M \in V+S$. В точках $M \in V + S$, где такого решения не существует, положим значение $t_f(M)$ бесконечным. Функция $t_f(M)$ имеет смысл времени фазового превращения вещества в точке M (в рассматриваемом случае из твердого в жидкое).

Редукция КЗ к интегральному уравнению минимальной размерности в терминах времени фазового перехода осуществлена в работе автора [3]. Пусть $G(M,N,t)$ — функция Грина линейной КЗ, получающейся из исходной КЗ при $r_{melt} = 0$. Тогда нелинейное интегральное уравнение Фредгольма 2 рода относительно функции $t_f(M)$ имеет вид:

$$\int_V \rho(N) r_{melt}(N) G(M,N,t_f(M) - t_f(N)) 1(t_f(M) - t_f(N)) dV_N =$$

$$H(M, t_f(M)) - u_f, M \in V + S.$$

Описанная параметризация в терминах $t_f(M)$ является эффективным вычислительным приемом, позволяющим значительно упростить метод решения.

Автором доказаны утверждения о существовании и единственности решения данного интегрального уравнения, а также разработан и обоснован метод численного решения нелинейного интегрального уравнения — метод ячеек.

Литература

1. Данилюк И.И. О задаче Стефана / И.И. Данилюк // УМН. — 1985. — Т. 40, вып. 5 (245). — С. 133–185.

2. Лыков А.В. Тепломассообмен / А.В. Лыков. — М. : Энергия, 1971. — 560 с.

3. Арутюнян Р.В. Интегральные уравнения задачи Стефана и их применение в задачах оттаивания грунтов посредством СВЧ-нагрева / Р.В. Арутюнян // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2016. — № 1 (543). — С. 27–32.

ДВУСТОРОННИЙ МЕТОД РАСЧЕТА МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Т.Р. Арутюнян (Москва, МТУСИ)

tigran_201094@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу (КЗ) для расчета двумерного магнитостатического поля. Магнитная проницаемость ферромагнетика много выше μ_0. В воздухе решается уравнение для магнитного потенциала при нулевом краевом условии на границе ферромагнетика и заданных источниках поля [1]: $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}_{tp} - \nabla v$, $\overrightarrow{H}_{tp} = -\nabla v_{tp}$,

$$\Delta v = 0, (x, y) \in C\overline{D}; v = -v_{tp}, (x, y) \in \Gamma = \partial D.$$

В ферромагнетике $\overrightarrow{H} = -\nabla u$, решается КЗ 2-го типа для потенциала при заданной нормальной плотности магнитного потока:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(H)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(H)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,\ x \in D,$$

$$\mu(H)\frac{\partial u}{\partial n} = \mu_0(H)\frac{\partial v}{\partial n} = 0,\ x \in \Gamma; \quad u(0,0) = 0.$$

КЗ решается с учетом погрешности кривой намагничивания:

$$\mu = \mu(H) \in (\mu^-(H), \mu^+(H)); w_0 = \mu^+(H) - \mu^-(H),$$

$$u(x_0, y_0) \to min(\mu(H) \in (\mu^-, \mu^+). \quad (1)$$

Для решения КЗ согласно методу множителей Лагранжа вычисляется вариация по функции u и находится уравнение экстремалей данного функционала [2,3]. Соответствующие нижней (верхней) оценке решения значения находятся из условия экстремума функционала Лагранжа: $L \to min(max)$, для всех $\mu(\|\nabla u\|)$ из допустимого множества (1). Экстремальное значение достигается, если магнитная характеристика описывается выражением $\mu^* = \mu^0(\|\nabla u\|)(1 \pm 0.5 w_0 sign(\nabla u \nabla p))$. Сопряженное уравнение имеет вид $\forall (x, y) \in D$:

$$div\left(\mu^*(\|\nabla u\|)\nabla p + H^{-1}\frac{d\mu^*}{dH}(\nabla u \nabla p)\nabla u\right) + \delta(x - x_0, y - y_0) - \delta(x, y) = 0.$$

Если требуется оценить не равномерную, а среднеквадратическую погрешность, например, $\|u - u^0\|_{L_2(D)} \to min(max)$, то сопряженное уравнение имеет вид:

$$div\left(\mu^*(\|\nabla u\|)\nabla p + H^{-1}\frac{d\mu^*}{dH}(\nabla u \nabla p)\nabla u\right) + C_0(u - u^0) = 0.$$

КЗ решается итерационно (вначале решаются основные уравнения поля, далее краевая задача для сопряженного уравнения и далее попеременно). Итерации оканчиваются, если имеет место совпадение требуемого количества знаков в числовых значениях приближений.

Литература

1. Блох Ю.И. Теоретические основы комплексной магниторазведки / Ю.И. Блох. — М. : МГГА, 2012. — 160 с.

2. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1978. — 832 с.

3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. — М. : Наука, 1988. — 552 с.

О СВОЙСТВАХ МИНИМИЗИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ТОЧЕЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И.В. Асташова, Д.А. Лашин, А.В. Филиновский
(Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова,
РЭУ им. Г.В.Плеханова; ООО «ФИТО»;
МГТУ им. Н.Э.Баумана, МГУ им. М.В.Ломоносова)
ast.diffiety@gmail.com, dalashin@gmail.com, flnv@yandex.ru

Рассмотрим смешанную задачу для параболического уравнения с конвективным слагаемым

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x, \quad (x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1. \tag{3}$$

Функции a и b будем полагать достаточно гладкими, в Q_T считаем выполненным условие равномерной эллиптичности $0 < a_0 \leqslant a(x,t) \leqslant a_1 < \infty$. Предполагаем, что $\varphi, \psi \in W_2^1(0,T)$, $\xi \in L_2(0,1)$. В дальнейшем φ будет управляющей функцией, функции ξ и ψ — фиксированными. Интересующая нас задача управления — это задача с «точечным наблюдением» (в терминологии [1]). Качество управления будем оценивать функционалом

$$J[z,\varphi] = \int_0^T (u_\varphi(c,t) - z(t))^2 dt, \tag{4}$$

где $c \in (0,1)$, при этом $u_\varphi \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение задачи (1)–(3) с данной управляющей функцией φ. Следуя ([4], [10] (с. 25–26)), обозначаем через $V_2^{1,0}(Q_T)$ банахово пространство таких функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

что отображение $t \mapsto u(\cdot,t)$, $[0,T] \to L_2(0,1)$ непрерывно. Эта норма естественным образом соответствует уравнению энергетического баланса смешанной задачи для параболического уравнения ([10], гл. 3, формула (2.22)). Данная задача возникает в модели управлении климатом в промышленных теплицах (см. [3]). Настоящая работа развивает и обобщает результаты работ [3–6]. При получении результатов использовались методы исследования, содержащиеся в [2]. Отметим, что другие задачи управления, связанные с параболическими задачами, рассматривались в [4–7].

Пусть $z \in L_2(0,T)$. Будем рассматривать ограниченное замкнутое выпуклое множество управлений $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ и множество целевых функций $Z \subset L_2(0,T)$.

Введем обозначение: $m[z,\Phi] = \inf\limits_{\varphi\in\Phi} J[z,\varphi]$.

Определение 1. *Будем говорить, что задача (1)–(4) является точно управляемой из множества Φ во множество Z, если для любого $z \in Z$ существует управляющая функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой $J[z,\varphi_0] = 0$.*

Определение 2. *Точным управлением будем называть функцию $\varphi_0 \in W_2^1(0,T)$, обеспечивающую обращение в нуль функционала качества (4).*

Определение 3. *Будем говорить, что задача (1)–(4) является плотно управляемой из множества Φ во множество Z, если для всех $z \in Z$ выполнено равенство $m[z,\Phi] = 0$.*

В последующих рассмотрениях, связанных с получением необходимого условия оптимальности управляющей функции, будем рассматривать также сопряженную к (1)–(4) задачу для обратно параболического уравнения

$$p_t + (a(x,t)p_x)_x - (b(x,t)p)_x = \delta(x-c)\otimes\left(u_\varphi(c,t) - z(t)\right), \qquad (5)$$

$$(x,t) \in Q_T, \quad p \in V_2^{1,0}(Q_T),$$

$$p(0,t) = 0, \quad a(1,t)p_x(1,t) - b(1,t)p(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \qquad (6)$$

$$p(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad (7)$$

где u_φ — решение задачи (1)– (3).

Теорема 1. *Существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой*

$$m[z,\Phi] = J[z,\varphi_0].$$

Исследуем свойства минимизирующей функции φ_0 как элемента множества Φ.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты a и b в (1) не зависят от t и $m[z,\Phi] > 0$. Тогда $\varphi_0 \in \partial\Phi$.*

Теорема 3. *Пусть коэффициенты a и b в (1) не зависят от t и Φ_j, $j = 1, 2$ — такие ограниченные выпуклые замкнутые множества в $W_2^1(0,T)$, что $\Phi_2 \subset \mathrm{Int}\Phi_1$ и $m[z,\Phi_1] > 0$. Тогда*

$$m[z,\Phi_1] < m[z,\Phi_2].$$

Теорема 4. *Множество Z всех функций $z \in L_2(0,T)$, допускающих точную управляемость, то есть таких, что $J[z,\varphi] = 0$ для всех $\varphi \in W_2^1(0,T)$, является множеством первой категории Бэра в $L_2(0,T)$.*

Теорема 5. *Пусть коэффициенты a и b в (1) не зависят от t. Тогда для любой $z \in L_2(0,T)$ справедливо равенство*

$$m[z, W_2^1(0,T)] = 0.$$

Теорема 6. *Пусть $\varphi_0 \in \Phi$ — минимизирующая функция. Тогда для любой управляющей функции $\varphi \in \Phi$ выполнено следующее неравенство:*

$$\int_0^T \left(u_{\varphi_0}(c,t) - z(t)\right)\left(u_\varphi(c,t) - u_{\varphi_0}(c,t)\right) dt \geqslant 0.$$

Теорема 7. *Пусть $\varphi_0 \in \Phi$ — минимизирующая функция. Тогда для всех управляющих функций $\varphi \in \Phi$ справедливо следующее неравенство:*

$$\int_0^T a(0,t)p_x(0,t)\left(\varphi(t) - \varphi_0(t)\right) dt \leqslant 0,$$

где p — решение задачи (5)–(7).

Литература

1. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. — М. : Мир, 1972.

2. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа // Научное издание под ред. И.В. Асташовой. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012.

3. Astashova I.V. On maintaining optimal temperatures in greenhouses /I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy, D.A. Lashin // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. — 2016. — V. 15. — P. 198–204.

4. Astashova I. On a model of maintaining the optimal temperature in greenhouse / I. Astashova, A. Filinovskiy, D. Lashin // Funct. Differ. Equ. — 2016. — V. 23 — № 3–4. — P. 97–108.

5. Astashova I. On optimal temperature control in hothouses / I. Astashova, A. Filinovskiy, D. Lashin // Th. Simos, Ch. Tsitouras (eds.) Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2016) (19–25 September 2016, Rhodes, Greece), AIP Conf. Proc. — 2017. — V. 1863. — P. 4–8.

6. Astashova I.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy // Tatr. Mt. Math. Publ. — 2018. — V.71. — P. 9–25.

7. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations / F. Troltzsch // Theory, Methods and Applications, Graduate Studies in Mathematics, **112**, AMS, Providence, 2010.

8. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems / K.A. Lurie. — Berlin : Springer, 2013.

9. Farag M.H. Existence and uniqueness solution of a class of quasilinear parabolic boundary control problem / M.H. Farag, T.A. Talaat, E.M. -Kamal // Cubo. — 2013. — V.15. — P. 111–119.

10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — Москва : Физматлит, 1973.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХ-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

И.В. Асташова, Д.А. Соколов (Москва,
МГУ им. М.В. Ломоносова, РЭУ им. Г.В. Плеханова)
ast.diffiety@gmail.com, dmtry@nxt.ru

Рассматривается вопрос о существовании периодических решений нелинейной спектральной задачи

$$y^{\mathrm{IV}} - |y|^{\alpha}\operatorname{sgn} y = \lambda y, \quad \int\limits_0^1 |y(s)|^{\alpha+1}\, ds = r \qquad (1)$$

со спектральным параметром λ, где параметры $r \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 1$ фиксированы.

При оценке первого собственного значения различных спектральных задач для уравнений высших порядков (в том числе и нелинейных), а также задачи Штурма–Лиувилля с интегральными условиями на потенциал, возникает вопрос о существовании решений с заданными свойствами некоторых нелинейных задач со спектральным параметром. Примеры таких задач для уравнения 2-го порядка изучены Ю.В.Егоровым, В.А. Кондратьевым [1, теорема 23; 2], С.С.Ежак, Е.С.Карулиной, М.Ю.Тельновой [3, леммы 1.1, 2.1 и теорема 3.5]. Задачи для уравнения 4-го порядка, примером которых может служить задача Лагранжа об устойчивости колонны [4], рассматриваются, например, в работе [2, §6.3]. Некоторые другие задачи рассмотрены в работе [5]. О существовании периодических решений нелинейных уравнений четвёртого порядка см. также [6], а о существовании квазипериодических решений – [7].

Теорема 1. *Для любых* $\alpha > 1$ *и* $r > 0$ *существует* λ, *для которого задача (1) имеет ненулевое* 1*-периодическое решение* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Для любого* $\alpha > 1$ *существует* $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ *такое, что для каждого* $r \in (0, r_0]$ *найдётся* λ, *для которого задача (1) имеет периодическое решение* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *с наименьшим положительным периодом, равным единице.*

В доказательствах теоремы 1 и её усиленной формулировки, теоремы 2, используется следующая

Теорема 3. *Для любого* $\beta > 0$ *существует* $R_0 = R_0(\beta) > 0$ *такое, что для каждого* $R \in (0, R_0]$ *найдутся* $X > 0$ *и* $u\colon [0, X] \to \mathbb{R}$, *для которых выполняются условия:*

$$u'(0) = u'''(0) = 0, \quad u(X) = u''(X) = 0, \quad u^{\mathrm{IV}} = (|u|^{\beta} + 1)u,$$

$$X^{3+8/\beta} \int\limits_0^X |u(s)|^{\beta+2}\, ds = R.$$

Литература

1. Егоров Ю.В. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля / Ю.В. Егоров, В.А. Кондратьев // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51, вып. 3 (309). — С. 73–144.

2. Egorov Yu.V. On Spectral theory of elliptic operators / Yu.V. Egorov, V.A. Kondratiev // Operator theory : Advances and Applications. — 1996. — V. 89. — P. 1–325.

3. Ежак С.С. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал /

С.С. Ежак, Е.С. Карулина, М.Ю. Тельнова // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И.В. Асташовой. — 2012. — С. 22–290.

4. Lagrange J.-L. Sur la figure des colonnes / J.-L. Lagrange // Ouvres de Lagrange Publ. de M.J.-A. Serret. — Paris, 1868. — V. 2. — P. 125–170.

5. Zhang M. Three systems of two-degree-of-freedom from eigenvalue problem / M. Zhang. — April 2014. DOI: 10.13140/RG.2.2.11192.80644. — Режим доступа : https://www.researchgate.net/publication/327136319_Three_systems_of_two-degree-of-freedom_from_eigenvalue_problems.

6. Асташова И.В. Асимптотическая классификация решений сингулярных уравнений типа Эмдена–Фаулера четвертого порядка с постоянным отрицательным потенциалом / И.В. Асташова // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. — 2016. — Т. 31. — С. 3–21.

7. Асташова И.В О существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнений типа Эмдена–Фаулера высокого порядка/ И.В. Асташова // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 6. — С. 847–848.

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА[1]

С.Н. Асхабов, А.Л. Джабраилов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ)
askhabov@yandex.ru

Пусть $\rho(x)$ есть неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая на $[0,1]$ функция. Обозначим через $L^p_{01}(\rho)$, $p \geqslant 1$, множество всех измеримых на $[0,1]$ функций $u(x)$ с конечной нормой $\|u\|_{p,1} = \left(\int_0^1 \rho(x)\cdot|u(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Известно (см., например, [1]), что $L^p_{01}(\rho)$ при $1 < p < \infty$ есть *строго выпуклое рефлексивное банахово* пространство и *сопряженным* с ним является пространство $L^{p'}_{01}(\rho^{1-p'})$, где $p' = p/(p-1)$. Если $\rho(x) = 1$, то будем писать L^p_{01} и $\|\cdot\|_p$. Норму в $L^{p'}_{01}(\rho^{1-p'})$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{p',1-p'}$. Скажем, что $\varphi(x) \in \Omega^1_{01}$, если $\varphi(x)$ непрерывная невозрастающая выпуклая вниз в $(0,1]$ функция такая, что $\int_0^1 \varphi(x)dx \geqslant 0$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001).

Теорема 1. *Пусть* $p \geqslant 4$ *— четное число,* $\varphi \in \Omega_{01}^1$ *и выполнено условие:* $\int_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)}\,dx < \infty$. *Тогда* $\forall f(x) \in L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ *уравнение*

$$\rho(x) \cdot u^{p-1}(x) + \int_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{01}^p(\rho)$. *Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_{n+1} = u_n - \mu_n \|Bu_n - f\|_{p',\,1-p'}^{2-p'} \varrho^{1-p'} |Bu_n - f|^{p'-2}(Bu_n - f),$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ $u_0(x) \in L_{01}^p(\rho)$ *— начальное приближение,* $\mu_n = \min(1, \delta_n)$, $Bu = \varrho \cdot u^{p-1} + P_{01}^{\varphi} u$,

$$\delta_n = \frac{2}{\varepsilon + (p-1)\Big(\|u_n\|_{p,\,1} + \|Bu_n - f\|_{p',\,1-p'}\Big)^{p-2} + 2\,c^2(\varrho)\|\varphi\|_1},$$

$\varepsilon > 0$ *— любое число.*

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки / С.Н. Асхабов. — М. : Физматлит, 2009. — 304 с.

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ПОИСК НОВЫХ ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В $\mathbb{C}^3$ [1]

А.В. Атанов, А.В. Лобода (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)
atanov.cs@gmail.com, lobvgasu@yandex.ru

В задаче полного описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ техника т.н. нормальных форм (см. [1,2]) оказывается эффективной на разных этапах. В связи с этим полезно дополнять известные утверждения об однородных многообразиях свойствами их нормальных уравнений.

В статье [3] построена классификация однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$, имеющих богатые алгебры симметрий. В частности, к поверхностям с 6-мерными алгебрами относятся т.н. винкельмановские поверхности, поверхности типа Картана, а также две группы трубчатых поверхностей. В первую группу входят восемь типов

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00592-а).

поверхностей ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{gathered} u = xy + x^\alpha, \quad u = xy + \ln x, \quad u = xy + x^2 \ln x, \\ u = xy + x^3 \ln x, \quad u = ye^x + e^{\alpha x}, \quad u \cos x + y \sin x = e^{\alpha x}, \\ u = xy + e^x, \quad u = ye^x - x^2/2. \end{gathered} \tag{1}$$

Вторую группу образуют следующие четыре типа поверхностей (ε, ε_1, $\varepsilon_2 = \pm 1$):

$$\begin{gathered} xu = y^2 - \varepsilon x \ln x, \quad u = y^2 + \varepsilon x^\alpha, \\ u = y^2 + \varepsilon x \ln x, \quad u^2 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Отметим, что любое из уравнений (1) можно записать в виде $u = \varphi(x)y + \psi(x)$ и проводить нормализацию отдельных поверхностей из (1) по общей схеме. При этом наиболее сложны и интересны в исследованиях об однородности *индефинитные* (имеющие индефинитную форму Леви) поверхности.

Предложение 1. Форма Леви и многочлен N_{220} из нормального уравнения любой индефинитной поверхности из семейства (1) могут быть приведены к виду $(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1, |z_1|^4)$.

Предложение 2. Если поверхность вида (2) индефинитная, то в ее нормальном уравнении форма Леви и многочлен N_{220} могут быть приведены к виду $(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1, |z_1|^4 \pm \frac{1}{3}|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4)$.

Как показано в [2], неомбилическая гиперповерхность $M \in \mathbb{C}^3$ со знаконеопределённой формой Леви $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$ в своём нормальном уравнении может иметь полиномы N_{220} только шести типов. Полином N_{220} из предложения 1 относится к типу 6 из [2], а полином N_{220} из предложения 2 — к типу 4.

В [4] были получены голоморфно-однородные индефинитные поверхности

$$v \operatorname{ch} y_1 + x_2 \operatorname{sh} y_1 = \alpha |z_2| \ (\alpha > 0), \quad (v - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1. \tag{3}$$

В их нормальных уравнениях многочлены N_{220} относятся к типу 1 из [2], а размерности их алгебр симметрий не превышают 6 (см. [2]).

С использованием предложений 1 и 2 устанавливается следующий факт.

Теорема 1. *Поверхности (3) являются новыми в задаче описания голоморфно-однородных вещественных поверхностей в $\mathbb{C}^3$.*

В самом деле, все поверхности с 6-мерными алгебрами могут относиться только к типам 4 или 6. Следовательно, для поверхностей (3) эта размерность в точности равна пяти, а потому они не эквивалентны поверхностям (1)–(2).

Помимо классификации [3], на данный момент известен ещё только один список однородных поверхностей в $\mathbb{C}^3$, содержащий трубки над аффинно-однородными поверхностями из $\mathbb{R}^3$. Однако 5-мерная алгебра симметрий любой трубки содержит 3-мерную абелеву подалгебру сдвигов, а у алгебр, отвечающих обсуждаемым поверхностям (3), таких абелевых подалгебр нет (см. [4]).

Литература

1. Chern S.S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S.S. Chern, J.K. Moser // Acta Math. — 1974. — T. 133. — C. 219–271.

2. Лобода А.В. Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А.В. Лобода // Тр. МИАН — 2001. — Т. 235. — С. 114–142.

3. Doubrov B. Homogeneous Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ / B. Doubrov, A. Medvedev, D. The // arXiv:1711.02389v1 (2017)

4. Атанов А.В. Голоморфные реализации разложимых пятимерных алгебр Ли / А.В. Атанов, А.В. Лобода // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 24–26.

МЕТОД НЕПРЕРЫВНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ПРИ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

М.Н. Афанасьева, Е.Б. Кузнецов (Москва, МАИ (НИУ))
mary.mai.8@yandex.ru

Рассматривается решение краевой задачи следующего вида:

$$\frac{dy}{dt} = f_1(\epsilon, t, y\left(t\right), y\left(t-\tau\right), \dot{y}\left(t-\tau\right), x\left(t\right), x\left(t-\tau\right), \dot{x}\left(t-\tau\right), z\left(t\right), z\left(t-\tau\right), \dot{z}\left(t-\tau\right)) = 0,$$

$$G\left(t, y\left(t\right), y\left(t-\tau\right), x\left(t\right), x\left(t-\tau\right), z\left(t\right), z\left(t-\tau\right)\right) = 0, t \in [a,b],$$

$$\frac{dz_i}{dt} = f_{2i}(t, y\left(t\right), y\left(t-\tau\right), \dot{y}\left(t-\tau\right), x\left(t\right), x\left(t-\tau\right), \dot{x}\left(t-\tau\right), z\left(t\right), z\left(t-\tau\right), \dot{z}\left(t-\tau\right)) = 0, i = \overline{1,q},$$

$$W\left(y(a), \dot{y}(a), y(b), x(a), \dot{x}(a), x(b), z(a), \dot{z}(a), z(b)\right) = 0,$$

где: $\epsilon << 1, y(t) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^s, x(t) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^r, z(t) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^q$, $f_1 : \mathbf{R}^{1+3s+3r+3q} \to \mathbf{R}^s$, $f_2 : \mathbf{R}^{1+3s+3r+3q} \to \mathbf{R}^q$, $G : \mathbf{R}^{1+2s+2r+2q} \to \mathbf{R}^r$, $W : \mathbf{R}^{3s+3r+3q} \to \mathbf{R}^{s+q}$. На интервале запаздывания $E_0 = \{T < a \mid \exists t > a, t - \tau = T\}$ заданы значения функций.

Для решения краевой задачи применяется метод стрельбы: краевое условие на правой границе интервала заменяется параметром p. Для отыскания параметра p используются совместно метод Ньютона, метод продолжения по параметру в форме Лаэя и продолжения по наилучшему параметру ν. Данный подход позволяет найти значения параметра p при наличии предельных точек.

На каждом шаге решается начальная задача методом непрерывного продолжения, при котором задача преобразуется к наилучшему аргументу λ: $y = y(\lambda), x = x(\lambda), z = z(\lambda), t = t(\lambda)$, — и дифференцирования алгебраической составляющей. Полученные уравнения задают вектор, касательный к интегральной кривой,который является единичным, что определяется дополнительнам уравнением. Система решается с помощью метода Эйлера с постоянным шагом. Для вычисления значений функций на предыстории используется интерполяционный полином Лагранжа по трем точкам.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-19-00474).

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

А.Д. Баев, Н.И. Работинская, С.А. Чечина, А.А. Бабайцев, В.Д. Харченко

Воронеж, ВГУ

Исследование теории вырождающихся псевдодифференциальных уравнений в настоящее время является актуальной задачей в связи с использованием этих операторов при доказательстве теорем о существовании решений и получении коэрцитивных априорных оценок решений краевых задач для вырождающихся уравнений. Такие краевые задачи возникают, например, при моделировании процессов гидродинамики с сингулярными особенностями. В настоящей работе исследуется вопрос об ограниченности одного класса весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [1]. Теорема об ограниченности доказывается в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Следуя [1] введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Преобразование (1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037) и Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}\,.$$

Это равенство позволяет расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, ...,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s \geqslant 0$, $q > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v]]\right\|^2_{L_2(R^+_n)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0{,}1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1 \leqslant l}\{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma+1,\ \sigma+\frac{l}{2}\},\ l = 1,\ 2...,\quad \sigma$ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[p(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]].$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+,\ \sigma \in \mathrm{R}^1, 0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, если функция $p(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\quad l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial_\eta^l\lambda(t,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-\rho l+\delta j} \tag{2}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1},\ \ \eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ - произвольный отрезок.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^\sigma_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in R^1$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$. Пусть функция $v(x,t)$ такова, что функция $D^N_{\alpha,t}v(x,t)$ при всех $x \in R^{n-1}$ принадлежит, как функция переменной t пространству $L_2(R^1_+)$ при некотором $N \in [\max\{\sigma+1, 1\}; s_1]$, где s_1 определено в условии 1. Пусть $\lim\limits_{t\to+\infty} D^j_{\alpha,t}v(x,t) = 0$ при всех $x \in R^{n-1}$, $j = 0, 1, 2, ..., N-1$. Тогда при всех $x \in R^{n-1}$ справедливо равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = 0$.

Аналогичные свойства для других классов псевдодифференциальных операторов доказаны в [1]–[8].

Литература

1. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев А.Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

А.Д. Баев, С.А. Чечина, А.А. Бабайцев, В.Д. Харченко (Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ для некоторого $d > 0$.

Рассмотрим функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ интегральное преобразование, определенное формулой

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

Это преобразование было введено в [1]. В [1] показано, что преобразование F_α связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, здесь $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. В [1] и [2] показано, что преобразование F_α может быть продолжено до преобразования, осуществляющего взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование пространств $L_2(R^1_+)$ и $L_2(R^1)$, а также может быть рассмотрено на некоторых классах обобщенных функций.

Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье. Можно показать,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037) и Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.

что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar R^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1,2,...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ оператор по формуле $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]]$, где символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по совокупности переменных, растущая по переменным ξ, η не быстрее некоторого многочлена.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma,\rho}_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega\subset \bar R^1_+$, $\sigma\in \mathrm{R}^1, p\in Q = \{p\in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$, если функция $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $y\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2,...,\ \ l = 0,\ 1,\ 2,...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(y)\partial_y)^j\partial^l_\eta\lambda(p,y,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-\rho l}$$

с константами $c_{jl}>0$, не зависящими от $p\in Q$, $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^1$, $y\in K$, где $K\subset\Omega$ - произвольный отрезок. Здесь σ, $\rho\in[0;1)$ — действительное число.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t)\in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^s\,|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]|^2\,d\xi d\eta.$$

Определение 3. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s\geqslant 0,\ q>1$) состоит из всех функций $v(x,t)\in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} =$$

$$= \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{s-ql}{2}}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0{,}1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0 \leqslant p_1 \leqslant l}\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2}\},\ l = 1,\ 2...,\ \sigma$ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $G(p, y, D_x, D_{\alpha,t})$ весовой псевдодифференциальный оператор с символами $g(p, y, \xi, \eta)$, принадлежащим классу $S^m_{\alpha,p}(\Omega)$, (m — действительное число), $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $G(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

При $\rho = 1$ теорема, аналогичная теореме 1, доказана в [3]. Некоторые другие свойства весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S^m_{\alpha,\rho}(\Omega)$ доказаны в [4] - [8].

Литература

1. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев А.Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ БЕЛОУСОВА-ЖАБОТИНСКОГО

А.В. Барышева (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
anna.barysheva.msu@gmail.com

Попытки экспериментально обнаружить колебательные реакции долгое время не давали положительных результатов. Современная история исследований колебательных химических реакций в жидкой фазе началась в 1951 году, когда Б.П. Белоусов открыл колебания концентраций окисленной и восстановительной форм церия в реакции взаимодействия лимонной кислоты с броматом, катализируемой ионами церия. Реакция была удобна для лабораторных исследований,однако работы Белоусова получили негативные отзывы.

В конце 1961 года работа Б.П. Белоусова была продолжена А.М. Жаботинским, показавшим протекание реакции с использованием малоновой кислоты без газовыделения. Новость об этой реакции обошла весь мир, колебательные реакции наконец вошли в химические лаборатории.

В работе рассматривается упрощённая модель реакции Белоусова-Жаботинского, названную брюсселятором (модель Лефевра-Николиса-Пригожина).

Исследование проводится для наиболее интересного случая, когда появляется предельный цикл — аттрактор с неустойчивой особой точкой внутри. Если существует некоторая замкнутая область с гладкой границей на фазовой плоскости, такая, что все фазовые траектории, пересекающие границу этой области, входят в нее, и внутри этой области находится неустойчивая особая точка, то в этой области обязательно имеется хотя бы один предельный цикл. В работе построен такой замкнутый контур, внутри которого содержится предельный цикл.

Литература

1. Козко А.И. Дифференциальные уравнения и математические модели химических задач / А.И. Козко, В.Г. Чирский. — М. : МЦНМО, 2019. — 168 с.

2. Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм / Б.П. Белоусов // Сб. рефератов по радиационной медицине. — М., 1958. — С. 145–147.

3. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М. : Наука, 1990. — 486 с.

К СПЕКТРАЛЬНЫМ СВОЙСТВАМ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ[1]

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова

(Воронеж, ВГУ, ВГПУ, ВГТУ)

g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

Рассматриваются бесконечные матрицы спектрального класса. А именно, в качестве невозмущенной матрицы выступает диагональная матрица $\mathcal{A} = (\mathcal{A}(n, m))$, $n, m \in \mathbb{J}$, где в качестве $\mathbb{J}$ рассматривается любое подмножество из группы целых чисел $\mathbb{Z}$, причем считается выполненным условие отделенности диагональных элементов матрицы $\mathcal{A}$, т. е. $\inf\limits_{n\neq m, n,m\in\mathbb{J}} |\mathcal{A}(n, n) - \mathcal{A}(m, m)| > \beta > 0$.

В качестве матрицы-возмущения $\mathcal{B} = (\mathcal{B}(i, j)), i, j \in \mathbb{J}$ берётся строго нижнетреугольная матрица с суммируемыми диагоналями. К матрице $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ применяется матод подобных операторов. Доказывается, что матрица $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ подобна невозмущенной матрице $\mathcal{A}$. Отличительной особенностью данного случая применения метода является то, что для нахождения неизвестного оператора X из метода подобных операторов используется не стандартное уравнение, а уравнение Фридрихса. В качестве пространства допустимых

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

возмущение, также как и в [1–3] выступает пространство матриц с суммируемыми диагоналями.

Литература

1. Гаркавенко Г.В. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Сиб. электрон. матем. изв. — 2017. — Т. 14. — С. 673—689.

2. Гаркавенко Г.В. Метод подобных операторов и спектральные свойства разностного оператора с четным потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова, А.Р. Зголич // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. : Математика. Физика. — 2016. — Т. 44, № 20 (241). — С. 42–49.

3. Гаркавенко Г.В. Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 40–48.

О СЛУЧАЙНЫХ МНОГОЛИСТНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЯХ В ЗАДАЧЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Ю.Е. Безмельницына (Воронеж, ВГПУ)
bezmelnicyna@inbox.ru

Пусть (Ω, Σ, μ) - полное вероятностное пространство, X, Y - метрические пространства и $I = [0, T]$. Символами $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y. Если Y – нормированное пространство, то символом $Kv(Y)$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y.

Мультиотображение $\mathcal{F}\colon \Omega \times X \to C(Y)$ называется *случайным*, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, где $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ - наименьшая σ-алгебра на $\Omega \times X$, включающая все множества $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{B}(X)$ обозначает Борелевскую σ-алгебру на X. Если, кроме того, $\mathcal{F}(\omega, \cdot)\colon X \to C(Y)$ полунепрерывно сверху для всех $\omega \in \Omega$ (см. [1]), то $\mathcal{F}$ называется *случайным и-мультиотображением.*

Рассмотрим периодическую задачу следующего вида:

$$x'(\omega, t) \in F\big(\omega, t, x(\omega, t)\big) \quad \text{п.в.} \quad t \in I,$$

для всех $\omega \in \Omega$, где $F\colon \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям: $(F1)$ $F\colon \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ – случайное u-мультиотображение; $(F2)$ существует отображение $c : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ такое, что $c(\omega, \cdot)$ – локально интегрируема на I для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot, t)$ – измерима п.в. $t \in I$, и $\|F(\omega, t, y)\| := \sup\{|z| \colon z \in F(\omega, t, y)\} \leqslant c(1 + |y|)$.

На основе понятий случайной топологической степени [2] и случайной многолистной направляющей функции предлагается новый подход в решении периодической задачи для случайных дифференциальных включений.

Литература

1. Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М. : Либроком, 2011.

2. Andres J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Górniewicz // Topol. Meth. Nonl. Anal. — 2012. — V. 40. — P. 337–358.

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ РЯДА ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

Д.В. Белова (Воронеж, ВГУ)

dianabelova123@yandex.ru

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор с инволюцией вида:

$$(Ly)(x) = y'(x) + q(x)y(1 - x), \quad y(0) = y(1).$$

В [1] при $q(x) \in C^1[0, 1]$ найдены уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора L:

$$\lambda_n = 2\pi n i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \quad y_n(x) = e^{2\pi n i x} + \psi_{1n}(x) + \psi_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Здесь α — различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), $\alpha_n \in l_2$,
$\psi_{1n}(x) = \frac{1}{n}\left[b_1(x)e^{-\lambda_n^0 ix} + b_2(x)e^{\lambda_n^0 ix} + b_3(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + b_4(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 ix}\right]$,

[1]

$\psi_{2n}(x) = \frac{1}{n}\left[b_5(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right)\,dt + b_6(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right)\,dt\right],$

$b_k(x)$ некоторые непрерывные функции, $|n| \geqslant n_0$.

Как приложение полученных асимптотик, применяя технику из [2], исследуется равномерная сходимость и дифференцируемость ряда $\sum\limits_{|n|\geqslant n_0} \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_n(x)$, где $y_n(x)$, $z_n(x)$ — собственные функции операторов L, L^* соответственно, $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Полученные результаты используются в исследовании смешанных задач для уравнений с инволюцией.

Литература

1. Стерликова Д.В. Об асимптотических формулах для собственных значений и функций одного оператора с инволюцией / Д.В. Стерликова // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна–2018». — Воронеж, 2018. — С. 320–321.

2. Бурлуцкая М.Ш. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Докл. РАН. — 2010. — Т. 435, № 2. — С. 151–154.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ РИСКА ОТКАЗА НА ПРИМЕРЕ АНАЛИЗА СДВОЕННОЙ СИСТЕМЫ ПОДЪЕМА ПОЛЯРНОГО КРАНА

Белоусова В.И., Шестакова И.А. (Екатеринбург, УрФУ)

kb76@mail.ru

Для анализа возможных причин возникновения аварийной ситуации используется дедуктивный логико-графический метод деревьев отказа (FTA). Наличие информации по интенсивностям отказов для исходных событий позволяет получить количественную оценку риска отказа системы в целом [1,2].

Метод минимальных сечений позволяет выявить различные пути (сечения), приводящие к отказу системы, определить наиболее вероятные из них и получить верхнюю (консервативную) оценку риска отказа системы.

Главное событие E — отказ системы преобразуется к сумме минимальных сечений S_i

$$E = \sum_{i=1}^{n_s} S_i; \qquad S_i = \prod_{j=1}^{n_i} e_{i_j},$$

где n_i — число исходных событий в i-ом минимальном сечении; n_s — число сечений.

Тогда риск отказа системы может быть вычислен по формуле

$$Q_E = P\left(\sum_{i=1}^{n_s} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n_s} P\left(S_i\right) - \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n_s} P\left(S_i S_j\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ j>i \\ k>j}}^{n_s} P\left(S_i S_j S_k\right) - \dots + (-1)^{n_s+1} P\left(S_1 S_2 \dots S_{n_s}\right),$$

где $P\left(S_1 S_2 \dots S_{n_s}\right) = \prod\limits_{r \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i} P(e_r);$

$\Delta_i = \{j_1, j_2, \dots, j_{n_i}\}$ — набор индексов исходных событий, входящих в i-ое минимальное сечение.

Учитывая, что вероятности $P\left(S_i\right), P\left(e_j\right)$ много меньше единицы, получим верхнюю (консервативную) оценку риска отказа системы

$$Q_E \approx \sum_{i=1}^{n_s} P\left(S_i\right).$$

Практическое применение данной методики рассмотрено на примере анализа отказа сдвоенной системы подъема полярного крана. Построено дерево отказов; выявлены минимальные сечения; получена консервативная оценка риска отказа системы и оценено влияние активного резервирования системы подъема на величину риска.

Литература

1. Панасенко Н.Н. Вероятностный анализ безопасности транспортировки контейнеров с отработавшим ядерным топливом на АЭС с ВВЭР-1000 / Н.Н. Панасенко, И.А. Шестакова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. — 1998. — № 1. — С. 17–25.

2. Синельщиков А.В. Методологические основы ВАБ грузоподъемных кранов как опасных промышленных объектов / А.В. Синельщиков, И.А. Шестакова // Материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 70-летию АГТУ : в 3 т. — Астрахань : Изд-во АГТУ. — 2001. — Т. 3. — С. 203–205.

О НАКРЫВАЮЩЕМ ОТОБРАЖЕНИИ, ДЕЙСТВУЮЩЕМ ИЗ УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА В НЕУПОРЯДОЧЕННОЕ

С. Бенараб, Т.В. Жуковская
(Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина, ТГТУ)
benarab.sarraa@gmail.com, t_zhukovskaia@mail.ru

Получено распространение результатов [1,2] об упорядоченном накрывании на отображения, действующие из упорядоченного пространства $(X, \preceq_X)$ во множество Y, на котором определено бинарное отношение ϑ_Y, обладающее лишь свойством рефлексивности (антисимметричность и транзитивность не предполагаются).

Пусть $x_0 \in X$, $\mathcal{O}_X(x_0) = \{x \in X : x \preceq_X x_0\}$, $\psi, \varphi : X \to Y$.

Определение 1. Отображение ψ называем (*упорядоченно*) *накрывающим множество* $W \subset Y$, если

$$\forall x_0 \in X \;\; \forall y \in W \;\; y\,\vartheta_Y\,\psi(x_0) \;\Rightarrow\; \exists x \in X \;\; x \preceq_X x_0 \;\text{ и }\; \psi(x) = y.$$

Определение 2. Отображение φ называем изотонным, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \preceq_X x_2$ следует $\varphi(x_1)\,\vartheta_Y\,\varphi(x_2)$.

Определим множество $\Pi(x_0, \psi, \varphi)$ цепей $S \subset \mathcal{O}_X(x_0)$ таких, что

$$\forall x \in S \;\; \varphi(x)\,\vartheta_Y\,\psi(x) \;\text{ и }\; \forall x, u \in S \;\; u \prec_X x \;\Rightarrow\; \psi(u)\,\vartheta_Y\,\varphi(x).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
• *существует $x_0, x_0' \in X$ такие, что $x_0' \preceq_X x_0$ и $\psi(x_0') = \varphi(x_0)$;*
• *для любых $x, x' \in \mathcal{O}_X(x_0')$ таких, что $x' \preceq_X x$ и $\psi(x') = \varphi(x)$ существует x'', для которого $x'' \preceq_X x'$ и $\psi(x'') = \varphi(x')$;*
• *для любой цепи $S \in \Xi(x_0, \psi, \varphi)$ существуют нижние границы $w, w' \in X$ такие, что $w' \preceq_X$ и $\psi(w') = \varphi(w)$.*
Тогда в $\mathcal{O}_X(w')$ существует точка совпадения отображений ψ, φ.

Литература

1. Arutyunov A.V. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces / A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy // Topology and its Applications. — 2015. — T. 179, № 1. — C. 13–33.

2. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах / Е.С. Жуковский // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 12. — С. 1610–1627.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А.С. Бердышев, Н. Адил (Алматы, КазНПУ)
berdyshev@mail.ru

Работа посвящена изучению вопросов разрешимости и существования собственных значений одной задачи с условиями Бицадзе–Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения:

$$Lu = \left\{ \begin{array}{ll} u_x - u_{yy}, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0 \end{array} \right\} = f\left(x, y\right)$$

в конечной односвязной области D плоскости независимых переменных x, y ограниченной при $y > 0$ отрезками $AA_0,\ A_0B_0, BB_0$ прямых $x = 0,\ y = 1,\ x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками $AC\ :\ x + y = 0$ и $BC\ :\ x - y = 1$ уравнения (1). Пусть гладкая кривая $BE\ :\ -\sigma\left(x\right),\ l < x < 1$, где $0 < l < 0.5,\ \sigma(1) = 0,\ l - \sigma(l) = 0,\ \sigma(x) > 0,\ x > 0$, расположена внутри характеристического треугольника $0 \leqslant x + y \leqslant x - y < 1$.

Задача TB. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0, \tag{2}$$

$$\left[u_x + u_y\right]\left[\theta_1\left(t\right)\right] + \mu\left(t\right)\left[u_x + u_y\right]\left[\theta_1^*\left(t\right)\right] = 0, \tag{3}$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК №AP05131026

где $\theta_1(t)$ $\left(\theta_1^*(t)\right)$ — аффиксы точки пересечения характеристиками BC (кривой BE) с характеристиками, выходящей из точки $(t,0)$, $0<t<1$. В случае, когда кривая $\sigma(x)$ выходит из точки A, для уравнения (1) вопросы разрешимости и вольтерровости для одного класса задач с условиями Бицадзе–Самарского изучена в работе [1]. Если в условии (3) $\mu(t)\equiv 0$, то задача ТВ совпадает с аналогом задачи Трикоми для уравнения (1). В этом случае разрешимость и некоторые спектральные свойства задачи ТВ рассматривались многими авторами, библиографию которого можно найти в [2]. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\sigma(x)\neq -1$. Тогда существует $\lambda\in\mathbb{C}$ такое, что уравнение $Lu=\lambda u$ имеет нетривиальное решение $u\not\equiv 0$, удовлетворяющее условиям (2)–(3).*

Литература

1. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов / А.С. Бердышев. — Алматы : Изд-во КазНПУ им. Абая, 2015. — 224 с.

2. Бердышев А.С. О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения / А.С. Бердышев // Сибирский мат. журн. — 2005. — Т. 45, № 3. — С. 500–510.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОД ГОЛОМОРФНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

М.И. Бесова (Москва, НИУ «МЭИ»)

besova.margarita@yandex.ru

В работе при рассмотрении краевой сингулярно возмущенной задачи для уравнения второго порядка используется метод, основанный на голоморфной регуляризации сингулярных возмущений. Данный метод вытекает из метода регуляризации С.А. Ломова [1], и его основной задачей является построение так называемых псевдоголоморфных решений — решений, которые могут быть представлены в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра.

Рассмотрим на отрезке [0,1] краевую задачу:

$$\varepsilon y'' = f(x,y,y'),\ y(0,\varepsilon)=y(1,\varepsilon)=0, \tag{1}$$

с малым положительным параметром ε.

Пусть $w = V(x, y)$ является корнем уравнения $f(x, y, w) = 0$, аналитическим в области $\overline{\omega_{xy}}$, а $\overline{y}(x)$ — решением задачи Коши

$$y' = V(x, y),\ y(0) = 0, \tag{2}$$

аналитичным на отрезке [0,1].

Определение. Решение $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $Y(x, \eta, \varepsilon)$, аналитическая по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$ при каждом $x \in [0, 1]$ и каждом η из некого неограниченного множества T, и такая, что для некоторой функции $\varphi(x)$ выполняется равенство

$$y(x, \varepsilon) = Y(x, \varphi(x)/\varepsilon, \varepsilon),\ \forall x \in [0, 1], \tag{3}$$

когда ε принадлежит достаточно малой окрестности значения $\varepsilon = 0$ [2].

Необходимо также определить достаточные условия существования псевдоголоморфного решения для краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть аналитическая на отрезке [0,1] функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(0) = 0$, и уравнение*

$$\varphi'(x) \int_{\widetilde{w}}^{w} \frac{dw_1}{f(x, \overline{y}(x), w_1)} = \varphi(x)/\varepsilon \tag{4}$$

имеет решение вида

$$w = W_0(x, \Psi(\varphi(x)/\varepsilon), \widetilde{w}),$$

в котором $q = \Psi(\eta)$ — целая функция с асимптотическим значением, равным p_0, и функция $W_0(x, q, \widetilde{w})$ является аналитической на параллелепипеде $\Pi_0 = [0, 1] \times Q \times G$, где Q и G — отрезки, причем Q содержит точки $\Psi(0)$ и p_0. Тогда решение $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ [2,3].

Литература

1. Ломов С.А. Основы математической теории пограничного слоя / С.А. Ломов, И.С. Ломов. — М. : Изд-во МГУ, 2011. — 456 с.

2. Качалов В.И. Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач / В.И. Качалов, С.А. Ломов // Вестник МЭИ. — 2010. — Вып. 6. — С. 54–62.

3. Качалов В.И. Об одном методе решения сингулярно возмущенных систем тихоновского типа / В.И. Качалов // Известия вузов. Математика. — 2018. — Вып. 6. — С. 25–30.

О ВЛИЯНИИ ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩЕГО ВДУВА И ЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Г.Г. Бильченко (мл.), Н.Г. Бильченко

(Казань, КНИТУ-КАИ)

ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

В данной работе, аналогично [1] продолжающей исследование свойств математической модели ламинарного пограничного слоя (ЛПС) электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), рассматривается влияние следующего сочетания управляющих воздействий: **линейно возрастающего** вдува и **линейного** температурного фактора при постоянном магнитном поле на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямую задачу (1) [2]:

$$(m, \tau_w, s) \to (q, f, \eta; Q, F, N)\,. \tag{1}$$

По заданным управлениям: $m(x)$ — *вдуву* в ЛПС, где $x \in X = [0;1]$, а ось x направлена вдоль контура тела; $\tau_w(x) = T_w(x)/T_{e_0}$ — *температурному фактору*, где $T_w(x)$ — температура стенки, а T_{e_0} — температура в точке торможения $x_0 = 0$ потока; $s(x) = \sigma B_0^2(x)$ — *магнитному полю* требуется рассчитать параметры $\theta_0\,(x; m, \tau_w, s)$, $\theta_1\,(\ldots)$, $\omega_0\,(\ldots)$, $\omega_1\,(\ldots)$ математической модели ЛПС [3] для случаев обтекания боковой поверхности кругового цилиндра и поверхности сферического носка. Параметры θ_0, …, ω_1 определяются из объединённой аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (5)–(8) [2], полученной с помощью метода обобщённых интегральных соотношений А.А. Дородницына [4], с начальными условиями, полученными из объединённой нелинейной алгебраической системы (10)–(13) [2]. Получив с их помощью локальный тепловой поток $q\,(x; m, \tau_w, s)$; локальное напряжение трения $f\,(x; m, \tau_w, s)$; локальную мощность системы, обеспечивающей вдув $\eta\,(x; m, \tau_w, s)$, найдём (для $x_k = 1$) **интегральный тепловой поток** (2) [1, 2]

$$Q\,(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left(\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx\,; \tag{2}$$

суммарную силу трения Ньютона (3) [1, 2]

$$F\,(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \cdot dx\,; \tag{3}$$

и вычисляемую с использованием фильтрационного закона Дарси **суммарную мощность** (4) [1, 2] системы, обеспечивающей вдув,

$$N\,(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} a v_w^2(x) \cdot dx\,. \tag{4}$$

В (2)–(4) коэффициент $k_4 = 0$ для боковой поверхности цилиндра, $k_4 = 1$ для поверхности сферического носка с радиусом $r(x)$.

2. Вычислительные эксперименты. Порядок проведения вычислительных экспериментов и анализа их результатов повторяет схему, использованную для случая сочетания постоянных управляющих воздействий в [2]. Пусть фиксированы значения *неизменяемых параметров*:

$$\text{число Маха} \quad M_\infty \in [10; 40]\,, \tag{5}$$

$$\text{высота полёта} \quad H \in [10; 30]\ [\text{км}]\,, \tag{6}$$

$$\text{радиус тела} \quad R \in [0{,}1; 1]\ [\text{м}]\,. \tag{7}$$

Вычислительные эксперименты выполнены для воздуха в атмосфере Земли при $H = 10$ [км], $M_\infty = 10$, $R = 0{,}1$ [м]. Пусть диапазоны изменения *управляющих параметров* ограничены:

$$m \in M^c = [0; 1]\,, \tag{8}$$

$$\tau_w \in T^c = [0{,}15; 0{,}9]\,, \tag{9}$$

$$s \in S^c = [0; 5 \cdot 10^4]\ [\text{Тл}/(\text{Ом} \cdot \text{м})]\,. \tag{10}$$

Линейный вдув, определяемый законом

$$m(x) = m(x; m_0, m_1) = m_0 \cdot (1 - x) + m_1 \cdot x \quad \text{при} \quad x \in X\,, \tag{11}$$

$$\text{где} \quad m_0, m_1 \in M^c, \qquad m'(x) = m_1 - m_0\,, \tag{12}$$

согласно [5], назовём *возрастающим* (для $m' > 0$) или *убывающим* (для $m' < 0$) *слабо* при $|m'| \in (0; 0{,}3)$, *умеренно* при $|m'| \in [0{,}3; 0{,}7)$, *сильно* при $|m'| \in [0{,}7; 1]$.

Линейный температурный фактор, определяемый законом

$$\tau(x) = \tau(x; \tau_0, \tau_1) = \tau_0 \cdot (1 - x) + \tau_1 \cdot x \quad \text{при} \quad x \in X\,, \tag{13}$$

$$\text{где}\quad \tau_0, \tau_1 \in T^c, \qquad \tau'(x) = \tau_1 - \tau_0\,, \tag{14}$$

согласно [5], назовём *возрастающим* (для $\tau' > 0$) или *убывающим* (для $\tau' < 0$) *слабо* при $|\tau'| \in (0; 0{,}25)$, *умеренно* при $|\tau'| \in [0{,}25; 0{,}5)$, *сильно* при $|\tau'| \in [0{,}5; 0{,}75]$.

3. Замечания. 1) Графики локальных зависимостей $q(x)$, $f(x)$, $\eta(x)$ представлены в [5, 6].

2) Исследование влияния другого сочетания управляющих воздействий: **линейно убывающего** вдува и **линейного** температурного фактора при постоянном магнитном поле на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув, проводится в работе [7].

3) Полученные результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы в качестве моделей ограничений (33)–(35) [8] и (45_1)–(45_r) [9] в задачах синтеза эффективного управления, как на всём участке, так и на его фрагментах.

Литература

1. Бильченко Г.Г. О влиянии линейного вдува при постоянном температурном факторе на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. Воронеж. зимн. мат. школа. — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2019. — С. 41–44.

2. Бильченко Г.Г. Анализ влияния постоянных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 2. — С. 5–13.

3. Бильченко Н.Г. Метод А.А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

4. Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А.А. Дородницын // Прикладная математика и техническая физика. — 1960. — № 3. — С. 111–118.

5. Бильченко Г.Г. О влиянии линейно возрастающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Некоторые акту-

альные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения–2019» : материалы научной конференции, 8–12 апреля 2019 г. — СПб. : Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2019.

6. Бильченко Г.Г. О влиянии линейно возрастающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения–2019» : материалы научной конференции, 8–12 апреля 2019 г. — СПб. : Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2019.

7. Бильченко Г.Г. О влиянии линейно убывающего вдува и линейного температурного фактора на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXX». — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2019.

8. Бильченко Г.Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. IV. Классификация задач на всём участке управления / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 5–12.

9. Бильченко Г.Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. V. Смешанные задачи на фрагментах участка управления / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 13–22.

О ВЛИЯНИИ ЛИНЕЙНО УБЫВАЮЩЕГО ВДУВА И ЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Г.Г. Бильченко (мл.), Н.Г. Бильченко
(Казань, КНИТУ-КАИ)
ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

В данной работе, сохраняющей обозначения и сокращения [1-3] и продолжающей исследование свойств математической модели ЛПС электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях ГЛА, рассматривается влияние сочетания **линейно убывающего** вдува и **линейного** температурного фактора при постоянном магнитном поле на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув.

1. Постановка задачи. В прямой задаче (1) [1–3] требуется определить $Q\,(m, \tau_w, s)$, $F\,(m, \tau_w, s)$, $N\,(m, \tau_w, s)$ по (2)–(4) [1–3]. Отметим, что в объединённой системе ОДУ (5)–(8) [1] в условиях (13), (14) [3] уравнение (7) [1] примет вид

$$\omega_0' = (1 - \tau_0 + (\tau_0 - \tau_1) \cdot x) \cdot \theta_0' + (\tau_0 - \tau_1) \cdot \theta_0\,. \tag{1}$$

2. Вычислительные эксперименты. В условиях (5)–(10) из [3] вычислительные эксперименты проведены по схеме [1–3] для воздуха в атмосфере Земли при $H = 10$ [км], $M_\infty = 10$, $R = 0{,}1$ [м].

3. Замечания. 1) Графики локальных зависимостей $q(x)$, $f(x)$, $\eta(x)$ представлены в [4, 5].

2) Результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы в качестве моделей ограничений (33)–(35) [6] и (45_1)–(45_r) [7] в задачах синтеза управления.

Литература

1. Бильченко Г.Г. Анализ влияния постоянных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 2. — С. 5–13.

2. Бильченко Г.Г. О влиянии линейного вдува при постоянном температурном факторе на область значений функционалов ги-

перзвуковой аэродинамики / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. Воронеж. зимн. мат. школа. — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2019. — С. 41–44.

3. Бильченко Г.Г. О влиянии линейно возрастающего вдува и линейного температурного фактора на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Современные методы теории краевых задач : материалы Междунар. конф. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения–XXX». — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2019.

4. Бильченко Г.Г. О влиянии линейно убывающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения–2019» : материалы научной конференции, 8–12 апреля 2019 г. — СПб. : Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2019.

5. Бильченко Г.Г. О влиянии линейно убывающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения–2019» : материалы научной конференции, 8–12 апреля 2019 г. — СПб. : Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2019.

6. Бильченко Г.Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. IV. Классификация задач на всём участке управления / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 5–12.

7. Бильченко Г.Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. V. Смешанные задачи на фрагментах участка управления / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 13–22.

АЛГОРИТМЫ УСТАНОВЛЕНИЯ ТИПА ДВУСТОРОННИХ ДВИЖЕНИЙ НОСИТЕЛЯ С ПОДВИЖНЫМ ГРУЗОМ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С АНИЗОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ

Г.Г. Бильченко (ст.) (Казань, КНИТУ-КАИ)
ggbil40@gmail.com

1. Дифференциальные уравнения движения носителя. Данная работа является развитием работ [1–7] и продолжением [8, 9]. Рассматривается движение механической системы, состоящей из носителя и груза [1, 3]. Носитель, располагаясь всё время в горизонтальной плоскости, двигается поступательно по прямолинейной траектории. Носитель имеет прямолинейный канал, по которому может перемещаться груз. Ось канала располагается в вертикальной плоскости, проходящей через траекторию носителя. Силы сопротивления подстилающей плоскости моделируются силами сухого анизотропного кулонова трения. В [1–7] рассматривалась модель изотропного трения.

Пусть закон движения груза в канале задан в виде

$$x_2(t) = \ell \cdot \sin(\omega t), \qquad \text{где} \qquad \ell = const\,, \quad \omega = const\,. \tag{1}$$

Тогда *дифференциальные уравнения движения носителя* (ДУДН) согласно [1, 3] будут следующими

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos\varphi + f_+ \sin\varphi) \cdot \sin(\omega t) - g \cdot f_+ \qquad \text{при} \qquad \dot{x} > 0\,; \tag{2}$$

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos\varphi - f_- \sin\varphi) \cdot \sin(\omega t) + g \cdot f_- \qquad \text{при} \qquad \dot{x} < 0\,; \tag{3}$$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \text{при} \qquad \dot{x} = 0\,, \tag{4}$$

где x – координата носителя; $\beta = \ell \cdot \omega^2 \cdot \dfrac{m}{m+M}$; M – масса носителя; m – масса груза; f_+ и f_- – коэффициенты трения скольжения в движении, равные коэффициентам трения скольжения в покое, для пары материалов «носитель – подстилающая горизонтальная плоскость» в положительном и отрицательном направлениях оси x, соответственно; φ – угол установки канала такой, что

$$-\operatorname{arctg}\frac{1}{f_+} < \varphi < \operatorname{arctg}\frac{1}{f_-}\,. \tag{5}$$

Предполагается, что носитель совершает безотрывное [5] от горизонтальной плоскости движение. Требуется определить движение носителя из *состояния покоя*

$$\dot{x}(t_0) = 0\,, \tag{6}$$

где $t_0 = 0$, вызванное движением груза заданного вида (1).

2. Условия движения носителя из состояния покоя.

Движение носителя (ДН) будет определено, если будет установлена последовательность временных интервалов интегрирования, на каждом из которых будет определено конкретное ДУДН из (2)–(4).

Если параметры исследуемой механической системы таковы, что имеют место неравенства

$$\beta \cdot (\cos\varphi + f_+ \sin\varphi) > g \cdot f_+ \tag{7}$$

и

$$\beta \cdot (\cos\varphi - f_- \sin\varphi) > g \cdot f_-\,, \tag{8}$$

то носитель может совершать двусторонние движения из состояния покоя [9], что позволяет ввести $\tau_+ = \dfrac{1}{\omega} \arcsin \dfrac{\gamma_+}{\beta}$ и $\tau_- = \dfrac{1}{\omega} \arcsin \dfrac{\gamma_-}{\beta}$, где

$$\gamma_+ = \frac{g \cdot f_+}{\cos\varphi + f_+ \sin\varphi} \quad \text{и} \quad \gamma_- = \frac{g \cdot f_-}{\cos\varphi - f_- \sin\varphi}\,.$$

3. Установление типа двусторонних движений носителя из состояния покоя.

Было установлено [9], что если угол установки канала $\varphi = \varphi_0$, где

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{f_+ - f_-}{2 \cdot f_+ \cdot f_-}\right), \tag{9}$$

то имеет место равенство $\tau_+ = \tau_-$, и был приведён алгоритм установления типа движений носителя в этом случае.

3.1. Для случая $\varphi > \varphi_0$, при котором $\tau_+ < \tau_-$, введём *определяющие выражения*

$$I_1^+ = \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} + \sqrt{\beta^2 - \gamma_-^2} - \gamma_+ \cdot \left[\pi + \arcsin\frac{\gamma_-}{\beta} - \arcsin\frac{\gamma_+}{\beta}\right]; \tag{10}$$

$$I_2^+ = \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} + \sqrt{\beta^2 - \gamma_-^2} - \gamma_- \cdot \left[\pi + \arcsin\frac{\gamma_+}{\beta} - \arcsin\frac{\gamma_-}{\beta}\right]; \tag{11}$$

$$I_3^+ = \beta\cdot\cos\left\{\arcsin\frac{\gamma_+}{\beta} + \pi\cdot\left[\frac{f_- - f_+}{f_- + f_+} + \frac{2\cdot f_-\cdot f_+}{f_- + f_+}\cdot\operatorname{tg}\varphi\right]\right\} +$$

$$+\sqrt{\beta^2-\gamma_+^2} - \pi\cdot g\cdot\frac{2\cdot f_-\cdot f_+}{f_- + f_+}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\,. \qquad (12)$$

Введённые выражения (10), (11) и (12) позволяют представить алгоритм A_+ :

Шаг 1. Вычислить значение I_1^+.

Шаг 1.1. Если $I_1^+ < 0$, **то** ДН происходит по типу $R2$, КТЗ.

Шаг 1.2. Если $I_1^+ = 0$, **то** ДН имеет тип $R3$, КТЗ.

Шаг 1.3. Если $I_1^+ > 0$, **то** перейти к Шагу 2.

Шаг 2. Вычислить значение I_2^+.

Шаг 2.1. Если $I_2^+ < 0$, **то** ДН имеет тип $R3$, КТЗ.

Шаг 2.2. Если $I_2^+ = 0$, **то** ДН имеет тип $R3$, КТЗ.

Шаг 2.3. Если $I_2^+ > 0$, **то** перейти к Шагу 3.

Шаг 3. Вычислить значение I_3^+.

Шаг 3.1. Если $I_3^+ < 0$, **то** ДН имеет тип $R3$, КТЗ.

Шаг 3.2. Если $I_3^+ = 0$, **то** ДН имеет тип $R5$, КТЗ.

Шаг 3.3. Если $I_3^+ > 0$, **то** ДН имеет тип NR, КТЗ.

Сокращение КТЗ означает, что «классификация типа движения носителя завершена».

3.2. Для случая $\varphi < \varphi_0$, при котором $\tau_+ > \tau_-$, введём *определяющие выражения*

$$I_1^- = \sqrt{\beta^2-\gamma_+^2}+\sqrt{\beta^2-\gamma_-^2} - \gamma_-\cdot\left[\pi + \arcsin\frac{\gamma_+}{\beta} - \arcsin\frac{\gamma_-}{\beta}\right]; \quad (13)$$

$$I_2^- = \sqrt{\beta^2-\gamma_+^2}+\sqrt{\beta^2-\gamma_-^2} - \gamma_+\cdot\left[\pi + \arcsin\frac{\gamma_-}{\beta} - \arcsin\frac{\gamma_+}{\beta}\right]; \quad (14)$$

$$I_3^- = \beta\cdot\cos\left\{\arcsin\frac{\gamma_-}{\beta} + \pi\cdot\left[\frac{f_+ - f_-}{f_- + f_+} - \frac{2\cdot f_-\cdot f_+}{f_- + f_+}\cdot\operatorname{tg}\varphi\right]\right\} +$$

$$+\sqrt{\beta^2-\gamma_-^2} - \pi\cdot g\cdot\frac{2\cdot f_-\cdot f_+}{f_- + f_+}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\,. \qquad (15)$$

Введённые выражения (13), (14) и (15) позволяют представить алгоритм A_- :

Шаг 1. Вычислить значение I_1^-.

Шаг 1.1. Если $I_1^- < 0$, **то** ДН происходит по типу $R2$, КТЗ.

Шаг 1.2. Если $I_1^- = 0$, **то** ДН имеет тип $R4$, КТЗ.

Шаг 1.3. Если $I_1^- > 0$, **то** перейти к Шагу 2.

Шаг 2. Вычислить значение I_2^- .
Шаг 2.1. Если $I_2^- < 0$, **то** ДН имеет тип $R6$, КТЗ.
Шаг 2.2. Если $I_2^- = 0$, **то** ДН имеет тип $R6$, КТЗ.
Шаг 2.3. Если $I_2^- > 0$, **то** перейти к Шагу 3.
Шаг 3. Вычислить значение I_3^- .
Шаг 3.1. Если $I_3^- < 0$, **то** ДН имеет тип $R6$, КТЗ.
Шаг 3.2. Если $I_3^- = 0$, **то** ДН имеет тип $R7$, КТЗ.
Шаг 3.3. Если $I_3^- > 0$, **то** ДН имеет тип NR, КТЗ.

3.3. Алгоритм A_0 , соответствующий случаю $\varphi = \varphi_0$, использует лишь одно *определяющее выражение* [9]

$$I = 2 \cdot \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} - \pi \cdot \gamma = \left. I_i^+ \right|_{\varphi=\varphi_0} = \left. I_i^- \right|_{\varphi=\varphi_0} , \tag{16}$$

где $i = 1, 2, 3$, а

$$\gamma = g \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot f_+^2 \cdot f_-^2 + (f_+ - f_-)^2}}{f_+ + f_-} . \tag{17}$$

4. Результаты вычислительных экспериментов.

Получены зависимости $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и фазовые портреты ДН, соответствующих типам $R2$, $R3$, $R5$, NR для случая $\varphi > \varphi_0$ и $R2$, $R4$, $R6$, $R7$, NR для случая $\varphi < \varphi_0$.

Литература

1. Бильченко Г.Г. Влияние подвижного груза на динамику носителя / Г.Г. Бильченко // Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы : тезисы докладов международной конференции посвящённой памяти профессора В.Ф. Демьянова (CNSA – 2017, Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017 г.). — Ч. I. — СПб. : Изд-во ВВМ, 2017. — С. 218–224.

2. Bilchenko G. The influence of mobile load on the carrier dynamicsG. Bilchenko // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), Saint Petersburg, Russia, 2017. — P. 1–4.

3. Бильченко Г.Г. Влияние подвижного груза на движение носителя / Г.Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управление : Труды XI Международной Четаевской конференции. — Т. 1. Секция 1. Аналитическая Механика. Казань, 13–17 июня 2017 г. — Казань : Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 37–44.

4. Бильченко Г.Г. Анализ влияния подвижного груза на динамику носителя / Г.Г. Бильченко // Материалы XX Юбилейной

Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017), 24–31 мая 2017 г., Алушта. — М. : Изд-во МАИ, 2017. — С. 196–198.

5. Бильченко Г.Г. Движение носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости / Г.Г. Бильченко // Сборник материалов международной конференции «XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2017). Секции 1–4. — Симферополь : ДИАЙПИ, 2017. — С. 58–61.

6. Бильченко Г.Г. Алгоритм классификации двусторонних движений носителя с подвижным грузом по негладкой горизонтальной плоскости / Г.Г. Бильченко // Сборник материалов международной конференции «XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2018). Секции 4–9. — Симферополь : Полипринт, 2018. — С. 99–101.

7. Bilchenko G. G. Algorithm for determination the type of bilateral motions of a carrier with a mobile load along a horizontal plane/ G. G. Bilchenko // 12th International Conference «Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications», 20–25 September 2018, Kazan, Russia. IOP Conf. Series : Materials Science and Engineering, 2019. — Vol. 1158, Issue 2, id. 022028. — P. 1–8 (Russia, Kazan : IOP Publishing) [doi: 10.1088/1742-6596/1158/2/022028]

8. Бильченко Г.Г. Алгоритмы установления типа двусторонних движений носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости / Г.Г. Бильченко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. — Воронеж : Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019. — С. 605–611.

9. Бильченко Г.Г. (ст.) Движения особого носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости с анизотропным трением / Г.Г. Бильченко // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения–2019» : материалы научной конференции, 8–12 апреля 2019 г. — СПб. : Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2019.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННЫМ МЕТРИКОЙ

А.М. Бирюков (Москва, НИУ МЭИ)
birukovalmix@mail.ru

В работе рассматривается вопрос о корректной разрешимости задачи Коши для систем комплексных линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - A(t,z,D)u = h(t,z),$$

$$u(t_0,z) = \varphi(z),$$

в банаховых пространствах аналитических функций с интегральной метрикой типа пространства L_1 с весом. Функции из указанных пространств могут допускать особенности степенного характера при подходе к боковой границе области, в которой определено решение. Выводятся необходимые и достаточные условия, при выполнении которых поставленная задача Коши является корректной в заданной шкале функциональных пространств. Таким образом, даётся точное описание структуры систем дифференциальных уравнений, для которых имеет место корректность задачи Коши. Ранее в работе [1] были изучены подобные задачи в пространствах с супремум-нормами и получены необходимые и достаточные условия для разрешимости в соответствующей шкале. Оказывается, что в случае интегральных пространств условия для локальной корректности совпадают с условиями для случая пространств с супремум-нормами.

Литература

1. Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной области / Ю.А. Дубинский. — М. : Изд-во МЭИ, 1996. — 180 с.

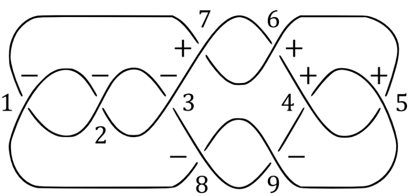
КРУЧЕНИЯ НА ПЛОСКИХ ДИАГРАММАХ УЗЛОВ

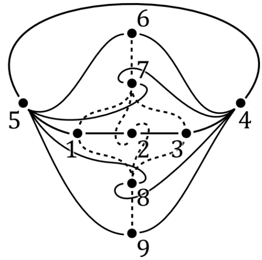
О.Н. Бирюков (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана)
onbiryukov@yandex.ru

Рассматривается узел K как вложение окружности $\mathbb{S}^1$ в пространство $\mathbb{R}^3$ и плоская диаграмма D_K узла K.

Кручением на плоской диаграмме D_K будем называть всякий двуугольник, стороны которого не пересекаются. Кручение будем называть *остовным*, если при выборе некоторой ориентации плоской диаграммы D_K ориентация сторон двуугольника задаёт одинаковую ориентацию окружности, образованной сторонами этого двуугольника. Кручение будем называть *циклическим*, если оно не является остовным.

Закодируем структуру кручений на плоской диаграмме D_K с помощью графа, вершины которого соответствуют перекрёсткам на плоской диаграмме и снабжаются знаком «плюс» или «минус» в зависимости от типа перекрёстка, а рёбра графа соответствуют кручениям. С помощью данного графа можно решать некоторые задачи распознавания узлов (см. также [2]). В качестве примера на следующем рисунке приведена плоская диаграмма тривиального узла (с указанием знаков перекрёстков) и построенный по ней граф (рёбра, изображённые сплошными линиями, отвечают циклическим кручениям, а прерывистыми линиями — остовным).





Известно [1], что данную плоскую диаграмму нельзя преобразовать в тривиальную диаграмму (не имеющую перекрёстков) последовательным применением движений Райдемайстера так, чтобы на каждом шаге количество перекрёстков не увеличивалось. В то же время приведённый граф легко преобразуется в тривиальный без увеличения его сложности (количества вершин и количества рёбер) на каждом шаге, что позволяет распознать тривиальность узла.

Литература

1. Goeritz L. Bemerkungen zur knotentheorie / L. Goeritz // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1934. — V. 10. — P. 201–210.

2. Бирюков О.Н. Закручивания на плоских диаграммах узлов / О.Н. Бирюков // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики : Труды X приокской научной конференции. — Коломна : ГСГУ, 2018. — С. 23–25.

О ТЕОРЕМЕ ЖОРДАНА-ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Е.И. Бирюкова (Воронеж, ВГУ)
elenabiryukova2010@yandex.ru

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор с инволюцией [1]:

$$Ly = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1). \tag{1}$$

Считаем, что область определения оператора (1) состоит из непрерывно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевому условию в (1). Получены достаточные условия, при которых ряд Фурье по собственным функциям оператора L равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,1]$. При этом используется равносходимость с рядом для простейшего оператора (см. [2]) и метод контурного интегрирования резольвенты оператора (резольвента простейшего оператора исследовалась в [3]).

Теорема (Жордана-Дирихле). *Если* $f(x) \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$ *и* $f(0) = f(1)$, *то* $\lim\limits_{r\to\infty} \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - S_r(f,x)| = 0.$

Также в докладе будут представлены результаты по исследованию спектральных свойств оператора с инволюцией на геометрическом графе.

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // Доклады РАН. — 2007. — Т. 414, № 4. — С. 1309–1312.

2. Бурлуцкая М.Ш. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для фнкционально-дифференциальных операторов / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. :

Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9, вып.4. — С. 3–10.

3. Бирюкова Е.И. О резольвенте одного функционально-дифференциального оператора инволюцией / Е.И. Бирюкова // Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения : материалы III Международного молодежного симпозиума. — Воронеж, 2017. — С. 20–22.

УРАВНЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МАГНИТОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

С.В. Богомолов, Н.Б. Есикова
(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
bogomo@cs.msu.su, esikova.nata@yandex.ru

На основании стохастической микроскопической столкновительной модели движения заряженных частиц в сильном внешнем магнитном поле строится иерархия уравнений магнитной гидродинамики. Переход ко всё более грубым приближениям происходит в соответствии с уменьшением параметра обезразмеривания, аналогичного числу Кнудсена в газовой динамике. В результате получаются стохастические и неслучайные макроскопические уравнения, отличающиеся от магнитного аналога системы уравнений Навье–Стокса, а также от систем магнитной квазигидродинамики. Главной особенностью этого вывода является более точное осреднение по скорости благодаря аналитическому решению стохастических дифференциальных уравнений по винеровской мере, в виде которых представлена промежуточная мезо–модель в фазовом пространстве. Такой подход существенно отличается от традиционного, использующего не сам случайный процесс, а его функцию распределения. Акцент ставится на ясности допущений при переходе от одного уровня детализации к другому, а не на численных экспериментах.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, уравнение Навье–Стокса, сила Лоренца, уравнения магнитной гидродинамики и квазигазодинамики; случайные процессы, стохастические дифференциальные уравнения по пуассоновской и винеровской мерам; метод частиц.

Литература

1. Богомолов С.В. Микро-макро модели Фоккера-Планка-Колмогорова для газа из твёрдых сфер / С.В. Богомолов, Н.Б. Есикова, А.Е. Кувшинников // Матем. моделирование. — 2016. — Т. 28, № 2. —С. 65—85. (Math. Models Comput. Simul. — 2016. —Vol. 8, № 5. — С. 533—547.)

2. Bogomolov S.V. On gas dynamic hierarchy / S.V. Bogomolov, N.B. Esikova, A.E. Kuvshinnikov, P.N. Smirnov // The Seventh Conference on Finite Difference Methods, FDM–2018. — LNCS, Springer, 2019. — Vol. 11386. — P. 1–8.

АТТРАКТОРЫ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД С ПАМЯТЬЮ[1]

А.С. Болдырев, В.Г. Звягин (Воронеж, ВГУ)

al-boldyrev@mail.ru, zvg_vsu@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — ограниченная область с гладкой границей Г. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \mathrm{Div}\mathcal{E}(v) - \mu_1 \mathrm{Div} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\, ds =$$

$$= -\mathrm{grad}\, p + f, \qquad \mathrm{div}\, v = 0, \qquad (t,x) \in (0, +\infty) \times \Omega, \tag{1}$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x)) ds, \quad t, \tau \in [0, +\infty),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$v\Big|_\Gamma = 0, \quad v(0,x) = v^0(x),\ x \in \Omega, \quad \int_\Omega p\, dx = 0. \tag{3}$$

Здесь $v(t,x)$ — вектор-функция скорости; $p(t,x)$ — давление; $f(x)$ — плотность внешних сил; $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\lambda > 0$ — некоторые константы; $\mathcal{E}(v)(t,x)$ — тензор скоростей деформации. Разрешимость в слабом смысле задачи (1)–(3) установлена в [1]. Необходимые определения и факты теории аттракторов можно найти в [2–3].

Теорема. *Пусть $f \in V^*$ и $\mu_0 - \mu_1\lambda > 0$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор и глобальный аттрактор пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ задачи (1)–(3).*

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 14.Z50.31.0037).

Литература

1. Zvyagin V.G. Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory / V.G. Zvyagin, V.P. Orlov // Nonlinear Anal. — 2018. — Vol. 172. — P. 73–98.

2. Звягин В.Г. Аттракторы для уравнений моделей движения вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, С.К. Кондратьев. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. — 266 с.

3. Zvyagin V.G. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics / V.G. Zvyagin, D.A. Vorotnikov. — Berlin : De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl. **12**, 2008. — 230 p.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧАДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В КРАЕВОМ УСЛОВИИ[1]

Н.П. Бондаренко (Самара, Самарский университет; Саратов, СГУ)

bondarenkonp@info.sgu.ru

Рассмотрим краевую задачу $L = L(M, A, B)$ для уравнения

$$iy'(x) + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi),$$

с краевым условием, зависящим полиномиально от спектрального параметра: $A(\lambda)y(\pi) - B(\lambda)y(0) = 0$.

Здесь $M(x)$ — комплексная функция из класса $L_{2,\pi} := \{f\colon (\pi - x)f(x) \in L_2(0,\pi)\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$, $B(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k$, где a_k и b_k, $k = \overline{0,n}$, — комплексные числа, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$. Без ограничения общности будем считать, что $a_n = 1$.

Теорема 1. *Спектр задачи L имеет вид $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{\tilde\lambda_j\}_{j=1}^{n}$, причем*

$$\lambda_k = 2k + \beta + \varkappa_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \beta = \frac{i}{\pi}\ln b_n, \quad \{\varkappa_k\} \in l_2. \qquad (1)$$

Теорема 2. *Для любого набора комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{\tilde\lambda_j\}_{j=1}^{n}$, удовлетворяющего (1), и любого многочлена $A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ существуют единственные функция*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

$M(x) \in L_{2,\pi}$ и многочлен $B(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k$, для которых спектр задачи $L = L(M, A, B)$ совпадает с Λ.

Доказательства теорем основаны на методах работ [1, 2].

Литература

1. Buterin S.A. The invese problem of recovering the Volterra convolution operator from the incomplete spectrum of its rank-one perturbation / S.A. Buterin // Inverse Problems. — 2006. — Vol. 22. — P. 2223–2236.

2. Buterin S.A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator / S.A. Buterin // Results in Mathematics. — 2007. — Vol. 50, no. 3-4. — P. 73–181.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБО СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ[1]

М.Н. Ботороева, О.С. Будникова (Иркутск, ПИ ИГУ)

masha888888@mail.ru, osbud@mail.ru

В докладе рассмотрены дифференциально-алгебраические уравнения со слабой особенностью

$$t^a A x'(t) + B(t)x(t) = f(t), x(0) = x_0, 0 < t \leqslant 1, 0 < a < 1,$$

где A, $B(t)$ — заданные $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ — n-мерные известная и искомая вектор-функциии, $det A = 0$.

Предложено переписать данную задачу в интегральной форме

$$Ax(t) + \int_0^t s^{-a} K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, 0 < a < 1.$$

Для численного решения интегральной системы предложены многошаговые методы, основанные на интегрировании произведения [1], явных методах Адамса для интегрального слагаемого и экстраполяционных формулах для главной части [2], вида:

$$A \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j} + \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-51-54001_Вьет_а).

Обсуждаются преимущества данного подхода над коллокационными методами.

Приведены результаты численных расчетов.

Литература

1. Weiss R. A Product Integration Method for a Class of Singular First Kind Volterra Equations / R. Weiss, R.S. Anderssen // Numer. Math. — 1972. — V. 18, № 5. — P. 442–456.

2. Будникова О.С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами / О.С. Будникова, М.В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 5. — С. 829–839.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЗАМОРАЖИВАНИЯ ЖИВОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ

Б.К. Буздов (Нальчик, ИИПРУ КБНЦ РАН)
beslan.buzdov@yandex.ru

Математическое моделирование процесса теплопроводности при замораживании живой биологической ткани приводит к постановкам задач типа Стефана, характерной особенностью которых является существование стационарных решений. Стабилизация во времени поля температуры достигается в связи с тем, что отводимый поток тепла компенсируется возникающими в биоткани источниками тепла, обусловленными крово- и лимфотоком, метаболизмом, окислительными химическими реакциями, а также теплом, выделяемым при замерзании внеклеточной и внутриклеточной жидкости. Специальная нелинейная зависимость источников тепла от искомого температурного поля позволяет учесть реально наблюдаемый на практике эффект пространственной локализации тепла.

В работе приводится новая математическая модель, соответствующая отводу тепла криоаппликатором формы прямоугольного параллелепипеда, а также метод ее численного исследования, основанный на применении локально-одномерных разностных схем «сквозного счета» [1] и успешно опробованный ранее при решении ряда двумерных задач [2,3]. Модель представляет собой трехмерную трехфазную краевую задачу типа Стефана, и имеет приложение в криохирургии.

Литература

1. Будак Б.М. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана / Б.М. Будак , Е.Н. Соловьева , А.Б. Успенский // Журнал вычисл. математики и матем. физики. — 1965. — Т. 5, № 5. — С. 828–840.

2. Буздов Б.К. Численное исследование одной двумерной математической модели с переменным коэффициентом теплообмена, возникающей в криохирургии / Б.К. Буздов // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 22–28.

3. Буздов Б.К. Моделирование криодеструкции биологической ткани / Б.К. Буздов // Журн. Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 3. — С. 27–37.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Р.Р. Булатова (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
regina.bulatova@mech.math.msu.su

В случае двумерного нестационарного течения модифицированная система уравнений пограничного слоя имеет вид:

$$\nu(1+3du_y^2)u_{yy} - u_t - uu_x - vu_y = -U_t - UU_x, \quad u_x + v_y = 0 \quad (1)$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X,\, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,x,y) = u_0(x,y),\;\; u(t,0,y) = 0,\;\; u(t,x,0) = 0,\;\; v(t,x,0) = v_0(t,x),$$

$$u(t,x,y) \to U(t,x) \text{ при } y \to \infty, \quad (2)$$

где $U(t,0) = 0$, $U_x(t,0) > 0$, $U(t,x) > 0$ при $x > 0$, а функция $v_0(t,x)$ предполагается заданной. Условия $U(t,0) = 0$ и $u(t,0,y) = 0$ определяют точку $x = 0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости и пограничный слой симметричен относительно этой точки. Предполагаем, что $U(t,x) = xV(t,x)$, $V(t,x) > 0$, и V, V_x, v_0 ограничены при $0 < x \leqslant X$.

В переменных Крокко система (1) с граничными условиями (2) перепишется в виде

$$\nu\big(1+3dU^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2-1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2 w_\eta^2 w^3 -$$

$$-w_\tau + (\eta - 1)\frac{U_t}{U}w_\eta - \frac{U_t}{U}w = 0$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X,\, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w|_{\eta=1} = 0, \quad w|_{\tau=0} = w_0,$$

$$\Big(\nu\big(1 + 3dU^2w^2\big)ww_\eta - v_0 w + U_\xi + \frac{U_t}{U}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.$$

Была доказана теорема существования и единственности решения задачи (1), (2) при указанных ранее условиях.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. — М. : Наука. Физмалит, 1970.

ОПТИМИЗАЦИЯ В РАМКАХ НАДЕЖНОСТНОГО И СТОИМОСТНОГО ПОДХОДОВ[1]

Е.В. Булинская (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
ebulinsk@yandex.ru

Для исследования любого реального процесса или системы необходимо построить соответствующую математическую модель. В прикладной теории вероятностей часто используются так называемые модели входа-выхода (см., напр., [1]) для нахождения оптимального функционирования системы. В соответствии с выбором целевой функции (меры риска) различают два основных подхода — надежностный и стоимостной. Первый из них, направленный на минимизацию вероятности разорения (или максимизацию времени безотказной работы системы), все еще очень популярен в страховании. Стоимостной подход, нацеленный на минимизацию издержек (или максимизацию дохода), с самого начала применялся в теории запасов и финансах (см., напр., [2]). В наши дни происходит унификация обоих подходов, вызванная переплетением актуарных и финансовых методов исследования. Кроме того, оказалось, что во многих случаях системы с дискретным временем лучше описывают сущность изучаемых процессов. Поэтому в докладе изложение начинается с описания методов динамического программирования.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00468).

Далее вводятся мартингальные методы стохастического контроля и рассматривается вывод уравнений Беллмана-Гамильтона-Якоби (см., напр., [3]) для моделей с непрерывным временем. Для иллюстрации приводятся примеры оптимизации нескольких моделей страхования и теории запасов.

Литература

1. Bulinskaya E.V. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E.V. Bulinskaya // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2017. — V. 208. — P. 349–408.

2. Bulinskaya E.V. Cost approach versus reliability /E.V. Bulinskaya // Proceedings of International Conference DCCN-2017, 25-29 September 2017. — Moscow : Technosphera, 2017. — P. 382–389.

3. Schmidli H. Stochastic control in insurance / H. Schmidli. — London : Springer, 2008. — 254 p.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОПУЛЯЦИИ[1]

Е.Вл. Булинская (Новосибирск, НГУ)
bulinskaya@mech.math.msu.su

Исследуется модель распространения популяции, называемая каталитическим ветвящимся случайным блужданием (КВСБ) по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Частицы (особи, бактерии и т.п.) могут размножаться и гибнуть только в присутствии катализаторов, расположенных в произвольном конечном числе точек решетки, см., напр., [2] и [3]. Изучается эволюция в пространстве и времени случайного облака частиц. При неограниченно растущем времени нас интересует общая картина поведения «фронта» популяции частиц с должным образом нормированными координатами. Результаты (см., напр., [1] и [4]) существенно зависят от «тяжести» хвостов распределения скачка блуждания. В случае «легких» хвостов нами доказано, что нормированный фронт популяции сходится почти наверное к явно найденной выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^d$. Излагаются и новые результаты автора, описывающие

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-00-01173) в Новосибирском государственном университете. Автор является доцентом Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

(в том числе звездную невыпуклую) предельную форму упомянутого фронта, когда скачки блуждания имеют тяжелые хвосты.

Литература

1. Carmona Ph., Hu Y. The spread of a catalytic branching random walk / Ph. Carmona, Y. Hu // Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probability and Statistics. — 2014. — Vol. 50, № 2. — P. 327–351.

2. Булинская Е.Вл. Полная классификация каталитических ветвящихся процессов / Е.Вл. Булинская // Теория вероятностей и ее применения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 639–666.

3. Булинская Е.Вл. Сильная и слабая сходимость размера популяции в надкритическом каталитическом ветвящемся процессе / Е.Вл. Булинская // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 465, № 4. — С. 398–402.

4. Bulinskaya E.Vl. Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice / E.Vl. Bulinskaya // Stochastic processes and their applications. — 2018. — Vol. 128, № 7. — P. 2325–2340.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА[1]

С.А. Бутерин (Саратов, СГУ)

buterinsa@info.sgu.ru

Пусть $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — спектр краевой задачи $D = D(m_1, m_2)$ вида

$$By' + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \;\; y_1(0){=}y_1(\pi){=}0, \qquad (1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} m_1(x) & m_2(x) \\ -m_2(x) & m_1(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

где функции $m_j(x)$ комплекснозначны и $(\pi - x)m_j(x) \in L_2(0,\pi)$.

В [1] установлено, что задание спектра однозначно определяет функции $m_j(x)$, $j = 0, 1$. Также было доказано, что последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является спектром задачи D вида (1) тогда и только тогда, когда имеет место асимптотика

$$\lambda_n = n + \varkappa_n, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

В настоящей работе получена устойчивость решения обратной задачи. Наряду с D рассмотрим краевую задачу $\tilde{D} = D(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$.

Теорема 1. *Существует число* $\delta > 0$, *зависящее от коэффициентов задачи* D, *такое что если спектр* $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *задачи* $\tilde{D}$ *удовлетворяет условию* $\Lambda := \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n - \tilde{\lambda}_n|^2} < \delta$, *то имеют место оценки* $\|(\pi - x)(m_j(x) - \tilde{m}_j(x))\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant C\Lambda$, $j = 1, 2$, *с некоторой константой* $C > 0$, *зависящей только от* D.

Доказательство основано на одном результате работы [2].

Литература

1. Bondarenko N.P. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator / N.P. Bondarenko, S.A. Buterin // Res. Math. — 2017. — Vol. 71. — P. 1521–1529.

2. Buterin S. On global solvability and uniform stability of one nonlinear integral equation / S. Buterin, M. Malyugina // Results Math. — 2018. — 73:117. — P. 1–19.

ПСЕВДОКОСИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ПОСТОЯННОГО ТИПА

Р.Р. Валеев, А.Р. Рустанов, С.В. Харитонова

(Москва, ФГБУ Рослесинфорг;
Москва, ИФО НИУ МГСУ;
Оренбург, ОГУ)

ruslan-01@yandex.ru, aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

Определение 1. [1] *AC-структура называется квазикосимплектической (короче, QC_S-) структурой, если*

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y = \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi, X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

где ∇ *— риманова связность метрики* $g = \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$.

Многообразие, снабженное квазикосимплектической структурой, называется квазикосимплектическим (короче, QC_S-) многообразием.

Определение 2. *QC_S-структуру назовем псевдокосимплектической (короче, PC_S-) структурой, если*

1) $d = 0$; 2) $\Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = 0; \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Определение 3. [2] *Q-алгеброй называется тройка* $\{V, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, *\}$, *где*

- V — *модуль над коммутативным ассоциативным кольцом* $\boldsymbol{K}$ *с (нетривиальной) инволюцией;*

- $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ — *невырожденная эрмитова форма на* V*;*

- $*$ — *бинарная операция* $*: V \times V \to V$*, антилинейная по каждому аргументу, для которой выполняется аксиома Q-алгебры*

$$\langle\langle X * Y, Z\rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, X * Z\rangle\rangle} = 0, X, Y, Z \in V.$$

Если, например, $\mathbf{K}=\boldsymbol{C}$, то Q-алгебра называется комплексной.

Определение 4. [3] *Антикоммутативная Q-алгебра называется* $\boldsymbol{K}$*-алгеброй.*

В модуле $\mathcal{X}(\mathrm{M})$ почти контактного метрического многообразия естественно вводится структура Q-алгебры $\mathcal{B}$ над кольцом комплекснозначных гладких функций с операцией [3]

$$X * Y = \frac{1}{4}\{\Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y - \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y\}$$

и метрикой

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \langle X, Y\rangle + \sqrt{-1}\,\langle X, \Phi Y\rangle\,, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Эта Q-алгебра называется присоединенной.

Определение 5. [4] *Комплексная K-алгебра* $\mathcal{B}$ *называется K-алгеброй постоянного типа, если* $\exists\ c \in C\ \forall X, Y \in \mathcal{L} : \langle\langle X, Y\rangle\rangle = 0 \Rightarrow \|X * Y\|^2 = c\,\|X\|^2\,\|Y\|^2$.

Определение 6. *AC-многообразие M называется многообразием точечно постоянного типа, если его присоединенная K-алгебра имеет постоянный тип в каждой точке из M. Функция c, если она существует, называется постоянной типа AC-многообразия. Если к тому же c=const, то M называется AC-многообразием глобально постоянного типа.*

Теорема 1. *Точечное постоянство типа связного* PC_S*-многообразия размерности свыше двух равносильно глобальному постоянству его типа.*

Теорема 2. *Класс* PC_S*-многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом* SPC_S*-многообразий.*

Теорема 3. *Класс* PC_S*-многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом* SPC_S*-многообразий. Класс* PC_S*-многообразий ненулевого постоянного типа совпадает с классом*

AC-многообразий локально эквивалентных произведению шестимерного NK-многообразия на вещественную прямую.

Литература

1. Capursi M. Quasi cosymplectic manifolds / M. Capursi // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1987. — Vol. 32, № 1. — P. 27–35.

2. Kirichenko V.F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry, I / V.F. Kirichenko // Geometriae Dedicata. — 1994. — Vol. 51, № 1. — P. 75—104.

3. Кириченко В.Ф. K-алгебры и K-пространства постоянного типа с индефинитной метрикой / В.Ф. Кириченко // Мат. заметки. — 1981. — Т. 29, № 2. — С. 265–278.

4. Кириченко В.Ф. Почти эрмитовы многообразия постоянного типа / В.Ф. Кириченко // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 259, № 6. — С. 1293–1297.

ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ДИСКРЕТНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ[1]

В.Б. Васильев, О.А. Тарасова (Белгород, НИУ БелГУ)
vbv57@inbox.ru

Мы рассматриваем следующую краевую задачу

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m_+, \tag{1}$$

$$u|_{x_m=0} = g(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{m-1}, \tag{2}$$

где A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

с положительными постоянными c_1, c_2.

Известно, что краевая задача (1), (2) однозначно разрешима в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^m_+)$ для любой правой части $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$ при некоторых ограничениях на индекс факторизации æ символа $A(\xi)$, именно $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$ [1].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.7311.2017/8.9).

Для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) строится дискретный псевдодифференциальный оператор A_d, действующих в пространствах функций дискретного аргумента $H^s(h\mathbb{Z}^m_+)$ [3,4] и формулируеттЯ соответствующая дискретная краевая задача, однозначная разрешимость которой исследуется методами [2].

Литература

1. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г.И. Эскин. — М. : Наука, 1973. — 236 с.

2. Васильев А.В. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках / А.В. Васильев, В.Б. Васильев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 642–649.

3. Vasilyev A.V. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space / A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev // Math. Model. Anal. — 2018. —V. 23, № 3. — P. 492–506.

4. Vasilyev A.V. On some discrete boundary value problems in canonical domains / A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev // Differential and Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. Stat. — V. 230. — Cham : Springer. — 2018. — P. 569–579.

О НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ[1]

П.А. Вельмисов, Ю.В. Покладова, У.Д. Мизхер (Ульяновск, УлГТУ)

velmisov@ulstu.ru

Рассматриваются математические модели в задачах о динамике и устойчивости деформируемых элементов (упругих пластин) конструкций, взаимодействующих с потоком жидкости или газа (вибрационные устройства, защитные экраны, датчики давления). Математические модели представляют собой начально-краевые задачи для связанных систем дифференциальных уравнений с частными производными для гидродинамических функций и функций деформаций упругих элементов (см., например, [1],[2]). Для описания динамики упругих элементов используются как линейные, так и нелинейные модели твердого деформируемого тела. Аэрогидродинамическое воздействие на конструкции определяется из уравнений газовой динамики в модели идеальной или вязкой среды.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проект № 18-41-730015-р_а).

Для исследования динамики и устойчивости деформируемых элементов, взаимодействующих с идеальной средой, использовался метод Бубнова-Галеркина и метод функционалов Ляпунова. Проведен численный эксперимент в системе Mathematica с целью определения характера колебаний. Исследования динамики деформируемых элементов, взаимодействующих с вязкой жидкостью, проводились в системе ANSYS.

Литература

1. Вельмисов П.А. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем / П.А. Вельмисов, Ю.В. Покладова. — Ульяновск : УлГТУ, 2018. — 152 с.

2. Вельмисов П.А. Динамическая устойчивость деформируемых элементов аэроупругих конструкций / П.А. Вельмисов, А.В. Анкилов, Ю.В. Покладова // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: VIII Международная научная молодежная школа-семинар им. Е.В. Воскресенского. — Саранск : СВМО, 2018.— С. 134–141.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин (Белгород, БелГУ)

virch@bsu.edu.ru

Разрешимость начально-краевой задачи для базового уравнения Навье-Стокса (см., например, [1])

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \eta\Delta\mathbf{v} \qquad (1)$$

динамики вязкой несжимаемой жидкости до сих остается одной из главных проблем современной математической физики. Особенно остро эта проблема стоит относительно существования глобальных по времени решений, описывающих трехмерные течения жидкости. Для двумерных течений в случае ограниченных областей эта проблема была положительно решена О.А. Ладыженской, которые суммированы в [2]. Кроме того, в трехмерном случае удалось доказать существование в трехмерном случае стационарных решений [3]. Однако, до настоящего времени, нет доказательства разрешимости начально-краевой задачи даже для двумерных течений в случае неограниченных областей при довольно широком предположении о форме области, занимаемой движущейся жидкостью. Сложность решения проблемы связана как с нелинейностью самого уравнения Навье-Стокса, так и с проблемой учета условия несжимаемости $(\nabla, \mathbf{v}) = 0$ при доказательстве существования решения.

В настоящем сообщении мы предлагаем такой метод учета дифференциальной связи, представляющей условие несжимаемости, позволяющий выделять класс векторных полей, для которых ставится начально-краевая задача. Этот метод позволяет непосредственно доказать разрешимость задачи для двумерных течений в неограниченных областях. Он основан на выявлении необходимых и достаточных условий, автоматически обеспечивающих выполнимость условия соленоидальности $(\nabla, \mathbf{v}) = 0$ поля скоростей в течение эволюции. Ранее этот метод был использован [4] при анализе уравнения Эйлера при $\eta = 0$. Он основан на следующем утверждении.

Теорема 1. *Если гладкое векторое двумерное поле* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ *удовлетворяет условию* $(\nabla, \mathbf{v}) = 0$, *то для того чтобы оно удовлетворяло уравнению (1), необходимо и достаточно чтобы матрица* $A_{jk} = \nabla_k v_j$ *была нильпотентной.*

Нильпотентность матрицы позволяет в двумерном случае привести уравнение (1) к виду, на основе которого возникает возможность установить тот тип границ области Ω (в частности, можно положить $\Omega = \mathbb{R}^2$), в которой происходит движение жидкости, и класс векторных полей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$, представляющих начальные условия, для которых существует глобальное решение начально-краевой задачи для уравнения (1). Доказана

Теорема 2. *Для того, чтобы начально-краевая задача для двумерного гладкого поля* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, *заданного на всем пространстве* $\mathbb{R}^2$, *которое удовлетворяет уравнению (1) и условию*

$$(\nabla, \mathbf{v}) = 0\,,$$

была разрешима, необходимо и достаточно чтобы это поле представляло плоско-параллельное течение, то есть

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} f\big((\mathbf{n}, \mathbf{x}), t\big)\,, \tag{2}$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$ *При этом функция* $f(\zeta, t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\dot{f} = \eta f''\,,$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной $\zeta = (\mathbf{n}, \mathbf{x})$.

Литература

1. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука, 1986. — 736 с.

2. Ладыженская О.А. Математические вопросы движения вязкой жидкости / О.А. Ладыженская. — М. : Наука, 1970 — 288 с.

3. Ладыженская О.А. Исследование уравнения Навье-Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская // Успехи математических наук. — 1959. — Т. XIV, №3 (87). — С. 75–97.

4. Вирченко Ю.П. Стационарные плоские течения в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости / Ю.П. Вирченко // Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики : материалы Второго Международного Российско-Казахского симпозиума. — Нальчик : НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2011. — С. 70–72.

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

А.А. Владимиров, Е.С. Карулина (Москва,
ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ РАН,
РЭУ им. Г.В. Плеханова)
vladimirov@shkal.math.msu.su, karulinaes@yandex.ru

Рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения

$$(py'')'' - (qy')' = \lambda ry$$

и краевых условий

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

$$(py)''(1) - \alpha\lambda y'(1) = [(py'')' - qy'](1) + \beta\lambda y(1) = 0,$$

где λ — спектральный параметр. Показывается, что в случае, если все собственные значения

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$$

рассматриваемой задачи положительны, то они являются простыми, причем производные y_n' соответствующих собственных функций имеют в точности n перемен знака.

[1] Первый автор поддержан РНФ (проект № 17-11-01215).

Некоторые частные случаи рассматриваемой задачи были рассмотрены, в частности, в работе [1].

Литература

1. Керимов Н.Б. Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии / Н.Б. Керимов, З.С. Алиев // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 10. — С. 65–86.

2. Владимиров А.А. К вопросу об осцилляционных свойствах положительных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами / А.А. Владимиров // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 800–806.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НАСЛЕДСТВЕННОЙ МЕХАНИКЕ[1]

В.В. Власов (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
vicvvlasov@rambler.ru

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1], [2]) и имеют ряд других важных приложений. В частности, эти уравнения могут быть реализованы в виде следующей системы интегро-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №17-11-01215).

дифференциальных уравнений в частных производных

$$\rho\ddot{u}(x,t) - Lu(x,t) + \int\limits_0^t K_1(t-s)L_1u(x,s)ds + \\ + \int\limits_0^t K_2(t-s)L_2u(x,s)ds = f(x,t), \quad (1)$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, $t > 0$, среда заполняет ограниченную область $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, u удовлетворяет условиям Дирихле в области Ω с гладкой границей, $L_1 = \mu \cdot (\Delta u + \cdot \mathrm{grad\ div} u)$, $L_2 = \lambda \cdot \mathrm{grad\ div} u$, $Lu = (L_1 + L_2)u$ — оператор Ламе теории упругости, K_1, K_2 функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см., [1], [2]).

Эти результаты являются обобщением результатов, опубликованных в работе [3].

Литература

1. Власов В.В. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан — М. : МАКС Пресс, 2016. — 488 с.

2. Власов В.В. Спектральный анализ линейных моделей вязкоупругости / В.В. Власов, Н.А. Раутиан // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2017. — Т. 132. — С. 25—29.

3. Vlasov V.V. Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory / V.V. Vlasov, N.A. Rautian // Trans. Moscow Math. Soc. — 2014. — V. 75. — P. 185–204.

ПРОБЛЕМА МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ СОЧЛЕНЕННЫХ МАЯТНИКОВ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ОДНОРОДНЫМИ НЕСЖИМАЕМЫМИ ЖИДКОСТЯМИ[1]

В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский

(Симферополь, Таврическая академия Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского)

victor.voytitsky@gmail.com, kopachevsky@list.ru

Рассматривается гидромеханическая система, находящаяся в поле сил тяжести и малых внешних сил, которая состоит из связанных друг с другом тел, когда первый маятник закреплён в неподвижной точке с помощью сферического шарнира, второй подобным образом прикреплён к первому и т.д. Будем считать, что в каждом маятнике имеется полость, целиком заполненная однородной несжимаемой идеальной или вязкой жидкостью (либо системой слоёв идеальных или вязких жидкостей), причём в состоянии равновесия все точки подвеса и все центры масс маятников находятся на одной вертикальной оси, а границы раздела между жидкостями горизонтальны.

Будем выделять три подкласса подобных систем: консервативные системы (все жидкости в полостях маятников идеальные, а трение в шарнирах не учитывается), диссипативные системы (все жидкости в полостях маятников вязкие, трение в шарнирах учитывается), а также слабо диссипативные системы (все жидкости идеальные, трение в шарнирах (возможно не всех) учитывается).

Процесс малых движений такой гидромеханической системы будем описывать набором $\vec{\delta}_k(t)$ векторов углового перемещения каждого маятника (угловые скорости $\vec{\omega}_k(t) = d\vec{\delta}_k/dt$), набором полей скоростей $\vec{u}_{kj}(t,x)$ и динамических давлений $p_{kj}(t,x)$ в каждой жидкости Ω_{kj} из слоя j, находящегося в k-том маятнике, а также малыми функциями $\zeta_{kj}(t,x)$, $x \in \Gamma_{kj}$, описывающими отклонения поверхностей раздела между жидкостями вдоль нормалей относительно равновесных плоскостей Γ_{kj} в процессе движения.

Математическая постановка общей задачи состоит из линеаризованных уравнений изменения кинетических моментов системы тел относительно точек подвеса O_k, уравнений неразрывности,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке второго соавтора грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

уравнений Эйлера либо Навье-Стокса в областях Ω_{kj} с краевыми условиями непротекания либо прилипания на твердых стенках, а также кинематических и динамических условий на границах раздела Γ_{kj}, условий сохранения объема и начальных условий.

Предложен универсальный операторный подход, позволяющий свести каждую конкретную начально-краевую задачу такого вида к задаче Коши для системы дифференциально-операторных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве $H = H_1 \oplus H_2$:

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & gC_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = z_2^0, \quad (1)$$

где $z_1 \in H_1$ — набор динамических переменных, $z_2 \in H_2$ — набор кинематических переменных, $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ — оператор кинетической энергии, $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$ — оператор потенциальной энергии, $0 \leqslant A_1$ — оператор диссипации энергии, а B_{12} и $B_{21} = -B_{12}^*$ связаны с обменом между кинетической и потенциальной энергиями системы.

Для финальной задачи (1) получены достаточные условия существования и единственности сильного решения задачи на конечном отрезке времени в случае статической устойчивости системы по линейному приближению ($C_2 \gg 0$) или в ее отсутствие. Описаны достаточные условия (в терминах физических параметров системы), при которых система является статически устойчивой.

Соответствующая спектральная задача (решения, зависящие от времени по закону $e^{-\lambda t}$) в случае консервативной устойчивой гидросистемы имеет дискретный спектр, состоящий из нулевого собственного значения и двух ветвей взаимно сопряжённых мнимых собственных значений с предельной точкой на бесконечности, система собственных элементов образует ортогональный базис в H. Для нахождения неизвестных частот и мод собственных колебаний маятников установлены новые вариационные принципы, доказаны асимптотические формулы.

Для диссипативной системы спектральная задача приводится к изучению пучка С.Г. Крейна. В устойчивом случае спектр состоит из двух ветвей положительных собственных значений с предельными точками $+0$ и $+\infty$, а также, возможно, из конечного числа комплексно сопряженных пар собственных значений. В неустойчивом случае задача может иметь дополнительно не более конечного числа отрицательных собственных значений. Система собственных элементов, отвечающих каждой из двух положительных ветвей, образует p-базис в H_1 (возможно после проектирования) либо в его подпространстве конечной коразмерности.

Для слабо диссипативных систем в случае $C_2 \gg 0$ спектр является дискретным с единственной предельной точкой на бесконечности. Кроме нулевого собственного значения он состоит из комплексно сопряжённых пар собственных значений в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \mathrm{const}$. Система соответствующих собственных элементов двукратно полна в H_1, из ее частей можно составить базис Абеля-Лидского со скобками в пространстве $H_1 \oplus H_1$.

Литература

1. Копачевский Н.Д. О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью / Н.Д. Копачевский, В.И. Войтицкий, З.З. Ситшаева // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2017. — Т. 3, № 4. — С. 627–677.

2. Войтицкий В.И. О малых колебаниях системы из трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями / В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский // Современные методы и проблемы математической гидродинамики – 2018 : материалы Международной научной конференции. — 2018. — С. 84–91.

3. Войтицкий В.И. О малых движениях физического маятника, содержащего полость, заполненную системой однородных несмешивающихся жидкостей / В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский // Сборник материалов международной конференции XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2018). Секции 1-3. — Симферополь : Полипринт, 2018. — С. 58–62.

4. Войтицкий В.И. О малых движениях физического маятника с полостью, заполненной системой трёх однородных несмешивающихся вязких жидкостей / В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2018. — № 3(40). — С. 22–45.

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Т.С. Гаджиев[a], **А.В. Мамедова**[b] (Баку, Азербайджан,
[a] Институт Математики и Механики НАН Азербайджана;
[b] Бакинский Государственный Университет)
tgadjiev@mail.ru, aisenmemmedova@gmail.com

Пусть $\Omega \subset R^n$ гладкая ограниченная область и $T > 0$. Обозначим $Q = \Omega \times (0,T]$. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}\,(\Phi(\mathrm{b(u)})\mathrm{Du}) = 0 & \text{в} \quad Q \\ \quad u = f & \text{на} \quad \Omega \times [0,T] \\ \ u(x,0) = u_0 & \text{на} \quad \Omega \end{cases}$$

Для функции $b : R \to R$ мы предполагаем, что: b возрастает и удовлетворяет условию Липшица; $b(s) = 0$ для $b \leqslant 0$, $b \in C(R) \cap C^1([0,\infty])$; существует постоянная $c > 0$ такая, что $b'(s) > c$ для $s \in (0,\infty)$.

Функция $\Phi \in C^1([0,\infty])$ является положительной функцией. Класс операторов, приведенный в (1), представляет хорошо известное уравнение Ричардса, которое служит базовой моделью для фильтрации воды в ненасыщенных почвах (см [1],[2]).

Для слабого решения задачи мы доказали ограниченность. Также мы доказали принцип сравнения в следующем виде.

Теорема. *Пусть u слабое решение, ν суперрешение (1) на $Q = \Omega \times (0,T]$ для некоторого $T > 0$. Если $u < \nu$ на параболической границе $\partial_p Q = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup \{\Omega \times \{t = 0\}\}$, то $u < \nu$ на Q.*

Пользуясь методом Перрона получаем теорему существования и устойчивости.

Литература

1. Domencio P.A. Physical and Chemical hydrogeology / P.A. Domencio, F.W. Schwarts. — John Wiley and Sons, New-York, 1998.

2. Merz W. Strong solution to the Richards equation in the unsaturated zone / W. Merz, P. Rybka // J. Math. Analysis. Appl. 371. — 2010. — N 2. — P. 741–749.

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л.Х. Гадзова (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
macaneeva@mail.ru

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_1 \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta_1 > 0$, λ, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ — производная Капуто [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = D_{0x}^{\gamma-n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < \gamma \leqslant n,$$

D_{0x}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 9] по переменной x.

В работе изучаются результаты связанные с решением начальных и краевых задач для уравнения (1) [2,3].

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

2. Гадзова Л.Х. Задача Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами / Л.Х. Гадзова // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1580–1586.

3. Гадзова Л.Х. Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / Л.Х. Гадзова // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 180–186.

О СТЕПЕНИ СОВПАДЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СЛУЧАЙНЫХ МУЛЬТИОТОБРАЖЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫХ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е.Н. Гетманова (Воронеж, ВГПУ)
ekaterina_ getmanova@bk.ru

Пусть E_1, E_2 — сепарабельные банаховы пространства; Ω — полное измеримое пространство; $L\colon DomL \subseteq E_1 \to E_2$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Пусть U — открытое ограниченное подмножество E_1 и мультиотображение $\mathcal{F}\colon \Omega \times \overline{U} \multimap E_2$ удовлетворяет следующим условиям (по поводу терминологии см., напр., [1, 2]):

(i) $\mathcal{F}$ измеримо относительно минимальной σ-алгебры, порожденной $\Sigma \times B(\overline{U})$, где $B(\overline{U})$ — совокупность борелевских подмножеств $\overline{U}$;

(ii) для любого $\omega \in \Omega$, мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : \overline{U} \multimap E_2$ является ${}^cJ$-мультиотображением, т.е. может быть представлено как конечная композиция полунепрерывных сверху мультиотображений с R_δ-значениями;

(iii) для любого $\omega \in \Omega$, мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является L-компактным.

При этих условиях определяется топологическая характеристика — случайная топологическая степень совпадения пары $L, \mathcal{F}$, описываются ее свойства и даются приложения к существованию случайной точки совпадения для данной пары, т.е. измеримой функции $\xi : \Omega \to U$ такой что

$$L\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Литература

1. Gorniewicz L. Topological fixed point theory of multivalued mappings. 2nd edition. Topological Fixed Point Theory and Its Applications, 4 / L. Górniewicz. — Dordrecht : Springer, 2006.

2. Корнев С.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Сб. тр. матем. факультета ВГУ. — Воронеж : ВГУ, 2004. — Вып. 8. — С. 56-–74.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ[1]

А.А. Гималтдинова (Уфа, УГНТУ)
aa-gimaltdinova@mail.ru

Изучим задачу для уравнения

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x)u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0$$

в области $D = \{(x,y) \in R^2 \mid -l < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, α, β, $l \in R_+$.

Задача. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(\,D\,) \cap \mathrm{C}^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4),$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4,$$

$$u(x,y)\big|_{x=l} = u(x,y)\big|_{x=-l},\ u_x(x,y)\big|_{x=l} = u_x(x,y)\big|_{x=-l}, \quad y \in [-\alpha,\beta],$$

$$u(x,y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad u(x,y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad x \in [-l,l],$$

где φ *и* ψ *— заданные достаточно гладкие функции,* D_i *— подобласти области* D *в соответствующих четвертях плоскости* XOY.

Решение поставленной задачи аналогично [1,2] построено в виде суммы ряда по биортогональной системе соответствующей спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом. Единственность решения доказана на основании полноты биортогональной системы в пространстве $L_2[-l,l]$. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей. В связи с этим получены оценки об отделенности малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование решения задачи.

Литература

1. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области / А.А. Гималтдинова // ДАН. — 2015. — Т. 460, № 3. — С. 260–266.

2. Гималтдинова А.А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области / А.А. Гималтдинова // ДАН. — 2016. — Т. 466, № 1. — С. 7–11.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ–РБ (проект №17-41-020516).

СМЕШАННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ПЕРЕХОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ[1]

А.А. Гималтдинова, О.В. Потанина (Уфа, УГНТУ)
aa-gimaltdinova@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + (\operatorname{sgn} x)u_{yy} = 0, \quad n > 0,$$

в области $D = \{(x, y) \in R^2 \mid -l < x < h,\ -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha,\ \beta,\ l,\ h > 0$.

Задача. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in \mathrm{C}^1(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4),$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4,$$

$$u(x, y)\big|_{x=h} = u(x, y)\big|_{x=-l} = 0, \quad y \in [-\alpha, \beta],$$

$$u_y(x, y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad u_y(x, y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad x \in [-l, h],$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, D_i — подобласти области D в соответствующих четвертях плоскости XOY.

Ранее изучалась задача Дирихле [1] для рассматриваемого уравнения. Решение поставленной задачи аналогично построено в виде суммы ряда по биортогональной системе соответствующей одномерной задачи Штурма – Лиувилля. Единственность решения доказана на основании полноты биортогональной системы в пространстве $L_2[-l, h]$. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей. В связи с этим при некоторых ограничениях на параметры α, β, l, h получены оценки об отделенности малых знаменателей от нуля. Эти оценки позволили доказать существование решения задачи в искомом классе функций.

Литература

1. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя перпендкулярными линиями перехода в прямоугольной области / А.А. Гималтдинова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2014. — № 19(190). — С. 5–16.

[1] Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ – РБ (проект №17-41-020516).

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ[1]

Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович (Калуга, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского)
v572264@yandex.ru

Ранее был рассмотрен вопрос о решении стационарной задачи теплопроводности в многослойной среде при возможных фазовых переходах как при отсутствии источников тепла [1], так и при наличии в слое равномерно распределенных источников постоянной мощности [2]. В настоящей работе решена задача теплопроводности для случая многослойной среды, состоящей из двух материалов, когда источники тепла находятся в слое, в котором фазовый переход не может произойти, а соседний слой нагревается только за счет теплопроводности, и в нем возможен фазовый переход. Например, один слой — металл, по которому течет электрический ток, а соседний слой — диэлектрик.

Как и в [1] и [2], для решения задачи теплопроводности и определения координат точек фазового перехода использовался матричный метод совместно с аппаратом обобщенных степеней Берса.

Литература

1. Гладышев Ю.А. Об использовании матричного метода решения задач теплопроводности в многослойной среде при наличии фазовых переходов / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 105–107.

2. Афанасенкова Ю.В. Некоторые методы задач теплопроводности многослойной среды при наличии источников тепла / Ю.В. Афанасенкова, Ю.А. Гладышев // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 26–29.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В КВАТЕРНИОННОЙ ФОРМЕ

Ю.А. Гладышев (Калуга, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского)
v572264@yandex.ru

В сообщении [1] было дано определенное обобщение известной системы Коши-Римана теории функций комплексного переменного в область функций двух кватернионных переменных. Было указано на возможную физическую интерпретацию этих условий как системы уравнений Максвелла классической электродинамики. Приведен метод введения электромагнитных потенциалов в кватернионной форме. В настоящей статье основное внимание обращено на построение калибровочных преобразований электромагнитных потенциалов в принятом в работе [1] кватернионном формализме.

Для удобства понимания метода напомним, что используются функции χ, ψ в общем случае восьми переменных x_j, $j = \overline{0,7}$,

$$\chi = \chi_0 + \sum_{j=1}^{7} e_j \chi_j, \quad \psi = \psi_0 + \sum_{j=1}^{7} e_j \psi_j,$$

где e_j — единицы системы кватернионов.Часть кватерниона с единицами e_j, как обычно, назовем векторной частью.

Если x_j комплексные, то имеем бикватернионную алгебру [2]. Набор переменных x_0, x_1, x_2, x_3 назовем набором S, а x_4, x_5, x_6, x_7 — набором T. Для дальнейшего достаточно считать элементы набора T чисто мнимыми числами и положить

$$x_4 = it_0, \quad x_5 = it_1, \quad x_6 = it_2, \quad x_7 = it_3.$$

Для физической интерпретации введем наборы

$$(t_0, x_1, x_2, x_3), \quad (x_0, t_1, t_2, t_3),$$

которые обозначим как (T, S), и (S, T). После введения операторов вида

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^{3} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x_4} + \sum_{i=5}^{7} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1}$$

Введение сопряженных по кватернионным единицам операторов $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ приводит к результату

$$D_1\overline{D}_1 = \overline{D}_1 D_1 = \sum_{j=0}^{3} e_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad D_2\overline{D}_2 = \overline{D}_2 D_2 = \sum_{j=4}^{7} e_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

т.е. к операторам Лапласа, если все x_j — действительные переменные. Производные по x_j понимаем как формальные [3].

Система, которая определяет χ, ψ, по [1], может быть записана как

$$\begin{cases} D_1\chi - \psi D_2 = 0, \\ \chi\overline{D}_2 + \overline{D}_1\psi = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Так же как условия Коши-Римана указывают на равноправие двух направлений на плоскости при нахождении производной, так и условие (2) содержит утверждение о равноправии (симметрии) пространств S и T.

Применяя операторы $\overline{D}_1$ слева к первому уравнению системы (2) и $\overline{D}_2$ справа ко второму, получим, что все компоненты χ гармонические функции x_j, при условии действительности x_j, и что $\chi_j \in C^{(2)}$. Аналогичное утверждение относится к ψ.

Кватернионные потенциалы поля α, β введем соотношениями

$$\begin{cases} \chi = \overline{D}_1\alpha + \beta D_2 + \nu, \\ \psi = -\alpha\overline{D}_2 + D_1\beta + \omega, \end{cases} \tag{3}$$

определенных с точностью до кватернионных функций ν, ω, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \overline{D}_1\nu + \omega D_2 = 0, \\ -\nu\overline{D}_2 + D_1\omega = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *Если Ω есть решение уравнения вида*

$$D_1\overline{D}_1\Omega + D_2\overline{D}_2\Omega = 0,$$

то $\nu = D_1\Omega$, $\omega = \overline{D}_2\Omega$ есть решение (4).

В этом случае калибровочное преобразование (3) заменяем на

$$\begin{cases} \chi = \overline{D}_1\alpha + \beta D_2 + D_1\underline{O}, \\ \psi = -\alpha\overline{D}_2 + D_1\beta + \overline{D}_2\underline{O}. \end{cases} \tag{5}$$

Все аналитические и алгебраические операции справедливы при всех функциях x_j из пространства $C^{(2)}$.

При определенных предположениях система (2) распадается на две системы Максвелла. Таким предположением является исчезновение функций

$$\chi_0 = \psi_0 = 0. \tag{6}$$

Выберем систему переменных в (2) типа (T, S) и положим $\overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{\psi} = i\overrightarrow{E}$. Здесь $\overrightarrow{\chi}$, $\overrightarrow{\psi}$ — векторная часть кватернионов χ, ψ. Легко видеть, что (2) сводится к системе Максвелла без токов и зарядов. Чтобы в этом убедиться, надо выписать операторы (1) в обычных обозначениях векторного анализа. Электромагнитные потенциалы α, β в (5) следует выбрать

$$\overrightarrow{\alpha} = 0 - \overrightarrow{A}, \quad \beta_0 = -i\varphi + \overrightarrow{0} \tag{12}$$

Отметим, что условие Лоренца для электромагнитных потенциалов в этом подходе являются следствие предположения (6). Для калибровочного преобразования достаточно выбрать любую функцию, удовлетворяющую волновому уравнению. Аналогично можно показать, что для набора (T, S) при соответствующем выборе функций χ, ψ можно получить вторую систему типа Максвелла, поэтому обнаруживаем некоторую особую симметрию системы уравнений классической электродинамики относительно пространств (T, S) и (S, T).

Литература

1. Гладышев Ю.А. Об одном обобщении условий Коши-Римана теории функций комплексного переменного в область кватернионных функций / Ю.А. Гладышев // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов XI международной конференции «ПМТУКТ–2018». — Воронеж : Издательство «Научная книга», 2018. — С. 94–96.

2. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. — М. : Наука, 1973. — 320 с.

3. Фукс Б.А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных / Б.А. Фукс. — М. : Физматгиз, 1962. — 420 с.

ЛОКАЛЬНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Д.В. Глазков, Е.В. Григорьева, С.А. Кащенко
(Ярославль, ЯрГУ)
d.glazkov@uniyar.ac.ru

Рассматривается модель оптико-электронного осциллятора (см [1] и приведенные там источники)

$$\varepsilon\frac{dx}{d\zeta} = y - x + \beta\big[\cos^2(x(\zeta-\nu)+\varphi) - \cos^2\varphi\big], \qquad \frac{dy}{d\zeta} = -x.$$

После замены $\zeta = \nu t$ и ряда преобразований получаем уравнение

$$\frac{\varepsilon}{\nu}\ddot{x}+\dot{x} + \nu x = b_1\dot{x}(t-1) + 2b_2x(t-1)\dot{x}(t-1) + 3b_3x^2(t-1)\dot{x}(t-1) + \ldots,$$

где $\quad b_1 = -\beta\sin(2\varphi), \qquad b_2 = -\beta\cos(2\varphi), \qquad b_3 = 2\beta\sin(2\varphi)/3.$

Рассматриваются критические случаи в задаче об устойчивости нулевого положения равновесия. Близкие к нулю решения представляются в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε.

Для определения главной части решений построены специальные нелинейные краевые задачи, играющие роль нормальных форм и не содержащие малый параметр. Их нелокальная динамика определяет локальное поведение решений исходного уравнения.

Литература

1. Grigorieva E.V. Local dynamics of a model of an opto-electronic oscillator with delay / E.V. Grigorieva, S.A. Kaschenko, D.V. Glazkov // Automatic Control and Computer Sciences. — 2018. — Vol. 52, № 7. — P. 700—707.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10043).

БИФУРКАЦИОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОТКЛОНЕНИЕМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ[1]

С.Д. Глызин, Л.И. Ивановский
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
glyzin.s@gmail.com, leon19unknown@gmail.com

Рассматриваются динамические свойства краевой задачи

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \tag{1}$$

с отклонением в краевом условии

$$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = \alpha\, u(x_0,t), \tag{2}$$

где $u(x,t)$ — гладкая при $t \geqslant 0$ и $x \in [0,1]$ функция, параметры $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, а величина $x_0 \in [0,1)$ определяет отклонение в краевом условии.

В краевой задаче (1), (2) реализуется два способа потери устойчивости нулевого состояния равновесия — дивергентный, когда в спектре устойчивости появляется нулевое значение, и колебательный, соответствующий случаю выхода пары собственных значений на мнимую ось. Задача данной работы состоит в изучении характера потери устойчивости состояния равновесия, т.е. в поиске критических значений параметров α, γ и x_0 и выяснений режимов, от него ответвляющихся.

В работе найдены критические значения параметров α, γ и x_0, при которых происходят различные бифуркации нулевого состояния равновесия. При значениях параметра α, близких к критическим, построена нормальная форма и на ее основе выяснены условия появления неоднородных состояний равновесия в одном случае и циклов в другом. В широкой области параметров фазовые перестройки краевой задачи (1), (2) проиллюстрированы численно.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10055.

ДИНАМИКА БИЛОКАЛЬНОЙ НЕЙРОННОЙ МОДЕЛИ[1]

С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов
(Ярославль, ЯрГУ; Москва, МГУ)
glyzin.s@gmail.com, andkolesov@mail.ru, fpo.mgu@mail.ru

Рассматривается система дифференциально-разностных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot u_1 &= D(u_2 - u_1) + \lambda f(u_1(t-1))u_1, \\ \dot u_2 &= D(u_1 - u_2) + \lambda f(u_2(t-1))u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

моделирующая электрическое взаимодействие пары нейроподобных осцилляторов. Здесь $u_1(t), u_2(t)$ — нормированные мембранные потенциалы, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов, предполагается большим, а функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geqslant 0\}$, обладает свойствами $f(0) = 1;\quad f(u) + a,\ uf'(u),\ u^2 f''(u) = O\big(u^{-1}\big)$ при $u \to +\infty$, где $a = \text{const} > 0$. Параметр $D > 0$ характеризует глубину связи между осцилляторами. В случае, если D — достаточно велико, система (1) имеет единственное однородное периодическое решение $u_1(t) \equiv u_2(t)$. В связи с этим считаем, что D мало, точнее $D = \lambda \exp(-b\lambda)$, $b = \text{const} > 0$, $\lambda \gg 1$, тогда при $a > 1$ можно выделить два диапазона изменения параметра b, для которых удается построить асимптотику устойчивых циклов системы (1) .

В частности, при $1+1/a < b < 1+(a+1/a)/2$ доказывается, что у системы (1) существует и устойчив самосимметричный цикл, не меняющийся при замене переменных $(u_1, u_2) \to (u_2, u_1)$ и отличный от однородного цикла.

В свою очередь, при условии $0 < b < 1 + 1/a$ устанавливается существование у билокальной модели (1) двух устойчивых периодических решений $(u_1, u_2) = (u_{1,*}(t,\lambda), u_{2,*}(t,\lambda))$, $(u_1, u_2) = (u_{2,*}(t,\lambda), u_{1,*}(t,\lambda))$, $u_{1,*}(0,\lambda) \equiv 1$, переходящих друг в друга при замене $(u_1, u_2) \to (u_2, u_1)$. Асимптотика этих циклов существенно отличается для следующих двух интервалов: $0 < b < 1$ и $1 < b < 1 + 1/a$.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10055.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-ЦЕЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА РЕШЕНИЙ НА КРИВОЙ

А.А. Голубков (Москва, СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова)
andrej2501@yandex.ru

Асимптотическое поведение при $|\lambda| \to \infty$ решений уравнений Штурма–Лиувилля вдоль кривых и спектры краевых задач для таких уравнений на кривых изучены только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой и (или) на коэффициенты уравнения. В частности, в работе [1] получена асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля стандартного вида непрерывно дифференцируемых вдоль спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ произвольной формы с заданным на ней кусочно-целым потенциалом (без исследования спектра краевых задачах).

В настоящей работе полученная в [1] асимптотика решений стандартного уравнения Штурма–Лиувилля обобщена на случай, когда на произвольной спрямляемой кривой γ задано конечное число точек, в которых эти решения и (или) их производные вдоль кривой претерпевают разрывы. Изучена краевая задача для такого уравнения с распадающимися граничными условиями. При этом на элементы матриц перехода и коэффициенты в граничных условиях накладывается единственное ограничение — независимость от спектрального параметра. Доказано, что в зависимости от формы кривой γ и значений элементов матриц перехода и коэффициентов в граничных условиях, спектр краевой задачи может быть одного из трёх типов: пустой, совпадающий со всей комплексной плоскостью или счётный, локализованый около конечного числа лучей. Сформулированы необходимые и достаточные условия реализации каждого из случаев и исследованы асимптотические свойства счетного спектра.

Литература

1. Голубков А.А. Асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма-Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой / А.А. Голубков // Вестник МГУ. Сер. 1 : Математика. Механика. — 2019. — № 2. — С. 37–41.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА СЛАБОСТРУКТУРИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПОСРЕДСТВОМ НЕЧЕТКИХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

И.Н. Гончарова (Воронеж, ВУНЦ ВВС «ВВА»)
ingoncharova@mail.ru

Объектом исследования является слабоструктурированная система, описывающая ментальные характеристики, творческий потенциал и психофизические качества обучаемых. При исследовании подобных систем построение адекватной модели объекта представляет затруднение, так как речь идет о слабоструктурированной образовательной среде, для анализа и синтеза которой нужны формальные нечеткие модели и методы многокритериальной оптимизации.

В рамках формирующего эксперимента по сопровождению самостоятельной работы студентов, нами были разработаны критерии самостоятельной работы, среди которых:

- активность в познавательной деятельности; (X_1)
- готовность к творческой деятельности; (X_2)
- владение универсальными учебными действиями; (X_3)
- заинтересованность в профессиональном становлении; (X_4)
- умение работать в команде. (X_5)

Исходя из заданных критериев исходного состояния студентов, задачей машинного обучения в данном случае является построение решающей функции, которая по входным параметрам (X_1, X_2, $\ldots X_n$) будет говорить, к какому классу она принадлежит, каждому из которых строится соответствующая выходная функция. Затем, в процессе обучения, нейронная сеть просчитывает наиболее оптимальный вариант самостоятельной работы для каждого кластера.

Главная особенность построенной нейронной сети по сравнению с традиционной сетью – наличие алгоритмов подбора важных признаков из первоначального набора данных (отличие важных данных от шума и второстепенного влияния) в процессе обучения.

Таким образом, в ходе формирующего эксперимента с применением нейронной сети должны быть выявлены группы студентов,

---

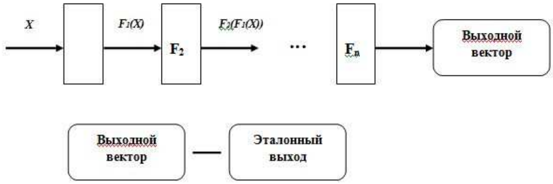


Рис. 1: Общая структура нейронной сети

сходные по своим качественным характеристикам на начальном этапе обучения. На основании этого построена программа сопровождения самостоятельной работы обучаемых для каждой типологической группы. Определены реперные точки измерения уровня эффективности самостоятельной работы на промежуточном и итоговом этапе обучения.

Литература

1. Николенко С. Глубокое обучение / С. Николенко, А. Кадурин, Е. Архангельская. — СПб. : Питер, 2018. — 480 с.

2. Гречухина Т.И. Самостоятельная работа студентов : виды, формы, критерии оценки : учебно-методическое пособие / Т.И. Гречухина, А.В. Меренкова. — Екатеринбург : Издательство Урал. ун-та, 2016. — 80 с.

О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ ЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА

Е.Ю. Гусева (Воронеж, ВГУ)
elena.guseva.01.06@gmail.com

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Линейный оператор $a : H \to H$ называют оператором Гильберта–Шмидта, если для некоторого (а, значит, и для любого) ортонормированного базиса $\{e_k\}$ в H

$$\|a\|_{\mathfrak{S}_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \|ae_k\|^2} < \infty.$$

Известно, что операторы Гильберта–Шмидта образуют идеал в алгебре $\mathbf{B}(H)$ всех линейных ограниченных операторов. Идеал операторов Гильберта–Шмидта обозначим символом $\mathfrak{S}_2(H)$.

Обозначим через $l_p = l_p(\mathbb{Z}, H)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространства последовательностей $x_n \in H, n \in \mathbb{Z}$, ограниченных по обычным нормам.

Весом на группе $\mathbb{Z}$ называют функцию $g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$. Будем предполагать, что рассматриваемый вес g удовлетворяет условиям: $g(0) = 1$; $g(m+n) \leqslant g(m)g(n)$; $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \frac{\ln g(n)}{|n|} = 0$. Простейший пример такого веса: $g(k) \equiv 1$. Более сложный пример: $g(k) = e^{a|k|^b}(1+|k|)^s$, где $s \geqslant 0$, $a > 0$ и $0 \leqslant b < 1$.

Символом $\mathbf{sa}_{l_{1,g}}$ обозначим множество всех линейных операторов $T : l_p \to l_p$ вида

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m x_{k-m},$$

где $a_m \in \mathfrak{S}_2(H)$ и выполнена оценка

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)\|a_k\|_{\mathfrak{S}_2} < \infty.$$

Теорема. *Пусть $T \in \mathbf{sa}_{l_{1,g}}$ и оператор $\mathbf{1} + T : l_p \to l_p$ обратим (хотя бы при одном $p \in [1, +\infty]$). Тогда (он обратим при всех p и) обратный оператор $(\mathbf{1} + T)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1} + S$, где $S \in \mathbf{sa}_{l_{1,g}}$.*

В терминологии спектральной теории свойство, описанное в теореме, означает наполненность подалгебры $\mathbf{sa}_{l_{1,g}}$ в алгебре $\mathbf{B}(l_p)$ всех линейных ограниченных операторов, действующих в l_p.

ОБ ОДНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ВЕТВИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

М.Б. Давыдова, А.В. Елфимова, М.А. Симонова, Е.А. Бородина
(Воронеж, ВГУ)
alenaanoxina94@yandex.ru

В представленной работе изучается нелинейная граничная задача

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} - (gu'_x)'_\mu + Q'_\mu u = \lambda F(x, u, u'''_{xx\mu}); \\ u(0) = u'_x(0) = u'''_{xx\mu}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u'''_{xx\mu}(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере. Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\sigma(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство $-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + \Delta\left(gu''_{xx}\right)'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \lambda F(\xi, u(\xi), \Delta u''_{xx}(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ; $\lambda > 0$ — спектральный параметр. Через Λ обозначим множество положительных значений λ, при каждом из которых (1) имеет хотя бы одно решение. Будем считать действительное число λ собственным значением задачи (1), если при этом λ система (1) имеет нетривиальное решение. Уравнение в (1) задано почти всюду на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$ [1]. Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$ и $Q(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$, $\min p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, а $F(x,u,v)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $F(x,u,v)$ при почти всех x (относительно μ-меры) определена и непрерывна по u и v; 2) функция $F(x,u,v)$ измерима по x при каждых u и v; 3) $|F(x,u,v)| \leqslant m(x)$, где $m(x)$ — μ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$. Будем говорить, что однородное уравнение $-\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\mu} - (gu'_x)'_\mu + Q'_\mu u = 0$ не осциллирует на $[0;\ell]$, если любое его нетривиальное решение имеет не более пяти нулей с учетом кратностей.

Получены достаточные условия существование нетривиальных решений у (1).

Литература

1. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

2. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

3. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Бугакова, Е.А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 206–214.

ПОСТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛАБОСВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ[1]

Ю.Э. Даник (Москва, ФИЦ ИУ РАН)
juliet.d.e.777@mail.ru

Здесь на примере двух слабосвязанных нелинейных задач оптимального управления, линейных по управлению и состоянию с коэффициентами, зависящими от состояния, рассматривается построение стабилизирующего композитного управления с помощью декомпозиции исходной задачи оптимального управления на подзадачи. Рассмотрим задачу [1,2]

$$\dot{x} = A(x,\varepsilon)x + B(x,\varepsilon)u,\ x(0) = x_0,$$

$$\int_0^\infty \left(x^T Q(x,\varepsilon)x + u^T R u\right) dt \to \inf_u,$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in X$, $x_1 \in \mathrm{R}^n$, $x_2 \in \mathrm{R}^m$, $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^r$,
$u_1 \in \mathrm{R}^{r_1}$, $u_2 \in \mathrm{R}^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$, $t \in [0,\infty)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$,
$A(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} A_1(x_1) & \varepsilon A_2(x_2) \\ \varepsilon A_3(x_1) & A_4(x_2) \end{bmatrix}$, $B(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} B_1(x_1) & \varepsilon B_2(x_2) \\ \varepsilon B_3(x_1) & B_4(x_2) \end{bmatrix}$,
$Q(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \varepsilon Q_2(x_1,x_2) \\ \varepsilon Q_2^T(x_1,x_2) & Q_3(x_2) \end{bmatrix} \geqslant 0$, $R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} > 0$.

Согласно подходу SDRE субоптимальное управление в этой задаче будем искать в виде $u = -R^{-1}B^T(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon)x$, где $K(x,\varepsilon)$ – решение соответствующего уравнения Риккати $-K(x,\varepsilon)A(x,\varepsilon) - A'(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon) + K(x,\varepsilon)B(x,\varepsilon)R^{-1}(x,\varepsilon)B'(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon) - Q(x,\varepsilon) = 0$,
$K(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} K_{10} + \varepsilon K_{11} + \varepsilon^2 K_{12} & \varepsilon K_{20} + \varepsilon^2 K_{21} + \varepsilon^3 K_{22} \\ \varepsilon K_{20}^T + \varepsilon^2 K_{21}^T + \varepsilon^3 K_{22}^T & K_{30} + \varepsilon K_{31} + \varepsilon^2 K_{32} \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} K_{10} & 0 \\ 0 & K_{30} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} K_{11} & K_{20} \\ K_{20}^T & K_{31} \end{bmatrix} + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} K_{12} & K_{21} \\ K_{21}^T & K_{32} \end{bmatrix}$.

Для блоков $K(x,\varepsilon)$ имеем в пределе при $\varepsilon = 0$ следующие уравнения для подсистем
$-K_{10}(x)A_1(x_1) - A_1(x_1)^T K_{10} + K_{10}\left(B_1(x_1)\right) R_1^{-1} \left(B_1(x_1)\right)^T K_{10} -$
$-Q_1(x_1) = 0$, $K_{20}\left(\left(B_4(x_2)\right) R_2^{-1} (B_4(x_2))^T K_{30} - A_4(x_2)\right) +$
$+ \Big(K_{10}\left(B_1(x_1)\right) R_1^{-1} \left(B_1(x_1)\right)^T - A_1(x_1)\Big) K_{20} - (A_3(x_1)K_{30} -$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-07-00281 А).

$-K_{10}A_2(x_2) - Q_2(x_1,x_2) + K_{10}\left(B_1(x_1)\right)R_1^{-1}(B_3(x_1))^T K_{30} +$
$K_{10}(B_2(x_2))R_2^{-1}\left(B_4(x_2)\right)^T K_{30} = 0,\ -K_{30}\left(A_4(x_2)\right) -$
$\left(A_4(x_2)\right)K_{30} - Q_3(x_2) + K_{30}\left(B_4(x_2)\right)R_2^{-1}(B_4(x_2))^T K_{30} = 0.$

Для K_{10} и K_{30} уравнения представляют собой уравнения Ляпунова, а для K_{20} – двухчленное уравнение Сильвестра вида $K_{20}H - FK_{20} = Y$, где $H \in R^{m\times m}, F \in R^{n\times n}, Y \in R^{n\times m}, K_{20} \in R^{n\times m}$ – прямоугольная матрица. Обозначим через $\sigma(H) = = \{\mu_1,...,\mu_n\}$, $\sigma(F) = \{\lambda_1,...,\lambda_m\}$ – спектры матриц H и F, соответственно. Согласно [3], если $\sigma(H) \subset \{\lambda :\ Re\lambda < 0\}$, $\sigma(F) \subset \{\lambda :\ Re\lambda > 0\}$, тогда существует единственное решение этого уравнения, которое может быть представлено в виде
$K_{20} = -\int_0^\infty e^{-tF}Ye^{tH}dt.$

Система для блоков при ε^1 имеет вид

$$
\begin{aligned}
&-K_{11}(A_1(x_1) - B_1(x_1)R_1^{-1}B_1^T(x_1)K_{10}) - (A_1^T(x_1) -\\
&-K_{10}B_1(x_1)R_1^{-1}B_1^T(x_1))K_{11} - Q_1(x_1) = 0;\\
&-K_{21}(A_4(x_2) - B_4(x_2)R_2^{-1}B_4^T(x_2)K_{30} - B_4(x_2)R_2^{-1}B_4^T(x_2)K_{30}) -\\
&-(A_1(x_1) - K_{10}B_1(x_1)R_1^{-1}B_1^T(x_1) - K_{10}B_1(x_1)R_1^{-1}B_1^T(x_1))K_{21} -\\
&-A_3(x_1,x_2)K_{31} - K_{11}A_2(x_1,x_2) +\\
&+K_{10}\left(B_1(x_1)R_1^{-1}(B_3(x_1))^T + B_2(x_2)R_2^{-1}\left(B_4(x_2)\right)^T\right)K_{31} +\\
&+K_{11}\left(B_1(x_1)R_1^{-1}(B_3(x_1))^T + B_2(x_2)R_2^{-1}\left(B_4(x_2)\right)^T\right)K_{30} +\\
&+K_{20}B_4(x_2)R_2^{-1}B_4^T(x_2)K_{31} + K_{11}B_1(x_1)R_1^{-1}B_1^T(x_1)K_{20} -\\
&-Q_{21}(x_1,x_2) = 0;\\
&-K_{31}(A_4(x_2) - B_4(x_2)R_2^{-1}B_4^T(x_2)K_{30}) - (A_4(x_2) -\\
&-K_{30}B_4(x_2)R_2^{-1}B_4^T(x_2))K_{31} - Q_3(x_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Аналогично, при ε^2 уравнения для K_{12} и K_{32} представляют собой уравнения Ляпунова, а для K_{22} – уравнение Сильвестра.

Улучшить качество построенного асимптотического приближения к решению уравнения Риккати при малых значениях параметра в некоторых случаях можно за счет использования одноточечной матричной Паде аппроксимации [4,5]. Рассмотрим матричную Паде аппроксимацию порядка [1/2] в следующей форме
$PA_{[1/2]}(x,\varepsilon) = \left(M_0(x) + \varepsilon M_1(x)\right)\left(I + \varepsilon N_1(x) + \varepsilon^2 N_2(x)\right)^{-1},$
где $I \in R^{n\times n}$ – единичная матрица. Решая систему $PA_{[1/2]}(x,\varepsilon) = \tilde{P}_2(x,\varepsilon)$, получаем набор уравнений для нахождения матриц $M_0(x)$, $M_1(x)$, $N_1(x)$, $N_2(x)$, например, следующую $\varepsilon^0 : M_0 = \tilde{P}_0;$
$\varepsilon^1 : M_1(x) = \tilde{P}_0N_1(x) + \tilde{P}_1(x); \varepsilon^2 : 0 = \tilde{P}_0N_2(x) + \tilde{P}_1(x)N_1(x) + \tilde{P}_2(x), \varepsilon^3 : 0 = \tilde{P}_1(x)N_2(x) + \tilde{P}_2(x)N_1(x).$

В качестве приближения к решению уравнения Риккати получим $K_{[1/2]}\left(x,\varepsilon\right) = 1/2\left(PA_{[1/2]}\left(x,\varepsilon\right) + PA^{T}_{[1/2]}\left(x,\varepsilon\right)\right)$.

Регулятор имеет вид $u(x,\varepsilon) = -R^{-1}B^{T}(x,\varepsilon)K_{[1/2]}\left(x,\varepsilon\right)$.

Литература

1. Даник Ю.Э. Построение стабилизирующих регуляторов в нелинейных непрерывных системах большой размерности на основе асимптотики решений матричных алгебраических уравнений Риккати / Ю.Э. Даник, М.Г. Дмитриев, Д.А. Макаров //Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2018) : материалы Одиннадцатой междунар. конфер. — М : ИПУ РАН, 2018. — С. 351–353.

2. Gajic Z. The existence of a unique and bounded solution of the algebraic Riccati equation of multimodel estimation and control problems /Z. Gajic //Systems & control letters — 1988. — Vol. 10, no. 3. —P. 185–190.

3. Демиденко Г.В. Матричные уравнения / Г.В. Демиденко. //— Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2009. — 202 с.

4. Danik Yu. E. Application of Pade-approximations to the solution of nonlinear control problems / Yu.E. Danik, M.G. Dmitriev, E.V. Komarova, D.A. Makarov //Theory and Applications (DSTA 2017) : International Conference on Dynamical Systems. — 2017. — P. 155–164.

5. Danik Yu.E. Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution / Yu.E. Danik, M.G. Dmitriev // IFAC-PapersOnLine — 2018. — Vol. 51, Issue 32. — P. 815–820.

КРИТЕРИИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В $L_p(\mathbb{R})$ ПРИ $1 < p < 2$

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)

art-dodonov@mail.ru

Получены (см. также [1], [2]) критерии сходимости в $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, бесконечной наипростейшей дроби

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k = x_k + iy_k, \quad y_k \neq 0. \tag{1}$$

Пусть $\alpha > 0$, $V_\alpha := \{z : \operatorname{Im} z \geqslant \alpha|\operatorname{Re} z|\}$, $m \in \mathbb{N}$. Положим $E_m = \{z : 2^m < \operatorname{Im} z \leqslant 2^{m+1}\}$, $E_0 = \{z : 0 < \operatorname{Im} z \leqslant 2\}$.

Теорема. *Пусть $\{z_k\} \subset V_\alpha$, n_m — число точек последовательности $\{z_k\}$, лежащих в E_m. Тогда при $1 < p < 2$ сходимость дроби (1) к некоторой функции ρ_∞ с конечной L_p-нормой эквивалентна выполнению любого из следующих условий:*

$$1)\quad \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{y_k + y_j} \right)^{p-1} \leqslant A(p, \{z_k\}) \quad \forall n;$$

$$2)\quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n_m}{2^{m(p-1)}} \sum_{s=0}^{m} n_s (n_m^{p-2} + n_s^{p-2}) < \infty;$$

$$3)\quad \widetilde{\sum}_{k=1}^{n} \left(\widetilde{\sum}_{j=k}^{n} \frac{1}{y_j} \right)^{p-1} \leqslant A(p, \{z_k\}) \quad \forall n,$$

знак $\widetilde{\sum}$ в 3) означает, что y_k занумерованы по возрастанию.

Критерий 3) ранее был доказан И.Р. Каюмовым в [3].

Литература

1. Додонов А.Е. О сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / А.Е. Додонов // Пробл. мат. ан. — 2015. — Т. 82. — С. 83–87.

2. Додонов А.Е. О сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / А.Е. Додонов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы XII Междунар. Казанской летн. научн. школы-конф. — Казань : Казан. мат. общ-во, 2015. — С. 178–180.

3. Каюмов И.Р. Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / И.Р. Каюмов // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 10. — С. 87–98.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ФОЙГТА ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ[1]

А.Н. Долгих (Воронеж, ВГУ)
alpine445@gmail.com

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3$ с локально-липшицевой границей на промежутке времени $[0,T]$ рассматривается начально-краевая задача для модели сжимаемой жидкости Фойгта:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \nabla\mathrm{div}\, v - \nabla\mathrm{div}\,\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = \rho f;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v) = 0; \quad \rho|_{t=0} = \rho_0,\ v|_{t=0} = v_0,\ v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \qquad (1)$$

Данная модель движения жидкости была получено экспериментальным путём (см. [1]) при исследовании ряда слабо концентрированных водных полимерных растворов. Нами рассматривается случай предельного значения показателя адиабаты, то есть в выражении $\rho = p^\gamma$ константа γ равна 1.

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n), v_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)^n, \rho_0 \in L_\infty(\Omega), 0 < m < \rho_0 < M < \infty$. *Тогда существует слабое решение* $v \in W = \{u : u \in C([0,T], W_0^{1,2}(\Omega)^n), u' \in L_2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)^n)\}$, $\rho \in E = \{\psi : \psi \in L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)), \psi' \in L_2(0,T;W^{-2,2}(\Omega))\}$ *начально-краевой задачи (1).*

Доказательство проводится с использованием идей и методов монографии [2], а также аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики.

Литература

1. Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В. А. Павловский // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, вып. 4. — С. 809–812.

2. Plotnikov P. Compressible Navier-Stokes Equations. Theory and Shape Optimization / P. Plotnikov, J. Sokolowski. — Springer : Birkhauser Basel, 2012. — 464 p.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 14.Z50.31.0037).

СХОДИМОСТЬ АТТРАКТОРОВ АППРОКСИМАЦИИ К АТТРАКТОРАМ МОДЕЛИ БИНГАМА[1]

А.Н. Долгих (Воронеж, ВГУ)
alpine445@gmail.com

Движение несжимаемой жидкости, заполняющей область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ на промежутке времени $[0, T]$ описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\, \sigma + \nabla\, p = f, \quad \mathrm{div} v = 0.$$

Здесь $v(t, x), p(t, x), f(t, x)$ — это скорость частиц жидкости, давление и плотность внешних сил соответственно, $\sigma = \{\sigma_{ij}(t, x)\}_{i,j=1}^{n}$ — девиатор тензора напряжений в жидкости. Число неизвестных в данной системе больше числа уравнений, поэтому её дополняют реологическим соотношением между σ и тензором скоростей деформаций $\mathcal{E}$, которое и определяет тип рассматриваемой жидкости.

Мы рассматриваем модель жидкости Бингама, реологическое соотношение, которой имеет вид:

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\,\mathcal{E}(v)\,|} \text{ при } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \quad |\sigma| \leqslant \tau^* \text{ при } |\mathcal{E}(v)| = 0.$$

Для этой модели будем рассматривать периодическую (по пространственным переменным) задачу с начальным условием:

$$v(0) = v_0.$$

Помимо данной модели будем рассматривать модель со следующим реологическим соотношением (аппроксимирующим реологическое соотношение для модели Бингама):

$$\sigma = 2\mu\varepsilon(v) + \tau^* \frac{\varepsilon(v)}{\max\{\delta, |\varepsilon(v)|\}}.$$

Для обеих рассмотренных моделей доказывается существование траекторных и глобальных аттракторов неинвариантных пространств траекторий, а также показано, что аттракторы для аппроксимирующей модели сходятся к аттракторам исходной модели при стремлении параметра аппроксимации δ к нулю.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 14.Z50.31.0037).

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ ПРОТЕКАНИЯ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Домнич, Е.С. Барановский, М.А. Артемов
(Воронеж, ВУНЦ ВВС «ВВА», ВГУ)
esbaranovskii@gmail.com

Рассматривается задача оптимального граничного управления для стационарной модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную локально-липшицеву область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ с учетом условия пристенного скольжения:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \operatorname{div}\mathbf{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\theta), \ \ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \ \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{T} = \mu(\theta)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) - p\mathbf{I} \ \text{ в } \Omega, \\ (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\theta - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = \omega(\boldsymbol{x},\theta) \ \text{ в } \Omega, \\ \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \ \ (\mathbf{Tn})_\tau = -\varkappa(\theta)\boldsymbol{u}_\tau, \ \ k(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\alpha\theta \ \text{ на } \partial\Omega\setminus S, \\ \boldsymbol{u}_\tau = \mathbf{0}, \ \ |\boldsymbol{u}|^2/2 + p = h, \ \ k(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\psi \ \text{ на } S, \\ (h,\psi)\in\mathbb{U}, \\ J(\boldsymbol{u},\theta,h,\psi)\to\min, \end{cases} \tag{A}$$

где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ — скорость течения в точке $\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}$; $\theta = \theta(\boldsymbol{x})$ — температура; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\theta)$ — плотность внешних массовых сил; $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\boldsymbol{x})$ — тензор напряжений Коши; $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$ — тензор скоростей деформации, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) = (\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}})/2$; $\mathbf{I}$ — единичный тензор; $p = p(\boldsymbol{x})$ — давление; $\mu(\theta) > 0$ — коэффициент вязкости; $k(\theta) > 0$ — коэффициент теплопроводности; $\varkappa(\theta) > 0$ — коэффициент проскальзывания; $\omega(\boldsymbol{x},\theta)$ — мощность тепловых источников; $\alpha > 0$ — коэффициент теплоотдачи на стенках Ω; $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\boldsymbol{x})$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$; S — плоский участок границы, где происходит протекание (или объединение нескольких таких участков); $\psi, h\colon S\to\mathbb{R}$ — функции, характеризующие тепловой поток и напор на S соответственно (эти функции играют роль управляющих параметров); $\mathbb{U}$ — множество допустимых управлений; $J = J(\boldsymbol{u},\theta,h,\psi)$ — функционал качества. Символ τ обозначает касательную составляющую вектора, т. е. $\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$.

Введем нормированное пространство

$$\mathbf{X}_S(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \ \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega \setminus S} = 0, \ \boldsymbol{v}_\tau|_S = \mathbf{0}\},$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}_S(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega\setminus S)}\right)^{1/2}.$$

Предположим, что:

(i) функции $\mu, k, \varkappa \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны и существуют положительные константы $\mu_i, k_i, \varkappa_i$, $i = 0, 1$, такие, что $\mu_0 \leqslant \mu(y) \leqslant \mu_1$, $k_0 \leqslant k(y) \leqslant k_1$, $\varkappa_0 \leqslant \varkappa(y) \leqslant \varkappa_1$ для любого $y \in \mathbb{R}$;

(ii) функции $\boldsymbol{f}(\cdot, y)$, $\omega(\cdot, y) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ измеримы для любого $y \in \mathbb{R}$;

(iii) функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \cdot)$, $\omega(\boldsymbol{x}, \cdot) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны для п. в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$;

(iv) существуют $f_0, \omega_0 \in L^2(\Omega)$ такие, что $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, y)| \leqslant f_0(\boldsymbol{x})$, $|\omega(\boldsymbol{x}, y)| \leqslant \omega_0(\boldsymbol{x})$ для любого $y \in \mathbb{R}$ и п. в. $\boldsymbol{x} \in \Omega$;

(v) справедливы неравенства: $\operatorname{meas}(S) > 0$ и $\operatorname{meas}(\partial\Omega \setminus S) > 0$;

(vi) функционал $J \colon \mathbf{X}_S(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(S) \times L^2(S) \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу;

(vii) для любого $R > 0$ множество $\{(\boldsymbol{u}, \theta, h, \psi) : J(\boldsymbol{u}, \theta, h, \psi) \leqslant R\}$ ограничено в $\mathbf{X}_S(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(S) \times L^2(S)$;

(viii) множество $\mathbb{U}$ секвенциально слабо замкнуто в $L^2(S) \times L^2(S)$ и $(0, 0) \in \mathbb{U}$.

Определение 1. *Допустимой четверкой* системы (A) назовем четверку $(\boldsymbol{u}, \theta, h, \psi) \in \mathbf{X}_S(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(S) \times L^2(S)$, для которой $(h, \psi) \in \mathbb{U}$ и выполнены тождества:

$$-\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega u_i \boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} + \int_S (|\boldsymbol{u}|^2/2 + h)(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma$$
$$+ \int_\Omega \mu(\theta) \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{dx} + \int_{\partial\Omega\setminus S} \varkappa(\theta) \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\, d\sigma = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \theta) \cdot \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dx},$$

$$\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \eta\, \boldsymbol{dx} + \int_\Omega k(\theta) \nabla\theta \cdot \nabla\eta\, \boldsymbol{dx} + \alpha \int_{\partial\Omega\setminus S} \theta\eta\, d\sigma$$
$$+ \int_S \psi\eta\, d\sigma = \int_\Omega \omega(\boldsymbol{x}, \theta)\eta\, \boldsymbol{dx}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_S(\Omega), \ \eta \in H^1(\Omega).$$

Множество всех допустимых четверок обозначим через $\mathfrak{M}$.

Определение 2. *Решением* задачи оптимизации (A) будем называть четверку $(\boldsymbol{u}_*, \theta_*, h_*, \psi_*) \in \mathfrak{M}$ такую, что

$$J(\boldsymbol{u}_*, \theta_*, h_*, \psi_*) = \inf_{(\boldsymbol{u}, \theta, h, \psi) \in \mathfrak{M}} J(\boldsymbol{u}, \theta, h, \psi).$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия* (i)–(viii) *и неравенство*

$$\min\{k_0, \alpha\} > \frac{\|f_0\|_{L^2(\Omega)} M(\Omega, S)}{2\min\{\mu_0, \varkappa_0\}},$$

$$M(\Omega, S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|\gamma_S\|^2_{\mathcal{L}(H^1(\Omega), L^4(S))} \|\gamma_S\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_S(\Omega), \boldsymbol{L}^2(S))} \|I\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_S(\Omega), \boldsymbol{L}^2(\Omega))},$$

где γ_S — оператор следа, I — оператор вложения. Тогда задача оптимизации (A) *имеет по крайней мере одно решение.*

Замечание. В линейной постановке задача о конвекции вязкой жидкости в ограниченной области при определенных режимах втекания/вытекания на границе рассмотрена в [1]. В работах [2, 3] изучаются задачи оптимального граничного управления типа Дирихле для стационарной модели протекания теплопроводной жидкости через заданную область в предположении, что вязкость не зависит от температуры, т. е. $\mu(\theta) \equiv \mathrm{const}$. Вопросы оптимизации течения высоковязкой жидкости в области с непроницаемыми стенками посредством тепловых воздействий рассматриваются в [4].

Литература

1. Крейн С.Г. Задача протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости / С.Г. Крейн, Чан Тху Ха // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29, № 8. — С. 1153–1158.

2. Алексеев Г.В. Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции / Г.В. Алексеев // Сиб. матем. журн. — 1998. — Т. 39, № 5. — С. 982–998.

3. Алексеев Г.В. Устойчивость решений экстремальных задач граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции / Г.В. Алексеев, А.М. Хлуднев // Сиб. журн. индустр. матем. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 5–18.

4. Короткий А.И. Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию / А.И. Короткий, Д.А. Ковтунов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 76–101.

О ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А.В. Дюжева (Самара, СамГТУ)
aduzheva@rambler.ru

В области $Q = (0,l) \times (0,T)$ найти решение уравнения

$$u_{tt} - (a(x)u_x)_x - (b(x)u_{xtt})_x + (d(x)u_{xxx})_x + c(x,t)u = f(x,t) \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0, \quad (3)$$

$$\int_0^l K(x)udx = 0, \quad \int_0^l udx = E(t). \quad (4)$$

От условия I рода (4) эквивалентным образом можно перейти к условиям второго рода, если $\Delta = P(l) - P(0) \neq 0$ и $E(0) = 0$, $E'(0) = 0$, где $P - (P'b)' = K$.

Теорема. *Пусть выполняются условия*

1. $f \in L_2(Q_T), \quad a \in C^1(\overline{Q}_T),\ c \in C(\overline{Q}_T), \quad b, d \in C^2(\overline{Q}_T)$;

2. $E \in C^2[0,T], \quad E(0) = E'(0) = 0,\ P \in C^2(0,l) \cup C^1[0,l]$;

3. $\beta_{11}\xi_1^2 + 2\beta_{12}\xi_1\xi_2 + \beta_{21}\xi_2^2 \geqslant 0, \quad \beta_{12} - \beta_{21} = 0.$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(4).

Литература

1. Бейлин А.Б. Задача с нелокальными динамическими условиями для уравнения колебаний толстого стержня / А.Б. Бейлин, Л.С. Пулькина // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 7–18.

О ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА, ПОРОЖДЕННОГО ЗАДАЧЕЙ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

С.С. Ежак, М.Ю. Тельнова
(Москва, РЭУ им. Г.В. Плеханова)
svetlana.ezhak@gmail.com, mytelnova@yandex.ru

Рассматривается функционал

$$R[Q,y]=\frac{\int_0^1 {y'}^2dx-\int_0^1 Q(x)y^2dx}{\int_0^1 y^2dx}, \tag{1}$$

порожденный задачей Штурма–Лиувилля

$$y''+Q(x)y+\lambda y=0, \quad x\in(0,1), \tag{2}$$

$$y(0)=y(1)=0, \tag{3}$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ измеримых неотрицательных локально интегрируемых на $(0,1)$ функций, для которых выполняется интегральное условие

$$\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta Q^\gamma(x)\,dx=1, \ \ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}, \ \ \gamma\neq 0. \tag{4}$$

Для произвольной функции $Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим через H_Q замыкание множества $C_0^\infty(0,1)$ по норме

$$\|y\|_{H_Q}=\left(\int_0^1 {y'}^2dx+\int_0^1 Q(x)y^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Изучаются оценки для

$$\inf_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}}\inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} R[Q,y] \quad \text{и} \quad \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}}\inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} R[Q,y]$$

при всех значениях параметров интегрального условия, а также оценки для точных нижней и верхней граней минимального собственного значения соответсвующей задачи Штурма–Лиувилля при тех значениях параметров интегрального условия, при которых оно существует.

Полученные оценки изучаемых величин можно найти в работах авторов [1], [2].

Следующая теорема 1 показывает, что при $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \beta < +\infty$ или $\gamma < 0$, $\beta \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$, а именно при тех значениях параметров интегрального условия, при которых множество функций $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$, удовлетворяющих дополнительному интегральному условию $\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < +\infty$, пусто, минимальное собственное значение задачи (2) – (4) не существует. При остальных значениях параметров α, β, γ, $\gamma \neq 0$, множество функций $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$, удовлетворяющих условию $\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < +\infty$, непусто, и имеет место теорема 2.

Теорема 1. *Для произвольного действительного числа λ рассмотрим уравнение (2), где Q – такая измеримая, неотрицательная, локально интегрируемая на $(0,1)$ функция, что*

$$\int_0^1 xQ(x)dx = +\infty.$$

Тогда не существует такой функции y, решения уравнения (2), что $y(0) = 0$, $y'(0) = \beta$ ни для какого $\beta > 0$.

Теорема 2. *Для любых α, β, γ, $\gamma \neq 0$, и для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$, удовлетворяющей условию*

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < +\infty,$$

$m = \inf\limits_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q,y]$ *есть минимальное собственное значение задачи (2) – (4).*

Литература

1. Ezhak S. On one upper estimate for the first eigenvalue of a Sturm–Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition / S. Ezhak, M. Telnova // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2018. — № 73. — P. 55–64.

2. Ежак С.С. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с потенциалами из весовых пространств / С.С. Ежак, М.Ю. Тельнова // Труды семинара имени И.Г. Петровского. — М. : МГУ им. М.В. Ломоносова. — 2019. — Вып. 32. — С. 162–190.

РЕГУЛЯРИЗОВАННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ «СЛАБОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

А.Г. Елисеев, П.В. Кириченко (Москва, НИУ «МЭИ»)
eliseevag@mpei.ru, kirichenkopv@mpei.ru

Методом регуляризации С.А. Ломова строится регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущенной неоднородной задачи Коши на всем отрезке $[0,T]$ в случае «слабой» точки поворота 1-го порядка у предельного оператора. Рассматривается задача Коши в $\mathbf{R^2}$

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u} = A(t)u + h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \end{cases} \tag{1}$$

где выполнены условия:

1) $h(t) \in C^{\infty}([0,T],\mathbf{R^2})$;

2) $A(t) \in C^{\infty}([0,T],\mathcal{L}(\mathbf{R^2},\mathbf{R^2}))$;

3) для собственных значений оператора $A(t)$:

а) $\forall t \in (0,T] \quad \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$;

б) $\forall t \in [0,T] \quad \lambda_i(t) \neq 0, \quad i = 1,2$;

4) условие «слабой» точки поворота 1-го порядка в точке $t = 0$: $\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = ta(t), \quad a(t) \neq 0$, причем геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для любых $t \in [0,T]$;

5) $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \leqslant 0, \quad i = 1,2, \quad$ при $\quad t \in [0,T]$.

Если точечная особенность имеет вид 4), то регуляризирующие функции находятся из задачи Коши

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{J}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} J + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J, \\ J(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

Лемма 1. Решение (2) представляется в виде равномерно сходящегося ряда на $[0,T] \times (0,\varepsilon_0]$, которое допускает оценку

а) если $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant -\delta < 0$, то $\|J\|_{C\,[0,T]} \leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\mathbb{C}$,

$b)$ если $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, то $\|J\|_{C\,[0,T]} \leqslant \mathbb{C}$,

где $\mathbb{C} > 0$ — константа, не завичсящая от ε.

Решение задачи (1) представляется в виде ряда

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m x_m^k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2,k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m^k(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m z_m(t),$$

где $J_i(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sigma_{i,k}, \quad i = 1, 2,$

$$\sigma_{1,k} =$$

$$= e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \underbrace{\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int\limits_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k \text{ интегралов}} ds_k \ldots ds_1,$$

$$\sigma_{2,k} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \underbrace{\int\limits_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int\limits_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k \text{ интегралов}} ds_k \ldots ds_1,$$

Теорема 1. Об оценке остатка (асимтотическая сходимость).

Пусть дана задача Коши (1) и выполнены условия 1) $\div$ 5). Тогда верна оценка

$$\|U(t,\varepsilon) - \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{m} \varepsilon^q \left(\sigma_{1,p}\, x_q^p(t) + \sigma_{2,p}\, y_q^p(t)\right) - \\ - \textstyle\sum_{q=0}^{m} \varepsilon^q z_q(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \mathbb{C} \cdot \varepsilon^{m+1}$$

Теорема 2. О предельном переходе.

Пусть дана задача Коши (1), выполнены условия 1) $\div$ 5) и $\lambda_i(t) \leqslant -\delta < 0$ при $t \in [\,0, T]$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(t,\varepsilon) = -A^{-1}(t)h(t).$$

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

2. Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора / А.Г. Елисеев, С.А. Ломов // Матем. сб. — 1986. — Т. 131 (173), № 4 (12). — С. 544–577.

РЕГУЛЯРИЗОВАННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ «ПРОСТОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА

А.Г. Елисеев, Т.А. Ратникова (Москва, НИУ «МЭИ»)
eliseevag@mpei.ru, ratnikovata@mpei.ru

На основе метода регуляризации С.А. Ломова [1] рассматривается сингулярно возмущенная задача Коши в случае рациональной простой точки поворота:

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^{m/n}u = h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0 \end{cases} \tag{1}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty([0,T],R)$;

2) $m, n \in \mathbb{N}$.

Заменой переменной $\tau = t^{1/n}$ задача (1) сводится к задаче:

$$\begin{cases} \varepsilon u'(\tau,\varepsilon) + \tau^p u(\tau,\varepsilon) = \tau^{n-1}h(\tau^n), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \quad p = m+n-1, \end{cases} \tag{2}$$

особенности решения которой описаны в работе [2].

Решение (2) строится в виде:

$$u(\tau,\varepsilon) = e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon}\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k x_k(\tau) + \sum_{i=0}^{p-1}\sigma_i(\tau,\varepsilon)\left(\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k y_k^i(\tau)\right) +$$

$$+ \sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$$

где $x_k(\tau), y_k^i(\tau), z_k(\tau) \in C^\infty[0,T]$, $\varphi(\tau) = \dfrac{\tau^{p+1}}{p+1}$,

$\sigma_i = e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon}\displaystyle\int_0^\tau e^{\varphi(s)/\varepsilon}s^i ds$, $i = \overline{0, p-1}$.

Теорема 1. *Пусть дано уравнение*

$$\tau^p z(\tau) = \tau^{n-s} h(\tau^n), \quad m+n-1=p, \quad 0 \leqslant s \leqslant n-1 \qquad (3)$$

и выполнены условия 1) и 2) задачи (1). *Тогда уравнение* (3) *разрешимо в классе гладких функций тогда и только тогда, когда* $h^k(0) = 0$, $k = \overline{0, [(m+s-1)/n]}$, *где* $[(m+s-1)/n]$ *— целая часть.*

Теорема 2. *Пусть задана задача* (2) *и выполнены условия 1), 2) задачи* (1). *Тогда верна оценка*

$$\left\| u(\tau,\varepsilon) - \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^k u_k(\tau,\varepsilon) \right\|_{C[0,T]} \leqslant C\varepsilon^{N+1} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

где $C > 0$ *— константа, не зависящая от* ε.

Теорема 3 (о предельном переходе). *Пусть выполнены условия теоремы 2 и дополнительные условия точечной разрешимости* $h^i(0) = 0$, $i = \overline{0,k}$, $k = [m/n]$. *Тогда* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u(\tau,\varepsilon) = u_0(\tau)$, *где* $u_0(\tau) = \dfrac{\tau^{n-1} h(\tau^n)}{\tau^p} = \tau^{n-s} h_1(\tau^n)$. *Здесь* $h_1(0) \neq 0$, $0 \leqslant s \leqslant n-1$ *или в терминах исходной задачи* $u_0(t) = t^{(1-s/n)} h_1(t)$.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

2. Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора / А.Г. Елисеев, С.А. Ломов // Мат. сборник. — 1986. — Т. 131, № 173. — С. 544–557.

ЗАДАЧА ИНИЦИАЛИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА 2-ГО РОДА

А.Г. Елисеев, Т.А. Ратникова, Д.А. Шапошникова

(Москва, НИУ «МЭИ»)

yeliseevag@mpei.ru, ratnikovata@mpei.ru, shaposhnikovda@mail.ru

Проблема инициализации [1–3] состоит в определении начальных условий для сингулярно возмущенной задачи Коши, чтобы подавить быстро осциллирующие или быстро растущие слагаемые решения. В данной работе эта проблема методом регуляризации С.А. Ломова [4] решена для систем вида

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u}(t,\varepsilon) + A(t)u(t,\varepsilon) + \int\limits_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0 \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int\limits_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = h(t), \tag{2}$$

Дифференцированием система (2) сводится к (1), где $A(t) \equiv K(t,t)$, $u^0(0,\varepsilon) = h(0)/\varepsilon$. Для (1), (2) выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty[0,T]$;
2) $A(t) \in C^\infty[0,T]$;
3) $K(t,s) \in C^\infty(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$; (3)
4) $Sp(A(t)) = \{\lambda_i(t)\}$ стабилен, т.е. $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0,T]$.

Получены следующие результаты.

I. Спектр предельного оператора чисто мнимый $Sp(A(t)) = = \{\pm i\lambda(t)\}$, $\lambda(t) > 0$.

Теорема 1. *Пусть для задачи Коши* (1) *выполнены условия* (3). *Тогда если* $u^0(\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\varepsilon^k D^{k+1}(t)H(t)\big|_{t=0}$ *для задачи* (1) *или* $u^0(\varepsilon) = -\frac{h(0)}{\varepsilon} + \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\varepsilon^k D^{k+1}(t)h(t)\big|_{t=0}$ *для задачи* (2), *то имеет место оценка*

$$\left\| u(t,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^{k+1}(t)g(t) \right\|_{C[0,T]} \leqslant C\varepsilon^{n+1}. \tag{4}$$

Здесь $H(t) = \int\limits_0^t h(s)ds$; $g(t) = H(t)$ *для* (1), $g(t) = h(t)$ *для* (2); *оператор* $D(t) = \left(I + \int\limits_0^t A^{-1}(t)K(t,s) \bullet ds\right)^{-1} A^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}$.

II. Спектр предельного оператора содержит положительное собственное значение $\lambda(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Специфику решения задачи инициализации в этом случае можно прояснить на скалярном интегро-дифференциальном и интегральном уравнении Вольтерра 2-го порядка

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u}(t,\varepsilon) - \lambda(t)u(t,\varepsilon) + \int\limits_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon), \quad \lambda(t) > 0. \end{cases} \tag{5}$$

$u^0(\varepsilon)$ подлежит определению.

Существенное отличие от случая чисто мнимого спектра состоит в том, что здесь необходимо найти весь ряд $u^0(\varepsilon)$ и условия на $h(t)$, при которых ряд $u(t,\varepsilon) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{k+1}(t)g(t)$ сходится. В противном случае нельзя провести оценку остатка при доказательстве асимптотичности при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3) *и* $\exists V > 0$ $\exists \mathbb{C} > 0$ $\forall t \in [0,T]$ $|D^k(t)g(t)| \leqslant CV^k$, $k = 0,1,\ldots$ *Тогда если* $u^0(\varepsilon) = -\sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon^k D^{k+1}(t)H(t)\big|_{t=0}$ *для задачи* (1) *или* $u^0(\varepsilon) = -\frac{h(0)}{\varepsilon} + \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon^k D^{k+1}(t)h(t)\big|_{t=0}$ *для задачи* (2), *то решение* (1) *запишется в виде ряда по* ε $u(t,\varepsilon) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^{k+1}(t)g(t)$, *который сходится равномерно, а, следовательно, является асимптотическим.*

В заключение рассмотрим, каким условиям должна удовлетворять $h(t)$, чтобы задача инициализации решалась без подбора начального условия $u^0(\varepsilon)$.

Теорема 3. *Пусть* $h(t)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $h(t)$ *B-аналитична* $\forall t \in [0,T]$ *за исключением точки* $t = 0$;

2) $\forall k = 0,1,\ldots$ $D^k(t)h(t)\big|_{t=0} = 0$;

3) $\forall k = 0,1,\ldots$ *выполнена обратная теорема Абеля в точке* $t = 0$

$$\lim_{s\to 0+} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_t^s B(s_1)ds_1 \right)^k D^k(t)h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_t^0 B(s_1)ds_1 \right)^k D^k(t)h(t) = 0.$$

Тогда $u(t,\varepsilon) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D^k(t)h(t)$ *— решение* (5). *Здесь* $B(t) = \lambda(t) + \int\limits_0^t K(t,s) \bullet ds$.

Литература

1. Филатов А.Н. Асимптотические методы в атмосферных моделях / А.Н. Филатов, В.В. Шершиков. — Л. : Гидрометеоиздат, 1988. — 269 с.

2. Ипатова В.М. Задачи инициализации для моделей общей циркуляции атмосферы / В.М. Ипатова // Труды МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 121–130.

3. Елисеев А.Г. Задача инициализации сингулярно возмущенного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с диагональным вырождением в случае $n \geqslant 3$ / А.Г. Елисеев, Д.А. Шапошникова // Вестник МЭИ. — 2015. — № 3. — С. 143–144.

4. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

«$N-1$» ПУТИ НА ГРАФЕ–РЕШЕТКЕ. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

Я.М. Ерусалимский (Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет)
ymerusalimskiy@sfedu.ru

Рассмотрен граф–решетка с «$n-1$» ограничениями на достижимость. Он имеет вершины в точках плоскости с неотрицательными целочисленными координатами. Из каждой вершины выходит две дуги: горизонтальная — в ближайшую правую вершину и вертикальная — в ближайшую верхнюю вершину (см. рис. 1).

Допустимыми путями в случае «$n-1$» достижимости являются пути, удовлетворяющие дополнительному условию кратности n количеств дуг в максимальных по вложению отрезках путей, состоящих только из горизонтальных дуг. Это ограничение не распространяется на заключительный отрезок пути, состоящий из горизонтальных дуг.

Получена формула для количества «$n-1$» путей, ведущих из вершины в вершину, а также формула для количества таких путей, проходящих через заданную вершину графа–решётки.

Изучен процесс случайного блуждания по «$n-1$» путям на графе-решётке. Показано, что он локально сводим к Марковскому процессу на подграфе, определяемом стартовой вершиной. Получены формулы для нахождения вероятностей перехода из вершины

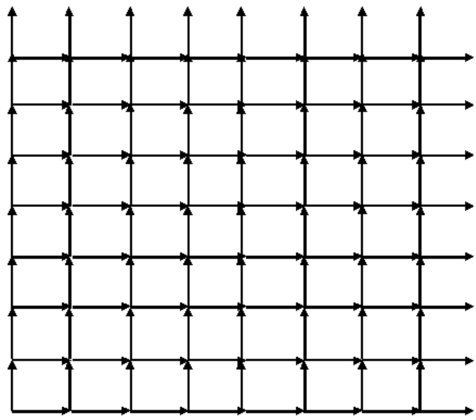


Рис. 1:

в вершину по «$n-1$» путям, а также комбинаторные тождества на треугольнике Паскаля.

Аналогичные задачи для других типов ограничений на достижимость были рассмотрены в работах [1–5].

Литература

1. Ерусалимский Я.М. Случайные блуждания по графу-решётке и комбинаторные тождества / Я.М. Ерусалимский // Инженерный вестник Дона. — 2015. — Ч. 2, № 2. — 12 с.

2. Erusalimskiy I.M. Graph–lattice: random walk and combinatorial identities / I.M. Erusalimskiy // Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana. — 2016. — V. 22. Issue 2. — Pp. 329–335.

3. Ерусалимский Я.М. 2–3 пути на графе–решётке. Случайные блуждания / Я.М. Ерусалимский // Математические заметки. — 2018. — Т. 104, вып. 3. — С. 396–406.

4. Ерусалимский Я.М. 2 и 3 пути на графе и комбинаторные тождества / Я.М. Ерусалимский // Известия вузов. Северо–Кавказский регион. Ест. науки. — 2017. — № 1 (193). — С. 25–30.

5. Ерусалимский Я.М. Треугольник Паскаля : комбинаторика и случайные блуждания : уч. пособие / Я.М. Ерусалимский // Ростов-на-Дону; Таганрог : Изд-во Южного федерального университета, 2017. — 132 с.

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Е.С. Жуковский, В. Мерчела
(Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
zukovskys@mail.ru, merchela.wassim@gmail.com

В [1] получено распространение теоремы Арутюнова [2] о точке совпадения на отображения, действующие в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. Здесь предлагается утверждение о точке совпадения отображений со значениями в пространстве, расстояние в котором не удовлетворяет аксиомам симметрии и треугольника.

Пусть заданы метрическое пространство $X = (X, \rho_X)$ и непустое множество Y, на котором определено расстояние — отображение $d_Y : Y^2 \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условию

$$\forall y_1, y_2 \in Y \;\; d_Y(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

Определение. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $\psi : X \to Y$ называем *α-накрывающим,* если выполнено соотношение

$$\forall x_0 \in X \; \forall y \in Y \; \exists x \in X \;\; \psi(x) = y, \;\; \rho_X(x, x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha} d_Y\big(\psi(x), \psi(x_0)\big).$$

Теорема. *Пусть метрическое пространство X является полным и выполнены следующие условия: отображение $\psi : X \to Y$ является α-накрывающим и замкнутым; отображение $\varphi : X \to Y$ является β-липшицевым. Тогда, если $\alpha > \beta$, то множество точек совпадения отображений ψ, φ не пусто, кроме того,*

$$\forall x_0 \in X \; \exists \xi \in X \;\; \psi(\xi) = \varphi(\xi), \;\; \rho_X(\xi, x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha - \beta} d_Y\big(\psi(x_0), \varphi(x_0)\big).$$

Литература

1. Арутюнов А.В. (q1,q2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения / А.В. Арутюнов, А.В. Грешнов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 2. — С. 3–32.

2. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки / А.В. Арутюнов // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 416, № 2. — С. 151–155.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-41-680975, № 17-01-00553).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ[1]

Д.С. Завалищин (Екатеринбург, ИММ УрО РАН)
dzaval@mail.ru

В классе задач теории оптимального управления движением механических объектов в вязкой среде исследуются новые постановки с расширенными математическими моделями, в том числе с дополнительными параметрами среды. Такие задачи являются вырожденными и для их решения требуются разработка специального математического аппарата. В частности, рассматривается постановка задачи об оптимальном по расходу энергии на преодоление сопротивления вязкой жидкости переменной плотности поступательном перемещении твердого тела изменяемой формы из одного фазового состояния в другое (время перемещения задано). Проведен анализ нелинейных связей физических характеристик вязкой среды, построена математическая модель с учетом этих связей. Выявлены особенности задачи оптимального управления перемещением тел с изменяемой геометрией в вязкой среде переменной плотности с точки зрения теории оптимального управления. Выведены необходимые условия оптимальности. Построение такого перемещения связано с решением некоторой двухточечной граничной задачи для системы из уравнений Навье–Стокса и имеющей аналогичную структуру сопряженной системы.

Литература

1. Завалищин Д.С. Динамическая оптимизация обтекания / Д.С. Завалищин, С.Т. Завалищин. — М. : Физматлит, 2002. — 224 с.

2. Zavalishchin D.S. Modeling of the optimal programs dependence on bodies geometric constraints when moving in a viscous medium / D.S. Zavalishchin // AIP Conference Proceedings. — NY: American Institute of Physics. — 2017. — V. 1910. — P. 1–5.

3. Завалищин Д.С. Негладкая оптимизация обтекания тел в гидродинамике / Д.С. Завалищин // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления : XIV Междунар. науч. конф. им. Пятницкого). — М. : ИПУ РАН, 2018. — С. 158–161.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371 А).

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА

Т.В. Завьялова, Г.А. Тимофеева
(Москва, МИСиС, Екатеринбург, УрГУПС)
tzava@yandex.ru

Одной из важнейших задач финансовой математики является задача оценки будущей цены акции. Для решения этой задачи необходимо построить адекватную математическую модель изменения цен акций. В классической модели Блэка-Шоулза цена акции описывается непрерывным диффузионным процессом с постоянной процентной ставкой и волатильностью. Практическое изучение динамики цен акций выявило ряд недостатков модели Блэка-Шоулза а именно, статистическую несовместимость с реальными процессами. Поэтому рассматривается обобщенная стохастическая модель Блэка-Шоулза, которая исследовалась в ряде работ [1,2].

Моделирование траектории цен акций с помощью стохастических дифференциальных уравнений со скачками, оказалось наиболее содержательным. Предполагается, что на промежутках постоянного значения показателя волатильности стохастическая модель цены акции описывается классическим уравнением Блека-Шоулза, а случайные моменты времени скачкообразно изменяется цена акций.

Описано изменение статистических моментов цен акций для стохастической модели со случайным скачкообразным изменением цены, проведен расчет американского и европейского опциона. Показано, что расчет цены представляет собой задачу об оптимальной остановке. Полученный результат демонстрируются на простейшей ситуации, когда рынок имеет только две ценные бумаги.

Литература

1. Griebel M. An Efficient Sparse Grid Galerkin Approach for the Numerical Valuation of Basket Options Under Kou's Jump-Diffusion Model / M. Griebel, A. Hullmann // Sparse Grids and Applications. — 2013. — V. 88. — P. 121–150.

2. Шепп Л.А. Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» /Л.А. Шепп, А.Н. Ширяев // Теория вероятн. и ее примен. — 1994. — Т. 39, № 1. — С.130–149.

УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

И.В. Зайцева (Ставрополь, СтГАУ)
irina.zaitseva.stv@yandex.ru

При оценке различных инвестиционных проектов в изменяющихся условиях и при неопределенности возникают различного рода риски, снижающие их эффективность. Для уменьшения таких рисков и повышения эффективности проектов необходимо проведение корректирующих мероприятий в динамическом режиме обратной связи. Осуществление таких мероприятий требует вложения ресурсов в эти проекты. В начальный момент определены множества трудовых ресурсов фирм, распределяемых по инвестиционным проектам. Также известна эффективность вложения трудовых ресурсов по тому или иному проекту. Каждый тип ресурса может находиться в одном из конечного числа состояний, различающихся эффективностью его использования. Каждый инвестиционный проект потенциального вложения трудовых ресурсов может находиться в одном из конечного числа состояний, характеризуемых уровнем потенциала возможного развития проекта, эффективностью вложения средств в данный проект. При этом под эффективностью вложения трудовых ресурсов данного типа в данный инвестиционный проект будем понимать способность трудового ресурса переводить объект капиталовложения из данного состояния в состояние, характеризуемое более высокой (или низкой) степенью эффективности. Необходимо распределить трудовые ресурсы по инвестиционным проектам оптимальным образом, т.е. так, чтобы суммарная эффективность вложений была максимальной. К началу следующего этапа от решения, принятого на предыдущем этапе, и от иных причин могут измениться множество проектов инвестирования, трудовых ресурсов, а также эффективность трудового ресурса в том или ином проекте. Следовательно, возникает новая ситуация, в которой необходимо решать новую задачу об оптимальном распределении трудовых ресурсов. Таким образом, возникает динамическая задача. Поставленная задача решена методом динамического программирования, причем в качестве стратегий на каждом шаге используются различные решения задачи о назначении.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.В. Зайцева (Казань, КФУ)
n.v.zaiceva@yandex.ru

Рассмотрим в области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l, 0 < t < T\}$ координатной плоскости Oxt, где $l, T > 0$ — заданные действительные числа, гиперболическое уравнение

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0, \tag{1}$$

где $x^{-k}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right)$ — оператор Бесселя, $k \neq 0$ – заданное действительное число. Уравнение (1), согласно терминологии [1], будем называть B-гиперболическим уравнением.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D), \quad x^k u_x(x,t) \in C(\overline{D}),$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\lim_{x\to 0+} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad |k| < 1,$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k \leqslant -1,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi'(l) = \psi'(l) = 0$.

Доказательство единственности решения задачи проводится методом интегральных тождеств. Решение построено в виде ряда Фурье-Бесселя. Методом спектрального анализа доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленной задачи.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука. Физматлит, 1997. — 208 с.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕВЫДЕЛЕННОЙ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ И ОПРЕДЕЛЕНИИ СЛЕДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Ю.В. Засорин (Воронеж, ВГУ)
York-York-York-1960@yandex.ru

Рассматривается проблема корректной разрешимости задач Коши для нестационарных уравнений с невыделенной старшей производной:

$$L(D_x, D_t)u(x,t) = 0, \quad x \in R^n,\, t > 0, \tag{1}$$

где

$$L(D_x, D_t) = \sum_{k=0}^{m} P_k(D_x) D_t^k, \quad (m \geqslant 1), \tag{2}$$

а $P_k(D_x)$ — дифференциальные полиномы с постоянными коэффициентами, содержащие производные по пространственным переменным $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in R^n$, причем $P_m(D_x) \neq const$. Пусть, далее, $P(i\xi)$ — символ оператора $P(D_x)$. Если символ $P(i\xi)$ не имеет вещественных нулей $\xi \in R^n$, то уравнение (1) с оператором $L(D_x, D_t)$ из равенства (2) называется *невырожденным*, в противном случае — *вырожденным*. И если невырожденный случай принципиально ничем не отличается от случая нестационарного уравнения (1)-(2) с *с выделенной старшей производной по времени* ($P_v(D_x) \equiv 1$), то в вырожденном случае возникает ряд проблем, связанных с корректной разрешимостью задач Коши для уравнений (1)-(2).

Для решения этих проблем автор вводит собственное определение сужения распределения $T \in S'(\bar{R}^n_+)$ на *открытое* полупространство $R^n = \{t > 0\}$ и *следа* $T|_{t=+0}$ на гиперплоскость начальных данных $\{t = +0\}$ в терминах преобразования Лапласа распределений $T \in S'(\bar{R}^n_+)$ по переменной $t \in R$, а с их помощью конструирует классы корректной разрешимости задач Коши, связанных с уравнениями (1).

МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИЙ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

М.Б. Зверева (Воронеж, ВГУ)
margz@rambler.ru

Пусть вдоль отрезка $[0,l]$ натянута струна. Под воздействием внешней силы, задаваемой функцией $F(x)$, струна отклоняется от положения равновесия и принимает форму $u(x)$. Предполагается, что струна помещена в окружающую среду с локализованными упругими опорами (пружинами). Будем считать, что левый конец струны жестко закреплен, т.е. выполнено условие $u(0)=0$. Правый конец струны с помощью кольца прикреплен к спице, по которой он может скользить (без учета трения). При этом спица находится внутри втулки, представленной отрезком $C=[-h,h]$. В зависимости от приложенной внешней силы, правый конец струны остается свободным, что может быть выражено условием $u'(l)=0$, либо касается граничной точки втулки, т.е. выполняется условие $u(l)=\pm h$. Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} -p(x)u'(x)+\int\limits_0^x u\,dQ = F(x)-F(0)-(pu')(0) \\ u(0)=0, \\ u(l)\in C, \\ -u'(l)\in N_C(u(l)). \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь множество $N_C(u(l))$ — нормальный конус к C в точке $u(l)$.

Теорема 1. *Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0,l]$, функции $p(x)$, $F(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0,l]$, причем, $\inf\limits_{[0,l]} p>0$, и функции p, Q, F непрерывны в точках $x=0$ и $x=l$. Тогда решение задачи (1) существует и единственно. При $h\to 0$ решение задачи (1) равномерно стремится к решению задачи с граничными условиями $u(0)=u(l)=0$.*

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017/ ПЧ.), гранта РФФИ (проект № 17-51-52022 МНТ-а.)

АТТРАКТОРЫ АЛЬФА-МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ[1]

А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ)
zvyagin.a@mail.ru

Рассматривается начально-краевая задача (см. [1], [2]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\big(v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\big) + \nabla p = f,$$

$$\operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \partial\Omega,$$

$$u = (I - \alpha^2\Delta)^{-1} v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0.$$

Здесь, v — скорость движения частицы жидкости, u — функция модифицированной скорости движения частицы жидкости, p — функция давления, f — функция плотности внешних сил. Через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, обозначается тензор скоростей деформации, $\varkappa > 0$ — время ретардации (запаздывания), ν — вязкость жидкости, $\alpha > 0$ — скалярный параметр.

Для данной начально-краевой задачи исследуется существование тракторных и глобальных аттракторов ([3], [4]).

Литература

1. Звягин А.В. О разрешимости альфа-модели движения растворов полимеров / А.В. Звягин // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2018. — № 4. — С. 113–115.

2. Звягин А.В. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, Д.М. Поляков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2016. — № 2. — С. 72–93.

3. Звягин А.В. Аттракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении / А.В. Звягин // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 453, № 6. — С. 599–602.

4. Zvyagin A.V. Attractors for model of polymer solutions motion / A.V. Zvyagin // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2018. — V. 28, № 12. — P. 6305–6325.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант МК-2213.2018.1, соглашение 075-02-2018-339).

ДИНАМИКА ПЛАСТИНЫ С УПРУГО ПРИСОЕДИНЁННОЙ МАССОЙ

А.В. Звягин, Н.Э. Садыгова
(Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова)
zvyagin.aleksandr2012@yandex.ru, nigu_s@hotmail.com

В работе рассматривается задача о динамической нагрузке балки ударяющим телом в присутствии промежуточного демпфера – пружины заданной жёсткости. Необходимо определить совместное движение механической системы: балка-пружина-тело, пренебрегая массой пружины. Движение балки моделируется уравнениями цилиндрических колебаний пластины. Получена система уравнений для совместного движения системы балка – пружина – тело, состоящая из уравнений для прогиба балки и уравнения движения тела, с учётом жёсткости пружины. Система уравнений, моделирующая движение, состоит из уравнения в частных производных четвёртого порядка по координате и второго порядка по времени, одним из граничным условий которого, является обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по времени (уравнение движения тела). Задача решается с методом интегрального преобразования Лапласа по времени [1]. Найдено аналитическое решение для образов. Для обращения полученного решения используется численный метод (метод Дурбина, [2], [3]). Метод протестирован сверкой с точным решением для малых начальных времён. Проведен анализ поведения во времени основных искомых функций. Построены иллюстрирующие графики. Также показана зависимость искомых функций от основных параметров задачи: жёсткости пружины и изгибной жёсткости балки.

Литература

1. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики / А.И. Лурье. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1951.

2. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов. — М. : ГИТТЛ, 1974.

3. Numerical inversion of Laplace transforms : an efficient improvement to Dubner and Abate's method, F. Durbin.

АТТРАКТОРЫ ДЛЯ АВТОНОМНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ[1]

В.Г. Звягин, М.В. Казначеев (Воронеж, ВГУ)
zvg_vsu@mail.ru, m.v.kaznacheev@yandex.ru

Рассматривается следующая начально краевая задача (см. [1]), описывающая движение нелинейно-вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\{2\varphi(I_2(v))\varepsilon(v)\} + \mathrm{grad}\, p = f(x); \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0,\ (x,t) \subset \Omega \times (0; +\infty); \quad v(x,0) = v^0,\ x \subset \Omega; \qquad (2)$$

$$v(x,t) = 0,\ (x,t) \subset \partial\Omega \times (0; +\infty). \qquad (3)$$

Определение 1. *Пространством траекторий $\mathcal{H}^+$ для задачи (1)-(3) называется множество функций v принадлежащих пересечению $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+, V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$, которые являются слабым решением этой задачи с некоторым начальным условием $v(0) = v^0$, $v^0 \in H$ и удовлетворяют для почти всех $t \geqslant 0$ оценке*

$$\|v\|^2_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v\|^2_{L_2(t,t+1;V)} \leqslant C_1 \left(e^{-2\gamma t} \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}^+;H)} + \|f\|^2_{V^*} \right).$$

Пространство траекторий $\mathcal{H}^+$ непусто, более того, для каждого $v^0 \in H$ существует траектория $v \in \mathcal{H}^+$ такая, что $v(0) = v^0$.

Теорема 1. *Пусть $f \in V^*$. Тогда существует траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in V^*$. Тогда существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Причем*

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{A}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Литература

1. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости / В.Г. Литвинов. —М. : Наука, 1982. — 376 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 14.Z50.31.0037).

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ; Воронеж, ВГЛТУ)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = B\frac{\partial y}{\partial x} + Du(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in [0,x_k], \tag{1}$$

где $y = y(t,x) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Выявляются требования к B и D, при исполнении которых система (1) полностью управляема, то есть существует функция управления (управление) $u(t,x)$, под воздействием которого состояние системы (1) переводится из произвольного начального состояния $\alpha(x)$ в произвольное конечное состояние $\beta(x)$:

$$y(0,x) = \alpha(x) \in \mathbb{R}^n, \quad y(T,x) = \beta(x) \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

за время $[0,T], \forall T > 0$. Функция $u(t,x)$ предполагается непрерывной на $[0,T] \times [0,x_k]$.

Теорема 1. *Система* (1) *полностью управляема в том и только том случае, когда выполняется условие Калмана.*

Методом каскадной декомпозиции, применявшемся, в частности, в [1], строятся $u(t,x)$ и $y(t,x)$, удовлетворяющие (1), (2).

Литература

1. Zubova S.P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya// Automation and Remote Control. — 2018. — Т. 79, № 5. — С. 774–791.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С.П. Зубова, А.Х. Мохамад (Воронеж, ВГУ)
spzubova@mail.ru, abdulftah.hosni90@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial U}{\partial t} = B\frac{\partial U}{\partial x} + f(t,x), \tag{1}$$

где A — линейный замкнутый фредгольмов оператор: $E_1 \to E_2$; $\overline{\operatorname{dom} A} = E_1$; E_1, E_2 – банаховы пространства; dim Ker A = dim Coker $A \geqslant 0$; $B \in L(E_1,\, E_2)$ и B — необратим; $f(t)$ — непрерывная функция со значениями в E_2; $U = U(t,x) \in E_2$; $(t,x) \in [0,t_k] \times [0,x_k]$.

Рассматривается регулярный случай, то есть оператор $(A - \lambda B)$ обратим при $\lambda \in \dot{\bigcup}(0)$. В этом случае оператор $(A-\lambda B)^{-1}A$ имеет число 0 нормальным собственным числом [1] и пространство E_1 представимо в виде прямой суммы некоторых подпространств $M^{(1)}$ и $N^{(1)}$ с проекторами на них $Q^{(1)}$ и $P^{(1)}$ соответственно. Уравнение (1) расщепляется на уравнения в этих подпространствах и решается в них с условиями

$$Q^{(1)}U(0,x) = \varphi(x) \in M^{(1)}, \quad P^{(1)}U(t,0) = \psi(t) \in N^{(1)}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Решение $U(t,x)$ задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

Получены формулы для $U(t,x)$.

Начально-краевая задача для уравнения (1) рассматривалась в статье [2], в которой накладываются более жесткие условия на операторы A, B.

Литература

1. Зубова С. П. Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator multiplying the derivative // S.P. Zubova // Doklady Mathematics. — 2009. — Vol. 80, No. 2. — P. 710–712.

2. Нгуен Х. Д. О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных / Х.Д. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Вестник ЮУрГУ. Серия:

Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, № 1. — С. 98–111.

О ВНЕШНИХ ОЦЕНКАХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

И.В. Зыков (Екатеринбург, ИММ УрО РАН)
zykoviustu@mail.ru

Для получения внешних оценок множеств достижимости систем с геометрическими ограничениями известен метод, основанный на дифференциальных неравенствах Гамильтона-Якоби (см., например, [1,2,3,4]). В настоящей работе рассматривается задача построения внешних оценок множеств достижимости в виде множества уровня некоторой дифференцируемой функции Ляпунова-Беллмана для управляемой системы с интегральным ограничением на управление. Предлагаемые конструкции базируются на интегральных оценках и принципе сравнения для систем дифференциальных неравенств. За счет использования нескольких функций можно получить более точную оценку в виде пересечения соответсвующих оценок. Приведен ряд иллюстрирующих примеров для линейных и нелинейных систем.

Литература

1. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона-Якоби в теории управления / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 173–183.

2. Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении / В.А. Дыхта // Оптимальное управление и динамические системы. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — М. : ВИНИТИ, 2006. — Т. 110 — С. 76–108.

3. Гусев М.И. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем / М.И. Гусев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 1. — С. 60–69.

4. Никольский М.С. Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов / М.С. Никольский // Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со

дня рождения Льва Семеновича Понтрягина. — 2018. — С. 194–196.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ[1]

Е.П. Иванова (Москва, Московский авиационный институт, Российский университет дружбы народов)
elpaliv@yandex.ru

Рассматривается краевая задача:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij}u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{1}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin Q). \tag{2}$$

Здесь Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $f \in L_2(Q)$. Разностные операторы: $R_{ij}u(x) = \sum\limits_{h\in M} a_{ijh}u(x+h) \quad (a_{ijh} \in \mathbb{R})$, где M — конечное множество векторов с несоизмеримыми координатами. Решение u задачи (1)- (2) ищется в пространстве Соболева $\mathring{H}^1(Q)$.

Теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с соизмеримыми сдвигами аргументов в старших членах построена в работах А.Л. Скубачевского [1]. Поскольку даже малые возмущения сдвигов могут нарушить их соизмеримость, известные условия сильной эллиптичности для уравнения (1) неприменимы.

Получены условия сильной эллиптичности (выполнение неравенства Гординга) уравнения (1) [2]; исследуется разрешимость и гладкость обобщенных решений задачи (1)- (2) [3].

Литература

1. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, № 5. — С. 3–112.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №17–01–00401).

2. Иванова Е.П. О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов / Е.П. Иванова // СМФН. — 2016. —Т. 59. — С. 85–99.

3. Иванова Е.П. О гладких решениях дифференциально-разностных с несоизмеримыми сдвигами аргументов / Е.П. Иванова // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, вып. 1. — С. 145–148.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Е.И. Иохвидов (Воронеж, ВГТУ)

1. Преобразования, вынесенные в заглавие, состоят в следующем. В каких-либо m элементах, расположенных на главной диагонали характеристического определителя, производится замена переменной:

$$(a_{ii} - \lambda) \to (a_{ii} - \frac{1}{\lambda}) \tag{1}$$

$(i = 1, 2, ..., n; n \leqslant m)$. Очевидно, что число таких преобразований равно числу главных миноров определителя. Вычисляя преобразованный определитель, приравнивая полученный «квазимногочлен» к нулю и умножая обе части на λ^m, получаем новое алгебраическое уравнение той же степени n :

$$T_n(\lambda) = 0. \tag{2}$$

Заметим, что в случае $m = n$ такое преобразование рассматривалось в [1], задача 6.2.9.

Теорема 1. *Сумма коэффициентов уравнения (2) равна сумме коэффициентов исходного характеристического уравнения.*

Определение. Альтернирующей суммой коэффициентов алгебраического уравнения (произвольного)

$$b_0 \cdot \lambda^n + b_1 \cdot \lambda^{n-1} + ... + b_{n-1} \cdot \lambda + b_n = 0 \tag{3}$$

будем называть величину

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + ... + (-1)_n \cdot b_n, \tag{4}$$

при этом коэффициенты, равные нулю, учитываются.

Теорема 2. *Альтернирующая сумма коэффициентов уравнения (2) равна альтернирующей сумме коэффициентов исходного характеристического уравнения, умноженной на* $(-1)^m$.

2. Рассмотрим конечномерное пространство

$$H = H_+ \oplus H_-, \quad P_\pm^2 = P_\pm^* = P_\pm, \quad P_+ + P_- = I$$

с индефинитной метрикой $[x, y] = (Jx, y)$, $J = P_+ - P_-$. Для любого линейного оператора A из класса Γ $(Ker(P_+ + P_-A) = \{0\})$ имеет смысл преобразование Потапова-Гинзбурга

$$B = (P_- + P_+A)(P_+ + P_-A)^{-1} \tag{5}$$

(См., например, [2]). С помощью теорем 1 и 2 выведены формулы, связывающие спектр операторов A и B. Ограничимся здесь формулировкой результатов в двумерном случае и трехмерном случае. В двумерном случае имеем:

$$dimH_+ = 1, \quad divH_- = 1, \quad \sigma(A) = \{\lambda_1; \lambda_2\}; \quad \sigma(B) = \{\mu_1; \mu_2\}.$$

Теорема 3. *Справедлива формула:*

$$(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) =$$

$$= -(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 + \mu_1)(1 + \mu_2). \tag{6}$$

Замечание 1. В [2] формула, связывающая множества $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$, имеет другой вид, а именно:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) = (1 + \lambda_1\lambda_2)(1 + \mu_1\mu_2) \tag{7}$$

Формулы (6) и (7), как легко проверить, равносильны.
В трехмерном случае возможны уже два варианта:

$$1) \quad dimH_+ = 2, \quad dimH_- = 1$$

$$2) \quad dimH_+ = 1, \quad dimH_- = 2.$$

Обозначив

$$\sigma(A) = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}, \quad \sigma(B) = \{\mu_1; \mu_2; \mu_3\},$$

получаем

Теорема 4. *Для первого варианта справедлива формула:*

$$(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3) =$$

$$= -(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)(1+\mu_1)(1+\mu_2)(1+\mu_3), \qquad (8)$$

а для второго варианта - формула

$$(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3) =$$

$$= (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)(1+\mu_1)(1+\mu_2)(1+\mu_3), \qquad (9)$$

Замечание 2. Формула (9) отличается от формулы (8) только знаком плюс перед выражением в правой части.

Литература

1. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре / Х.Д. Икрамов. — М. : Наука, 1975. — 320 с.

2. Иохвидов Е.И. Связь между спектром линейного оператора и спектром его преобразования Потапова-Гинзбурга в случае двумерного пространства Крейна / Е.И. Иохвидов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. : Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. — С. 50–51.

ПРИЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА И ВОЛЬТЕРРА-ФРЕДГОЛЬМА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

А.С. Калитвин (Липецк,
ЛГПУ имени П.П.Семенова-Тян-Шанского)
kalitvinas@mail.ru

В работе рассматриваются проблемы, приводящиеся к линейным уравнениям Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами.

К линейным уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся задачи теории упругости, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и некоторые другие проблемы.

Изгиб тонких пластинок, пологие упругие оболочки [1—3]:

$$\omega(z,\xi) = \int_0^z l(z,\xi,t)\omega(t,\xi)dt + \int_0^\xi m(z,\xi,\tau)\omega(z,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^z \int_0^\xi n(z,\xi,t,\tau)\omega(t,\tau)dtd\tau + g(z,\xi).$$

Функция Римана для уравнения второго порядка эллиптического типа [1]:

$$V(z,\zeta) - \int_t^z B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi - \int_\tau^\zeta A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta +$$

$$+ \int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta C(\xi,\zeta)V(\xi,\eta)d\eta = 1.$$

Гиперболическое уравнение Лапласа, задача Гурса [4]:

$$\varphi(x,y) = \int_0^x b(x,y)\varphi(\xi,y)d\xi + \int_0^y a(x,y)\varphi(x,\eta)d\eta + f(x,y).$$

Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения Барбашина [3]:

$$y(t,s) = \int_{t_0}^t c(t,s)y(\tau,s)d\tau + \int_{t_0}^t \int_a^b k(t,s,\sigma)y(\tau,\sigma)d\sigma d\tau + g(t,s).$$

К линейным уравнениям Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами приводятся задачи механики сплошных сред, смешанные задачи эволюционного типа, осесимметричные контактные задачи и другие проблемы. Уравнения Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами этих задач изучались в книгах [2, 3]; в этих же книгах приведена и библиография работ, связанных с приложениями уравнений Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами.

Механика сплошных сред [2, 3, 5, 6]:

$$\lambda x(t,s) + \int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s-\sigma)x(t,\sigma)d\sigma = g(t,s).$$

Смешанные задачи эволюционного типа [2, 3, 6]:

$$x(t,s)+\int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_{-1}^1 m(s-\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+$$

$$+\int_0^t\int_{-1}^1 n(t,\tau)m(s-\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma=g(t,s).$$

Осесимметричные контактные задачи [2, 3, 5, 6]:

$$\lambda x(t,s)+\int_0^t sx(\tau,s)d\tau+\frac{2}{\pi}\int_c^1 m\left(\frac{2\sqrt{s\sigma}}{s+\sigma}\frac{\sigma}{s+\sigma}\right)x(t,\sigma)d\sigma=g(t,s).$$

Контактные задачи теории ползучести неоднородно- стареющих тел [2, 3, 6, 7]:

$$x(t,s)-\int_1^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau-c(t)\int_a^b m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma-$$

$$-\int_1^t\int_a^b c(t)n(t,\tau)m(s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma=g(t,s).$$

Общее уравнение механики сплошных сред и теории ползучести неоднородно-стареющих тел [2, 3]:

$$x(t,s)=a(s)\int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau+c(t)\int_0^b m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+$$

$$+d(t,s)\int_0^t\int_0^b n(t,\tau)m(s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s).$$

Другие приложения: в монографиях [2, 3] приведены многочисленные примеры линейных и нелинейных уравнений с частными интегралами, применявшихся к решению различных задач.

Литература

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. — М. ; Л. : ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. — 296 с.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

3. Appell J.M. Partial integral operators and integro-differential equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zab-rejko. — New York-Basel : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

4. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т.1 / Г. Мюнтц. — Л. ; М. : ГТТИ, 1934. — 330 с.

5. Александров В.М. Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа / В.М. Александров, Е.В. Коваленко // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 5. — С. 58–66.

6. Appell J. On some partial integral equations arising in the mechanics of solids / J. Appell, A.S. Kalitvin, M.Z. Nashed // Zeitschr. Ang. Math. Mech. —1999. — T. 59, № 3. — C. 703–713.

7. Александров В.М. Контактные задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел / В.М. Александров, Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров // Аналитические и численные методы краевых задач пластичности и вязкоупругости. — Свердловск, 1986. — С. 3–13.

СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ТИПА БАРБАШИНА-РОМАНОВСКОГО

А.С. Калитвин, Н.И. Трусова (Липецк,
ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
kalitvinas@mail.ru, trusova.nat@gmail.com

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \Bigg[l_{ij}(t,s)x_j(t,s) + \int\limits_a^b m_{ij}(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \int\limits_a^b n_{ij}(t,s,\sigma)x_j(\sigma,t)d\sigma \Bigg] + f_i(t,s), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x_i(a,s) = \varphi_i(s) \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{2}$$

где $t, s \in [a,b]$, а заданные функции $l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, f_i$ и φ_i непрерывны на своих областях определения.

Под решением задачи (1)–(2) понимается вектор-функция $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (x_i — непрерывная вместе с $(x_i)'_t$ функция на

$D = [a,b] \times [a,b]$), удовлетворяющая системе (1) и начальному условию (2). Пусть $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций, $C^n(D)$ — пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в R^n, а $C_t^{(1),n}(D)$ — пространство непрерывных вектор-функций $x(t,s)$ со значениями в R^n и с $(x_i)'_t \in C(D)$ $(i = 1, \cdots, n)$.

Интегрируя обе части всех уравнений системы (1) по переменной t по отрезку $[a,t]$ и учитывая начальное условие (2), получим систему интегральных уравнений

$$x_i(t,s) = \int_a^t \sum_{j=1}^n \Big[l_{ij}(\tau,s) x_j(\tau,s) + \int_a^b m_{ij}(\tau,s,\sigma) x_j(\tau,\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_a^b n_{ij}(\tau,s,\sigma) x_j(\sigma,\tau) d\sigma \Big] d\tau + g_i(t,s) \equiv (Rx)(t,s) + g_i(t,s), \qquad (3)$$

где

$$g_i(t,s) = \varphi_i(s) + \int_a^t f_i(\tau,s) d\tau, i = 1, \cdots, n.$$

Система (3) есть система интегральных уравнений Вольтерра-Романовского с частными интегралами. Аналогично [1] доказывается, что спектральный радиус оператора R в $C^n(D)$ равен нулю. Поэтому уравнение (3) имеет единственное решение в $C^n(D)$. Отсюда и из (3) видно, что это решение принадлежит $C_t^{(1),n}(D)$. Так как система (3) с непрерывными заданными функциями равносильна задаче (1)–(2), то и эта задача имеет единственное решение.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть f_i, φ_i, l_{ij}, m_{ij} и n_{ij} $(i,j = 1, ..., n)$ — непрерывные функции. Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение в $C_t^{(1),n}(D)$.*

В заключение отметим, что линейные операторы и уравнения с частными интегралами в пространстве непрерывных функций детально изучались в книгах [1, 2], а линейные операторы и уравнения типа Романовского с частными интегралами — в [3].

Литература

1. Калитвин А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2013. — 177 с.

2. Калитвин А.С. Линейныее уравнения с частными интегралами. С-теория / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.

3. Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2007. — 196 с.

О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ ВОЛЬТЕРРА С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В.А. Калитвин (Липецк,
ЛГПУ им. П.П.Семенова-Тян-Шанского)
kalitvinas@mail.ru

К линейным уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся задачи теории упругих оболочек, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными [1–3]. Однозначная разрешимость этих уравнений вытекает из равенства нулю спектрального радиуса линейных операторов Вольтерра с частными интегралами. Условия равенства нулю спектрального радиуса операторов Вольтерра с одномерными частными интегралами приведены в [2, 4, 5], а операторов Вольтерра с многомерными частными интегралами — в [4].

Пусть T и S — компактные множества положительной лебеговой меры в конечномерных пространствах, $D = T \times S$, $C(D)$ — пространство непрерывных функций на D, L, M, N, K— операторы

$$(Lx)(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \iint\limits_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,\ K = L + M + N,$$

где l, m, n — заданные измеримые на $D \times T$, $D \times S$, $D \times D$ действительные функции соответственно.

Функции l, m, n назовем ядрами Вольтерра, если в T и S заданы семейства замкнутых множеств $\{T(t) : t \in T\}$ и $\{S(s) : s \in S\}$, причем $t \in T(t)$, $s \in S(s)$, при $\bar{t} \in T(t)$ $T(\bar{t}) \subset T(t)$, при $\bar{s} \in S(s)$ $S(\bar{s}) \subset S(s)$ и выполнены следующие свойства:

а) для каждого $\delta > 0$ существуют конечные множества $T(\delta) = \{t_1, \cdots, t_p\}$, $S(\delta) = \{s_1, \cdots, s_q\}$ такие, что $mes(T(t_{i-1})\Delta T(t_i)) < \delta$ $(i = 1, \cdots, p)$, $T(0) = \varnothing$, $\cup_{i=1}^{p} T(t_i) = T$; $mes(S(s_{j-1})\Delta S(s_j)) < \delta$ $(j = 1, \cdots, q)$, $S(0) = \varnothing$, $\cup_{j=1}^{q} S(s_j) = S$, где Δ обозначает симметрическую разность множеств;

б) $l(t, s, \tau) = 0$ при $\tau \notin T(t)$, $m(t, s, \sigma) = 0$ при $\sigma \notin S(s)$, $n(t, s, \tau, \sigma) = 0$ при $\tau \notin T(t)$ или $\sigma \notin S(s)$.

Пример 1. Пусть $T = [a, b] \times [a, b]$, $S = [c, d] \times [c, d]$ и $D = T \times S$. Ядра $l(t, s, \tau) = l(t_1, t_2, s_1, s_2, \tau_1, \tau_2)$, $m(t, s, \sigma) = m(t_1, t_2, s_1, s_2, \sigma_1, \sigma_2)$, $n(t, s, \tau, \sigma) = n(t_1, t_2, s_1, s_2, \tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2)$ будут ядрами Вольтерра, если $l(t, s, \tau) = 0$ при $\tau_i > t_i$, $m(t, s, \sigma) = 0$ при $\sigma_j > s_j$, $n(t, s, \tau, \sigma) = 0$ при $\tau_i > t_i$ или $\sigma_j > s_j$, где i и j принимают хотя бы одно из значений 1 или 2.

Через $r(K), r(L), r(M), r(N)$ обозначим спектральные радиусы операторов K, L, M, N.

Теорема 1. *Если операторы L, M, N с ограниченными ядрами Вольтерра действуют в $C(D)$, то $r(K) = r(L) = r(M) = r(N) = 0$.*

Пусть $C(L^1(\Omega))$ — пространство непрерывных по $(t, s) \in D$ вектор-функций со значениями в $L^1(\Omega)$ и

$$n(t, s, \tau, \sigma) = \bar{n}(t, s, \tau, \sigma)\chi_{T(t)}(\tau), n(t, s, \tau, \sigma) = \bar{n}(t, s, \tau, \sigma)\chi_{S(s)}(\sigma),$$

$$l(t, s, \tau) = \bar{l}(t, s, \tau)\chi_{T(t)}(\tau), m(t, s, \sigma) = \bar{m}(t, s, \sigma)\chi_{S(s)}(\sigma), \qquad (1)$$

где через $\chi_{T(t)}(\tau)$ и $\chi_{S(s)}(\sigma)$ обозначены характеристические функции множеств $T(t)$ и $S(s)$ соответственно.

Теорема 2. *Если $\bar{l}(t, s, \tau) \in C(L^1(T))$, $\bar{m}(t, s, \sigma) \in C(L^1(S))$, $\bar{n}(t, s, \tau, \sigma) \in C(L^1(D))$, L, M, N — операторы с ядрами Вольтерра (1) и $K = L + M + N$, то в $C(D)$ $r(K) = r(L) = r(M) = r(N) = 0$.*

Литература

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. — М. ; Л. : ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. — 296 с.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

3. Appell J.M. Partial integral operators and integro-differential equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York-Basel : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

4. Калитвин А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2006. — 177 с.

5. Калитвин А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Л.Л. Карашева (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
k.liana86@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ — дробная производная порядка α [1, с.9], $0 < \alpha \leqslant 2$.

Уравнение (1) при $n = 1$ совпадает с диффузионно- волновым уравнением, которое широко исследовано (см. [2] и библиографию там). В частности, в работе [3] исследована краевая задача в полубесконечной области для уравнения (1) при $n = 1$. В работе [4] для уравнения (1) построено фундаментальное решение и решена задача Коши.

В данной работе для уравнения (1) решены задачи в неограниченных областях, доказаны теоремы единственности в классе функций быстрого роста.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с.

2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.

3. Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной в полубесконечной области / С.Х. Геккиева // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — 2002. — № 1(8). — С. 6–8.

4. Карашева Л.Л. Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной / Л.Л. Карашева // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 696–706.

ОБ ОДНОМ НЕПРЯМОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

А.А. Катрахова, В.С. Купцов (Воронеж, ВГТУ)
vckuptsov@rambler.ru

В работе предложен алгоритм вычислений стационарных распределений марковских процессов с конечным числом состояний, построенный на основе метода вложенных цепей Маркова и метода пошаговой аппроксимации. Он позволяет вычислять стационарные распределения марковских моделей массового обслуживания, упрощая тем самым процедуру нахождения стационарных распределений сетевых моделей массового обслуживания и моделей массового обслуживания в случайной среде, имеющих мультипликативный или условно-мультипликативный вид [1].

Известно, что однородный марковский процесс $x(t)$ с конечным множеством сообщающихся состояний X и переходными интенсивностями λ_{ij}, где $i, j \in X$, $\lambda_i = \sum_{j \in X} \lambda_{ij} > 0$ является эргодическим и его стационарное распределение вычисляется по формуле

$$P_j = \frac{\pi_j/\lambda_j}{\sum_{i \in X} \pi_i/\lambda_i}, \quad (j \in X), \tag{1}$$

где π_j — стационарное распределение вложений цепи Маркова [2].

На основе соотношения (1) и доказанной авторами формулы

$$\pi_j = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{k=n-1} \pi_i^k, \tag{2}$$

позволяющей вычислить стационарное распределение вложенной цепи с периодом d через стационарные распределения марковских цепей с множеством состояний из подклассов X, в качестве примера был построен реккурентный алгоритм для вычисления стационарного распределения процесса гибели и рождения с переменными параметрами в одномерном и двумерном случаях. При этом использовались оценки скорости сходимости для стационарного распределения вложенной цепи, полученные аналитическим путем, как в периодическом, так и в непериодическом случаях [3].

Этот алгоритм может быть использован в задачах теории надежности, теории эпидемий и финансовой математики.

Литература

1. Осипова М.А. Теорема мультипликативности для взаимодействующих систем массового обслуживания / М.А. Осипова // Дальневосточный математический журнал. — 2002. — Т. 3, № 1. — С. 61–63.

2. Катрахова А.А. Метод производящих функций для нестационарных марковских систем массового обслуживания / А.А. Катрахова, В.С. Купцов // Физико-математическое моделирование систем : материалы X Международного семинара. — Воронеж, 2014. — Ч. 3 — С. 83–86.

3. Катрахова А.А. Об использовании функций Бесселя при исследовании математических моделей систем массового обслуживания А.А. Катрахова, В.С. Купцов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции «Понтрягинские чтения XXVIII». — 2017. — С. 88–90.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В.И. Качалов (Москва, НИУ «МЭИ»)
vikachalov@rambler.ru

Весьма актуальным для метода малого параметра является вопрос об обычной сходимости рядов по степеням малого параметра, представляющих решения операторных уравнений. Здесь будет рассмотрено уравнение типа Навье–Стокса [1]:

$$\begin{aligned} &u_t - Au = B(u,u), \quad t \in [0,T], \\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где A — линейный неограниченный замкнутый оператор с областью определения D, всюду плотной в банаховом пространстве E; $B(u,v)$ — билинейный оператор, ограниченный по первой переменной и замкнутый по второй переменной, с областью определения $D \times D$. Изучается частный случай, когда $u_0 = \nu w_0(\nu)$, причем вектор $w_0(\nu)$ является аналитической функцией вязкости ν.

Условие 1. A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы $U(t)$.

Условие 2. На некотором линейном многообразии $D_0 \subset D$ введена счетная монотонная система норм $\|\cdot\|_k$ так, что $\forall g \in D_0 \|g\|_1 \leqslant$

$\|g\|_2 \leqslant \ldots$ и из сходимости по этой системе вытекает сходимость в E. При этом, D_0 состоит из векторов экспоненциального типа и $\|B(u,v)\|_k \leqslant C_2 e^{k(C_1+C_2)}$, если u принадлежит экспоненциальному типу $\leqslant C_1$, а v — экспоненциальному типу $\leqslant C_2$ [2].

Условие 3. Оператор $U(t)$ равномерно по $t \in [0,T]$ ограничен в счетно-нормированном пространстве D_0, т.е. $\exists s > 0$: $\forall g \in D_0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\|U(t)g\|_k \leqslant s\|g\|_k$.

Теорема. *Если выполнены условия 1–3 и $w_0(\nu) \in D_0$, то начальная задача* (1) *имеет псевдоголоморфное в точке $\nu = 0$ решение* [2, 3].

В качестве примера рассматривается система

$$\begin{cases} u_t - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = -uu_x - vu_y, \\ v_t - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = -uv_x - vv_y, \end{cases}$$
$$u(0,x,y) = \nu u_0(x,y,\nu), \quad v(0,x,y) = \nu v_0(x,y,\nu).$$

Литература

1. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Том 2 / Р. Рихтмайер. — М. : Мир, 1984. — 381 с.

2. Ломов С.А. Основы математической теории пограничного слоя / С.А. Ломов, И.С. Ломов. — М. : Изд-во МГУ, 2011. — 456 с.

3. Качалов В.И. О методе малого параметра в нелинейной математической физике / В.И. Качалов, Ю.С. Фёдоров // Сиб. электр. матем. известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1680–1686.

ДИНАМИКА ОДНОЙ МОДЕЛИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ[1]

А.А. Кащенко (Ярославль, ЯрГУ)
sa-ahr@yandex.ru

Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot u_0 + u_0 = \lambda F(u_0(t-T)) + \gamma(\ln\lambda)^{-1}\lambda^{-\alpha}(u_1 - u_0), \\ \dot u_1 + u_1 = \lambda F(u_1(t-T)) + \gamma(\ln\lambda)^{-1}\lambda^{-\alpha}(u_0 - u_1), \end{cases} \tag{1}$$

которая моделирует два связанных генератора с нелинейной обратной связью. Здесь запаздывание T и параметр γ положительны,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10055).

параметр α принадлежит полуинтервалу $(0, \frac{1}{2}]$. Функция обратной связи $F(u)$ является финитной ($F(u) = 0$ при $|u| \geqslant p$, где p — некоторая положительная константа), ограниченной, кусочно-гладкой. Модели с нелинейностью такого вида встречаются в задачах радиофизики и лазерной оптики.

В работе с помощью специального асимптотического метода (см. [1] и приведенные там источники) изучается нелокальная динамика системы (1) в предположении, что положительный параметр λ является достаточно большим. С помощью этого метода задача о поведении решений с начальными условиями из некоторого множества фазового пространства исходной бесконечномерной системы (1) сводится к изучению динамики построенного трехмерного отображения. Доказывается, что грубым циклам отображения соответствуют релаксационные периодические решения исходной системы той же устойчивости.

С помощью этого метода находятся устойчивые релаксационные периодические режимы исходной системы с амплитудой порядка $O(\lambda)$ и периодом порядка $O(\ln \lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Литература

1. Kashchenko A.A. Multistability in a system of two coupled oscillators with delayed feedback / A.A. Kashchenko // Journal of Differential Equations. — 2019. — V. 266, No 1. — P. 562–579.

ДИНАМИКА ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ КОНТРАСТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

И.С. Кащенко (Ярославль, ЯрГУ)
iliyask@uniyar.ac.ru

Рассмотрим нелинейную краевую задачу параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A + \mu A_1)\, u + \Phi(u) \tag{1}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{2}$$

Система (1) предполагается двухкомпонентной, т.е. $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Параметры ε и μ являются малыми: $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$. Функция $\Phi(u)$ нелинейная, достаточно гладкая, такая что $\Phi(0) = 0$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00672).

Контрастными будем называть такие системы, в которых один коэффициент диффузии, т.е. одно собственное значение матрицы $D(\varepsilon)0$ — асимптотически мал, а другой коэффициент — второе собственное значение — положительный. Тем самым, без потери общности

$$D(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изучим вопрос о локальной динамике (1), (2), т. е. вопрос о поведении при $t \to \infty$ и малых ε и μ всех решений краевой задачи (1), (2) с начальными условиями из некоторого шара достаточно малого (и не зависящего от ε и μ) радиуса с центром в нуле.

Критические случаи в задаче об устойчивости стационара могут иметь бесконечную размерность. При различных соотношения между двумя малыми параметрами ε и μ в критических случаях построены специальные нелинейные уравнения, не содержащих малых параметров, которые играют роль нормальных форм: их нелокальная динамика определяет в главном поведение решений исходной системы уравнений.

Показано, что в результате бифуркации в окрестности состояния равновесия может сформироваться сколь угодно большое количество периодических решений, причем, как правило, они формируются на модах с асимптотически большими номерами.

ОБ ОДНОМ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТЕЙ В ОБЛАСТИ ПЛОСКОЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная (Ростов-на-Дону, РГУПС)
simon@sfedu.ru

В настоящей работе предлагаются теоремы об изменении скоростей при решении краевой задачи

$$div\overline{V} = 0, \overline{V} = -\kappa\, grad\, h, \tag{1}$$

($\overline{V} = (V_x, V_y)$ — скорость фильтрации, $h(x, y)$ — напорная функция, κ — коэффициент фильтрации), с краевыми условиями

$$\varphi|_{AB} = -\kappa H, \varphi|_{CD} = 0, \varphi|_{AD} = -\kappa H_0, \varphi|_{BC} = 0, \tag{2}$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциальная функция, $\varphi(x, y)$ — линия тока, H и H_0 - величины напоров на границе области фильтрации.

Теорема 1. *При вдавливании линии тока скорость уменьшается на ее неизменной части и вблизи ее концов на потенциальных линиях.*

Теорема 2. *При уменьшении линии тока: а) скорость уменьшается на неизменной части увеличиваемой потенциальной линии и на линии промежуточного напора вблизи неизменной потенциальной линии; б) скорость увеличивается на неизменной части части линии тока, на неварьированной потенциальной линии, примыкающей к линии тока, и на линии промежуточного напора вблизи увеличиваемой потенциальной линии.*

Доказательства базируются на методике Г.Н. Положего, предложенной для решения задач с другими краевыми условиями [1].

В работах [2,3] авторами были предложены теоремы об изменении напоров для аналогичных краевых задач.

Литература

1. Положий Г.Н. Теория и применение p-аналитических и (p, g)-аналитических функций / Г.Н. Положий. — Киев : Наукова думка, 1973. — 423 с.

2. Клодина Т.В. Теорема об изменении давления при деформации линии тока / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2014. — С. 89–90.

3. Клодина Т.В. Теорема об оценки напоров для одного вида краевых условий области фильтрации / Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная // Инновационные процессы в научной среде : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф., 7 мая 2014 г. — Уфа : Аэтерна, 2014. — С. 29–32.

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

М. М. Кобилзода, А. Н. Наимов

(Душанбе, ТНУ; Вологда, ВоГУ)

kobilzoda94@mail.ru, nan67@rambler.ru

Рассмотрен вопрос о существовании ограниченных решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$v_k' = F_k(t, v_1, v_2), \quad v_k \in C^{n_k}, \quad t \in R, \quad k = 1, 2. \tag{1}$$

Здесь $R = (-\infty, +\infty)$ — вещественная ось, C^{n_k} — пространство n_k–мерных комплексных векторов, $F_k : R \times C^{n_1} \times C^{n_2} \mapsto C^{n_k}$, $k = 1, 2$ — заданные непрерывные отображения.

В системе уравнений (1), в отличие от ранее известных работ, отображения $F_k(t, v_1, v_2)$, $k = 1, 2$ могут иметь любой порядок роста по t и v_1, v_2 при $|t| \to +\infty$ и $|v_1| + |v_2| \to +\infty$.

В настоящей работе найдены новые условия при выполнении которых имеет место априорная оценка для ограниченных решений системы уравнений (1). В условиях априорной оценки доказано существование ограниченного решения, применяя методы вычисления вращения векторных полей [1, 2] и метод периодических срезок [3].

Литература

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. — М. : Наука, 1966. — 331 с.

2. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 511 с.

3. Мухамадиев Э. К теории ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Дифференц. уравнения. — 1974. — Т. 10, № 4. — С. 635–646.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-47-350001 р-а, № 19-01-00103а).

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В $L^2(\mathbb{R}_+)$ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ[1]

А.И. Козко (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
prozerpi@yahoo.co.uk

Исследуется спектр оператора $\mathbf{L}_q$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, задаваемого дифференциальным выражением $-y''+q(x)y$ и граничным условием $y'(0)=0$. В случае быстрого роста потенциала $q(x)$ свойства собственных чисел были исследованы в работах [1], [2]. В случае дискретности собственных чисел оператора $\mathbf{L}_q$ были вычислены соответствующие регуляризованные следы см. [3–5].

Изучаются операторы $\mathbf{L}_q$ для потенциалов из класса $\mathbf{Q}$, которые по определению состоят из функций $q \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и $\lim_{x\to+\infty} q(x) = 0$ и с равномерными ограничениями. Под $q \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ мы понимаем $q \in L[0;b]$ для любого $b > 0$. Обозначим, как обычно, $q_-(x) = \max\{0, -q(x)\}$. Определим функцию

$$F_{q,\mu}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\mu t}(\mu^2 - q_-(t))\,dt.$$

При любом $\mu > 0$ определим множество $\mathbf{Q}_\mu \subset \mathbf{Q}$, состоящее из всех потенциалов q, для которых выполнено неравенство

$$\inf_{x\in\mathbb{R}_+} F_{q,\mu}(x) \geqslant 0.$$

В работе исследуется точная нижняя оценка спектра оператора $\mathbf{L}_q$ для потенциалов из $\mathbf{Q}_\mu$ с равномерными ограничениями.

Обозначим класс ограниченных на $\mathbb{R}_+$ потенциалов q таких, что $q \in L(\mathbb{R}_+)$ через $\tilde{Q}$. Равенство $\inf\{\sigma_q : q \in \tilde{Q}, \|q\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leqslant \mu\} = -\mu^2$ получено в [6].

Литература

1. Козко А.И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом / А.И. Козко // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 5. — С. 611–622.

2. Козко А.И. Свойства собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и граничным условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$ /

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а).

А.И. Козко // Современные проблемы теории функций и их приложения : сб. материалов XVIII Международной Саратовской зимней школы. — Саратов : Издательство СГУ, 2016. — С. 150–152.

3. Козко А.И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями / А.И. Козко, А.С. Печенцов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2011. — № 4. — С. 11–17.

4. Козко А.И. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ / А.И. Козко, А.С. Печенцов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2010. — Т. 74, № 6. — С. 107–126.

5. Козко А.И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков / А.И. Козко, А.С. Печенцов // Математические заметки. — 2008. — Т. 83, № 1. — С. 39–49.

6. Козко А.И. Оценка снизу собственных чисел оператора Штурма-Лиуввилля в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y'(0) = 1$ / А.И. Козко, А.Ю. Попов // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й Международной Саратовской зимней школы, посвященной 150-летию со дня рождения В.А. Стеклова. — 2014. — С. 122–124.

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СХ-УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)
kolinna@inbox.ru

Рассмотрено стационарное СХ-уравнение (уравнение Свифта-Хоенберга) при двойном краевом условии Дирихле. Изложена методика приближенного вычисления бифурцирующих решений при малых и конечных значениях закритического приращения параметра. Вычисления проведены на основе модифицированной процедуры Ляпунова-Шмидта, использующей ритцевскую аппроксимацию функционала энергии по заранее заданному набору собственных функций (мод) главной линейной части уравнения с последующей редукцией Пуанкаре к функции двух ключевых переменных. В случае локального анализа вычислена главная часть ключевой функции и вычислены прбликенные аналитическаие представления ветвей бифурцирующих решений.

Один из базовых принципов исследования бифуркаций решений начально краевых задач для нелинейных параболических и более общих уравнений основан на том, что уравнение вида

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t,v) \ \ (0 < t \leqslant t_0), \quad v(0) = v_0\,,$$

где $f(t,x)$ при каждом $t \in [0,t_0]$ — нелинейный оператор, при условии, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, сводится к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,v(s))ds$$

(метод Дюамеля).

В настоящей работе рассмотрен прямой и более простой подход, основанный на том, что рассмотренные в работе бесконечномерные динамические системы являются вариационными. Это обстоятельство дает возможность использования прямого подхода к построению дискретных аналогов траекторий спуска динамической системы в точки минимума функционала энергии. Такой подход требует предварительного изучения бифуркации стационарных точек многопараметрического функционала энергии в условиях многомодового вырождения (в порождающей точке минимума). В качестве основного модельного уравнения, используемого в статье, рассмотрено уравнение Свифта-Хоенберга

$$\dot{w} + \Delta^2(w) + \lambda_2\,\Delta(w) + \lambda_1\,w + w^3 = 0\,,$$

$$w = w(x,t)\,, \quad x = (x_1,x_2) \in \Omega := [0,1]\times[0,1]\,.$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕСУРГЕНТНОГО АНАЛИЗА К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.В. Коровина, В.Ю. Смирнов
(Москва, МГУ, МАИ(НИУ))
betelgeuser@yandex.ru

Работа посвящена рассмотрению методов построения асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнения с голоморфными коэффициентами с вырождениями. А именно рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с голоморфными коэффициентами

$$\begin{gathered} b_n(r)\left(\tfrac{d}{dr}\right)^n u(r) + b_{n-1}(r)\left(\tfrac{d}{dr}\right)^{n-1} u(r) + ... \\ +b_i(r)\left(\tfrac{d}{dr}\right)^i u(r) + ... + b_0(r)\, u(r) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $b_i(r)$ являются голоморфными функциями.

Если коэффициент при старшей производной $b_n(r)$ обращается в ноль в некоторой точке, без ограничения общности можно считать, что эта точка $r = 0$, то уравнение (1), вообще говоря, имеет особенность в нуле. В этом случае ноль может быть регулярной или иррегулярной особой точкой. Проблема представления асимптотики решения уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки впервые была сформулирована А. Пуанкаре в работах [1], [2]. В работе [1] впервые было показано, что решение уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки в некоторых случаях может разлагаться в асимптотический ряд, и была предпринята попытка суммировать этот ряд с помощью интегрального преобразования Лапласа. При этом использовался частный случай асимптотического разложения решения в окрестности бесконечно удаленной особой точки, полученного в работе [3].

Уравнение (1) может быть сведено к уравнению вида

$$\hat{H}u = H\left(r, -r^k \frac{d}{dr}\right) u = 0, \tag{2}$$

где $\hat{H}$ — дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами

$$H(r,p)=\sum_{i=0}^{n}a_i(r)\,p^i.$$

Здесь $a_i(r)$ — голоморфные функции, причем $a_n(0)\neq 0$ и получена формула для вычисления минимального значения k. В зависимости от значения этого k можно разбить уравнения на три типа, каждому из которых соответствует свой тип асимптотик. К первому типу отнесем те уравнения, для которых $k=0$. В этом случае мы имеем невырожденные дифференциальные уравнения, не имеющие особенности в нуле. Их решения являются голоморфными функциями. В случае $k=1$ уравнения являются вырожденными, эти уравнения сводятся к уравнениям с регулярными особенностями, а сами уравнения называются уравнениями фуксова типа. Как известно, асимптотики решения в нуле являются конормальными. Они представимы в виде суммы слагаемых вида $(\ln r)^m\,r^{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^k$, где ряды $\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^k$ являются асимптотическими. К третьему типу относятся те уравнения, для которых $k>1$. Это случай уравнения с иррегулярными особенностями. Эти уравнения называются уравнениями нефуксова типа. Разделим уравнения нефуксова типа на два класса, к первому классу отнесем уравнения такие, что многочлен $H(0,p)$, который называется основным символом, имеет только простые корни. Назовем такие уравнения нефуксовыми уравнениями первого типа. Ко второму классу относятся остальные уравнения, то есть уравнения нефуксова типа такие, что основной символ имеет не только простые, но и кратные корни. Назовем их нефуксовыми уравнениями второго типа.

Случай нефуксовых уравнений первого типа для линейных уравнений и их систем рассматриваются, например, в работе [4], а затем во многих классических учебниках.

В этих работах построены асимптотические разложения решений нефуксовых уравнения первого типа, они были получены в виде произведений соответствующих экспонент на расходящиеся степенные ряды, а именно

$$\sum_{j=1}^{n}e^{\frac{p_j}{r^k}+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_{k-i}^{j}}{r^{k-i}}}\,r^{\sigma_j}\sum_{i=0}^{\infty}b_i^j r^i \tag{3}$$

где α_i, $i=1,\dots,n$ — корни полинома $H_0(p)$, а σ_j и a_i^k — некоторые комплексные числа. Назовем эти асимптотики нефуксовыми асимптотиками первого типа. Однако, в случае, если асимптотическое разложение

$$
\begin{gathered}
u \approx u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \\
e^{\lambda_1/r} r^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_1^k r^k + e^{\lambda_2/r} r^{\sigma_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_2^k r^k + \ldots \\
+ e^{\lambda_n/r} r^{\sigma_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k r^k
\end{gathered}
\tag{4}
$$

имеет, по крайней мере, два слагаемых, отвечающих значениям λ_1 и λ_2 с различными вещественными частями (для определенности будем считать, что $\mathrm{Re}\lambda_1 > \mathrm{Re}\lambda_2$), возникает существенная трудность при интерпретации полученного разложения. Дело в том, что все слагаемые входящие в первый элемент, отвечающий значению λ_1 (доминантный элемент) имеют больший порядок при $\mathrm{r} > 0$, чем любое из слагаемых второго (рецессивного) элемента. Поэтому для интерпретации разложения (4) необходимо просуммировать (вообще говоря, расходящийся) ряд, отвечающий доминантному элементу. Рассмотрение рецессивных компонент разложения решения u уравнения (2) важно, в частности, для построения равномерных асимптотик решений в комплексном случае, когда точка r движется по комплексной плоскости и роли доминантной и рецессивной компонент разложения могут меняться местами. Иными словами, плоскость условно делится на секторы, в которых одна из компонент является главной, а другая рецессивной, а при переходе из одного сектора в другой имеет место смена лидерства (рецессивная становится главной и наоборот). Однако в окрестности границ этих секторов несколько компонент имеют равный порядок, и ни одной из них нельзя пренебречь. Это явление возникает, например, при рассмотрении примера Эйлера, а также при построении асимптотики решения для задачи (1) и вообще для всех нефуксовых асимптотик. Это приводит к тому, что исследование асимптотических разложений решений уравнения (1) требует введения регулярного метода суммирования расходящихся рядов для построения равномерных асимптотик решений по переменной r, то есть представляющие асимптотические разложения не только в определенных секторах, но и во всей окрестности рассматриваемой особой точки.

В конце 80-х годов прошлого века был получен аппарат пригодный для суммирования подобных рядов, основанный на преобразовании Лапласа-Бореля и понятии ресургентной функции, впервые введенном французским математиком Ж. Экалем.

Благодаря этим методам в работах [5], [6], [7] были построены равномерные асимптотики решений для случая, когда корни старшего символа $H_0(p) = H(0,p)$ являются простыми.

Теорема 1. *Решение уравнения (2) является ресургентной функцией. Если полином $H_0(p)$ имеет корни первого порядка в точках $p_1, ..., p_m$, тогда асимптотика решения однородного уравнения будет иметь вид*

$$u(r) = \sum_{j=0}^{m} e^{\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}}} r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i,$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$.

Примером нефуксовой иррегулярной особенности 2-го типа является особенность в окрестности бесконечности решения уравнения

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + ... + a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + ... + a_0(x) u(x) = 0 \qquad (5)$$

Здесь коэффициенты $a_i(x)$ регулярны на бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга $|x| > a$, что функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}$.

Это уравнение путем замены $x = \frac{1}{r}$ сводится к уравнению с вырождением типа клюва второго порядка в нуле.

Здесь мы сформулируем теорему для случая, когда основной символ дифференциального оператора имеет один корень. Без ограничения общности будем считать, что этот корень находится в нуле. В этом случае $a_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}$. Перепишем уравнение (5) в виде

$$\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n u + b_0 r^m \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^k u + b_1 r^{m+1} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-1} u$$
$$+ b_2 r^{m+2} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + ... + b_{k+1} r^{m+k} u +$$
$$+ \sum_{i=1}^{h} r^i \sum_{j=h_i}^{n-1} b_j^i \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^j u + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a^i(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u = 0$$

Здесь $i + h_i > m + k$, b_i, b_j^i — соответствующие числа, $a^i(r)$ — голоморфные функции. Число $h = m + k$ называется индексом сингулярности уравнения (5). Пусть выполнено неравенство

$$h_i + i - h > (m - i) \frac{n - k - m}{m} \qquad (6)$$

тогда верна

Теорема 2. *Асимптотика решения уравнения (5) в окрестности бесконечности имеет вид*

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{-\frac{\sigma_i}{n-k}} \sum_l^{\infty} A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}} + \\ + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i}, \qquad (7)$$

где α_{n-k-m}^j, $j = 1, ..., n-k$ *корни полинома* $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$, *а* $A_l^j.\sigma_i, b_i^j$, k_0 *и* α_i^j, $j = 1, ..., n-k-1$ *некоторые числа.*

Асимптотики типа (7) будем называть нефуксовыми асимптотиками 2-го рода рода, они в отличие от нефуксовых асимптотик первого рода содержат в показателях экспоненты нецелые степени переменной x.

Можно показать, что если неравенство (6) не выполнено, то решение задачи (5) также представимо в виде нефуксовой асимптотики 2-го рода.

Литература

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires / H. Poincare // Acta math. — 1886. — V. 8. — P. 295–344.

2. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре / А. Пуанкаре. — М. : Наука, 1974.

3. Thome L.W. Zur Theorie der linearen differentialgelichungen / L.W. Thome // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 1872.

4. Sternberg W. Uber die asymptotische Integration von Differencialgleichungen / W. Sternberg. — Berlin : Verlag von Julius Spriger, 1920.

5. Коровина М.В. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ / М.В. Коровина, В.Е. Шаталов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1259–1277.

6. Коровина М.В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков / М.В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 349–357.

7. Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями / М.В. Коровина // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 302–304.

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ВОЗРАСТАЮЩИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

Т.А. Корчемкина (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
krtaalex@gmail.com

Рассматриваются решения с положительными начальными данными уравнения со степенной нелинейностью общего вида

$$y''' = p(x,\, y,\, y',\, y'')\, |y|^{k_0}\, |y'|^{k_1}\, |y''|^{k_2}\, \mathrm{sgn}\,(yy'y''), \quad k_1, k_2, k_3 > 0, \tag{1}$$

где функция $p(x, u, v, w)$ непрерывна по совокупности переменных и липшицева по u, v, w.

При $k_1 = k_2 = 0$, $\mathrm{sgn}\,(yy'y'') = \mathrm{sgn}\, y$ качественные свойства решений изучены И.В. Асташовой в [1], полная асимптотическая классификация решений приведена в [2].

Для уравнения второго порядка с нелинейностью общего вида при $p = p(x)$ изучалось В.М. Евтуховым; в частности, в [3] получены достаточные условия существования решения с заданным асимптотическим поведением.

Для уравнения второго порядка с нелинейностью общего вида в случае $p = p(x, y, y')$ качественное поведение изучено в [4] результаты об асимптотическом поведении приведены в [5].

Теорема 1. *Пусть* $p(x, u, v, w) \geqslant m > 0$, $k_0+k_1+k_2 > 1$ *и* $k_2 < 1$. *Тогда для любого решения* $y(x)$ *уравнения (1), удовлетворяющего в некоторой точке* x_0 *условиям* $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$, $y''(x_0) > 0$, *существует такая точка* x^*, $x_0 < x^* < +\infty$, *что* $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$, *причем*

$$x^* - x_0 < \xi |y'(x_0)|^{-\frac{k_0+k_1+k_2-1}{k_0+k_1-k_2+1}},$$

где $\xi = \xi(m, k_0, k_1, k_2)$ *— константа, не зависящая от* $y(x)$.

Перейдём к асимптотическому поведению решений в случае постоянного потенциала $p(x, u, v, w) \equiv p_0 > 0$. Введём обозначения

$$\alpha = \frac{3 - k_1 - 2k_2}{k_0 + k_1 + k_2 - 1},\ C = \left(\frac{|\alpha|^{1-k_1-k_2} |\alpha+1|^{1-k_2} |\alpha+2|}{p_0} \right)^{\frac{1}{k_0+k_1+k_2-1}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $p(x, u, v, w) \equiv p_0 > 0$, $k_0 + k_1 + k_2 > 1$, $k_2 < 1$, $k_1 + 2k_2 < 3$, $y(x)$ *— максимально продолженное решение* *уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке* x_0 *условиям* $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$, $y''(x_0) > 0$, *а* x^* *— правая граница области определения решения* $y(x)$. *Тогда* $\alpha > 0$, *и*

$$y = C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)),\ x \to x^* - 0.$$

Литература

1. Astashova I. On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations / I. Astashova // WSEAS Transactions on Mathematics. — 2017. — V. 16, №5. — P. 39-–47.

2. Astashova I. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity / I. Astashova // Differential and Difference Equations with Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2016. — V. 164. — P. 191–204.

3. Евтухов В.М. Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера / В.М. Евтухов // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28, № 6. — С. 1076–1078.

4. Korchemkina T. On the behavior of solutions to second-order differential equation with general power-law nonlinearity / T. Korchemkina // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2018. — No 73. — P.101–111.

5. Korchemkina T. On asymptotic behavior of solutions to second-order differential equations with general power-law nonlinearities / T. Korchemkina // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations QUALITDE – 2018 Dedicated to the 100th Anniversary of I. Javakhishvili Tbilisi State University. — 2018. — P. 103—106.

ОБ ИНДЕКСЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА [1]

Б.Д. Кошанов, А.Д. Кунтуарова (Алматы,
Институт математики и математического моделирования,
Казахский национальный педагогический университет им. Абая)
koshanov@list.ru, araika.14.89@mail.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (проект № AP05135319).

В докладе исследуется эллиптическое уравнение $2l-$ го порядка в односвязной области D

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} + \sum_{0 \leqslant r \leqslant k \leqslant 2l-1} a_{rk}(x,y) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r} \partial y^r} = f(x,y), (x,y) \in D \quad (1)$$

с коэффициентами $a_r \in \mathbb{R}$ и $a_{rk} \in C^\mu(\overline{D})$, $\Gamma = \partial D \in C^{2l,\mu}$.

Задача S. Требуется найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1) обобщенной задачи Неймана по краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^{k_j-1} u}{\partial n^{k_j-1}} \right|_\Gamma = g_j, \quad j = 1, \ldots, l, \qquad (2)$$

где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_l \leqslant 2l$ и $n = n_1 + in_2$ — единичная нормаль.

Для полигармонического уравнения задача Неймана при $k_{j+1} - k_j \equiv 1$ была изучена в работах А.В. Бицадзе [1], А.А. Дезина [2]. В работе [3] задача S была исследована при $a_{kr} \neq 0$ и $f \neq 0$ в пространстве функций $C_a^{2l-1,\mu}(\overline{D})$.

В докладе доказывается, что условие фредгольмовости задачи (1),(2) эквивалентно известному [4] условию дополнительности (или Шапиро– Лопатинского). Также приведена формула ее индекса $\operatorname{ind} S$ удобного для использования.

Литература

1. Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций / А.В. Бицадзе // Дифференц. уравнения — 1988. — Т. 24, № 5. — С. 825–831.

2. Дезин А.А. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве / А.А. Дезин // Доклады АН СССР. — 1954. — Т. 96, № 5. — С. 901–903.

3. Кошанов Б.Д. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости / А.П. Солдатов, Б.Д. Кошанов // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 12. — С. 1666–1681.

4. Schechter M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations / M. Schechter // Comm. Pure and Appl. mathem. — 1950. — № 12. — С. 467–480.

ПРИНЦИП ДЮАМЕЛЯ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Ж.М. Кошербай, А. Нургали
(Казахстан, Нур-Султан,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева)
jannur-98@mail.ru, ainura.1799@mail.ru

Звездный граф Γ состоит из N ребер e_j, отождествленных с интервалами $[0, l_j]$, $j = 1, \ldots, N$, и внутренней вершины γ_0 - левый конец, а граничные вершины γ_j - правый конец каждого интервала. Начально-краевая задача рассматривается на каждом интервале:

$$\begin{cases} u_t^j(x,t) - \int_0^T N(t-s)u_{xx}^j(x,s)ds + f_j(t)g_j(x), \quad 0 < x < l_j, \\ u^j(l_j,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u^j x, 0 = u_t^j(x,0) = 0, \quad 0 < x < l_j. \end{cases}$$

На внутреннюю вершину налагаются условия согласования Кирхгофа-Неймана:

$$\begin{cases} u^1(0,t) = \cdots = u^N(0), \quad 0 < t < T, \\ u^j(l_j,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ \sum_{j=1}^N u^j 0, t = u_t^j(x,0) = 0, \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

Принцип Дюамеля [1] дает возможность выразить наблюдения $\mu_j(t) := u_x^j(l_j,t)$, $j = 1, \ldots, N-1$, $t \in [0,T]$. При этом мы используем все наблюдения, кроме одной из граничных вершин. С помощью BC-метода [2] мы восстанавливаем функции g_j, $j = 1, \ldots, N-1$, используя соответствующие наблюдения $\mu_j(t) := u_x^j(l_j,t)$. Затем мы восстанавливаем g_N, используя любое из граничных наблюдений, например, скажем μ_1. По спектральному представлению решения мы получаем $\mu_1(t) = u_x^1(l_1,t) = \int_0^{t-l_1} g_n(x)w_N^1(x,t)dx$, где $w_N^1(x,t)$ означает сужение на ребро e_N решения теплового уравнения с памятью на графе Γ с граничным управляющим воздействиям f_N Дирихле, оказанным на вершину γ_1.

Литература

1. Fritz J. Partial Differential Equations / J. Fritz. — New York : Springer-Verlag, 1982.

2. Avdonin S. Inverse problems for quantum trees / S. Avdonin, P. Kurasov // Inverse Problems and Imaging. — 2008. — No. 2. — P. 1–21.

О ПРИМЕНЕНИИ СОВРЕМЕННОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛЫ СФОРЦА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОБЪЕМОВ НЕЕВКЛИДОВЫХ ОКТАЭДРОВ С СИММЕТРИЯМИ[1]

В.А. Краснов (Москва,
Российский университет дружбы народов)
krasnov_va@rudn.university, vladimir.krasnov3107@gmail.com

В докладе мы рассмотрим применение схемы современного доказательства формулы Сфорца [3] объема произвольного неевклидова тетраэдра, предложенного Н.В. Абросимовым и А.Д. Медных [1], к вычислению объема неевклидова октаэдра $O = O(A, B)$ с 4|m-симметрией. Данный многогранник инвариантен относительно вращения вокруг вертикальной оси на угол $\frac{\pi}{2}$ и отражения относительно перпендикулярной ей плоскости.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $O = O(A, B)$ — неевклидов октаэдр, обладающий 4|m-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ может быть вычислен по формулам:*

а) для $\mathbb{H}^3$:

$$V(O) = -4\int_{\arccos\sqrt{-\cos A}}^{\frac{B}{2}} \operatorname{arch}\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{1-\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2 x}dx, \qquad (1)$$

б) для $\mathbb{S}^3$:

$$V(O) = 4\int_{\arccos\sqrt{-\cos A}}^{\frac{B}{2}} \arccos\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{1-\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2 x}dx. \qquad (2)$$

Вывод формул (1) и (2) основан на разбиении октаэдра $O = O(A, B)$ на 8 тетраэдров, когруентных тетраэдру $T = T(\frac{A}{2}, \frac{A}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{B}{2})$. В свою очередь, объем тетраэдра разбиения T удобно вычислить, используя современное доказательство формулы Сфорца [1]. Для этого рассмотрим малую деформацию T, при которой изменяется лишь двугранный угол $\frac{B}{2}$. В этом случае результаты теоремы получаются с помощью вычисления длины ребра при данном угле и последующего применения формулы Шлефли для дифференциала объема неевклидова многогранника [2].

[1] Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100»

Литература

1. Abrosimov N.V. Volumes of polytopes in spaces of constant curvature / N.V. Abrosimov, A.D. Mednykh // Rigidity and Symmetry. — 2014. — № 70. — P. 1–26.

2. Schläfli L. Theorie der vielfachen Kontinuität / L. Schläfli // Gesammelte mathematische Abhandlungen. — 1950.

3. Sforza G. Spazi metrico-proiettivi / G. Sforza // Ric. Esten. Different. Ser. — 1906. — Vol. 8:3. — C. 3–66.

ОСОБЕННОСТИ БИФУРКАЦИЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ МЯСНЫХ МУХ НИКОЛСОНА

Е.П. Кубышкин, А.Р. Морякова

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)

kubysh.e@yandex.ru

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение вида

$$\dot{N}(t) = -\gamma N(t) + pN(t-\tau)e^{-aN(t-\tau)}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

предложенное для описания динамики популяции мясных мух Николсона. В (1) $N(t)$ численность популяции в момент времени t, p — максимальный прирост популяции, исчисляемый на одну особь популяции, $1/a$ — размер популяции, при котором она имеет максимальный рост, γ — коэффициет смертности взрослых особей, исчисляемый на одну особь популяции, τ — время регенерации.

Уравнение (1) при $a > 0$ и $p > \gamma$ имеет единственное положительное состояние равновесия $N^* = a^{-1}\ln(p/\gamma)$. Перейдя в (1) к безразмерным переменным, положив $N(t) = N^* + a^{-1}x(t)$, $(\gamma\tau)^{-1} = \varepsilon_1$, $ln(p/\gamma) - 1 = b$ и нормируя время $t \to t\tau$, получим уравнение в безразмерных переменных

$$\varepsilon_1\dot{x}(t) + x(t) + bx(t-1) + f(x(t-1)) = 0, \tag{2}$$

$f(x) = ln(p/\gamma) * ((1 - x - e^{-x}) + x(1 - e^{-x})$. Изучаются периодические решения уравнения (2), бифурцирующие из нулевого состояния равновесия, и их развитие при изменении параметров ε_1 и b в предположении $\varepsilon_1 \ll 1$. Показано, что одновременно могут бифурцировать определенное число (в зависимости от характера изменения параметров) устойчивых (и неустойчивых) периодических решений, т.е. имеет место бифуркация мультистабильности. При дальнейшем изменении бифуркационных параметров каждое такое периодическое решение через серию бифуркаций удвоения периода переходит в хаотический аттрактор. В динамике решений уравнения наблюдается хаотическая мультистабильность. Полученные результаты позволяют понять структуру фазового пространства уравнения и объяснить характер колебаний, наблюдаемых в экспериментальных данных Николсона.

АНАЛИЗ БИФУРКАЦИЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ПОВОРОТА И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е.П. Кубышкин, В.А. Куликов
(Ярославль, ЯрГУ им.П.Г.Демидова)
kulikov7677@gmail.com

В круге $K_R = \{(\rho, \varphi): \ 0 \leqslant \rho \leqslant R, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения вида

$$u_t + u = D\Delta_{\rho\varphi} u + K(1 + \gamma \cos(u_{\theta T})), \quad u_\rho|_{\rho=R} = 0 \qquad (1)$$

относительно функции $u(\rho, \varphi, t + s), t \geqslant 0, -T \leqslant s \leqslant 0$, где $T > 0$ величина запаздывания аргумента, с начальным условием $u(\rho, \varphi, s) = u_0(\rho, \varphi, s) \in H(K_R; -T, 0)$ — пространству начальных условий. В (1) $\Delta_{\rho\varphi}$ — оператор Лапласа в полярных координатах, $u_{\theta T}(\rho, \varphi, t) \equiv u(\rho, \varphi + \theta, t - T)(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ — оператор поворота пространственного аргумента и временного запаздывания, D, K — положительные постоянные. Начально-краевая задача (1) возникает при моделировании нелинейной оптической системы с преобразованием аргумента и запаздыванием в цепи обратной связи.

Исследуется расположение состояний равновесия (1) в зависимости от параметров D, K, γ, T, θ и их устойчивость. Показана возможность существования нескольких состояний равновесия. В пространстве параметров с использованием метода D — разбиений построены области устойчивости состояний равновесия (1). Исследуется характер потери устойчивости состояний равновесия при прохождении параметров через границы областей устойчивости. Показана возможность возникновения сложных критических случаев потери устойчивости состояниями равновесия. Исследованы возникающие при потери устойчивости автоколебательные решения. В качестве метода используется метод центральных многообразий и теория нормальных форм уравнений на центральном многообразии. Показана возможность бифуркации бегущих и стоячих волн, инвариантных торов, а также хаотических колебаний. Исследуется их устойчивость и построены асимптотические формулы.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБР НА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О.В. Кунаковская, А.Я. Ливчак (Воронеж, ВГУ; Рига)
ovk@math.vsu.ru, alex2l@inbox.lv

Функцию $g : U \to \mathbf{R}$ класса C^r, $r \geqslant 2$, заданную на открытом множестве U вещественного банахова пространства E, будем называть элементарной SC^r-функцией (или SC^r_e-функцией), если она C^∞-гладко зависит от конечного числа фредгольмовых C^r-функций $f_1, \dots, f_k : U \to \mathbf{R}$. Понятие фредгольмовой C^r-функции (функционала) введено в [1]. Совокупность всех фредгольмовых C^r-функций на U будем обозначать как $\Phi C^r(U)$.

C^r-функцию f, $r \geqslant 2$, на SC^r-многообразии (X, S) с моделью E будем называть SC^r-функцией, если хотя бы в одном (а, значит, и в любом) атласе структуры S у каждой точки $x \in X$ существует такая открытая окрестность V_x, что $V_x \subset U_x$ для некоторой карты (U_x, φ_x) выбранного атласа и $f|_{V_x} \circ \varphi_x^{-1}|_{\varphi_x(V_x)}$ есть SC^r_e-функция на $\varphi_x(V_x)$. Понятие SC^r-многообразия введено в [2] (см. также [3]).

Совокупность $SC^r(X)$ всех SC^r-функций на SC^r-многообразии (X, S), $2 \leqslant r \leqslant \infty$ образует ассоциативную коммутативную алгебру над $\mathbf{R}$. $SC^r(X)$ является подалгеброй алгебры $C^r(X)$ всех C^r-функций и содержит подалгебру констант: $\mathbf{R} \subset SC^r(X) \subset C^r(X)$. Однако, как следует из приводимой теоремы, на SC^r-многообразии нет других C^r-функций, кроме SC^r-функций.

Теорема. *Пусть (X, S) — SC^r-многообразие с моделью E, $r \geqslant 2$, $\Phi C^r(E) \neq \varnothing$. Тогда $C^r(X) = SC^r(X)$.*

Литература

1. Похожаев С.И. О множестве критических значений функционалов / С.И. Похожаев // Матем. сб. — 1968. — Т. 75, № 1. — С. 106–111.

2. Kunakovskaya O.V. On properties of some classes of smooth functions on Banach spaces and manifolds / O.V. Kunakovskaya // Methods and Appl. of Global Analysis. — Voronezh : Voronezh Univ. Press, 1993. — P. 81–93.

3. Кунаковская О.В. О гладких разбиениях единицы на банаховых многообразиях / О.В. Кунаковская // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 10. — С. 51–58.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ

В.А. Кыров (Горно-Алтайск, ГАГУ)
kyrovVA@yandex.ru

Рассмотрим четырехмерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению трехмерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L. Построим функцию пары точек $f : M \times M \to R$ с открытой и плотной областью определения $S_f \subset M^2$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h), \pi_1(h)), \pi_2(h), \pi_2(h)), \qquad (1)$$

где $h : M \to N \times L$ — локальный диффеоморфизм, $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции, $g : N \times N \to R$ — функция пары точек с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, $\chi : R \times L \times L \to R$ — невырожденная функция (отличны от нуля производные первого порядка по всем переменным). Все приведенные здесь функции аналитические.

Методом вложения построена классификация четырехмерных геометрий максимальной подвижности, задаваемых функциями пары точек (1) по ранее известным трехмерным геометриям максимальной подвижности, задаваемых функциями пары точек g. Основные результаты опубликованы в работах [1–3].

Литература

1. Кыров В.А. Аналитический метод вложения симплектической геометрии / В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко // Сиб. электрон. матем. изв. — 2017. — Т. 14. — С. 657–672.

2. Кыров В.А. Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий / В.А. Кыров // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 741–758.

3. Кыров В.А. Вложение многомерных особых расширений псевдоевклидовых геометрий / В.А. Кыров // Челяб. физ.-матем. журнал. — 2018. — Т. 4, № 3. — С. 408–420.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ УПРАВЛЕНИЯ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПО НОРМЕ ЗАРАНЕЕ ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ

Д.А. Литвинов (Воронеж, ВГУИТ)
d77013378@yandex.ru

Рассматривается динамическая система типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x,\ u \in R^n$, A и B — матрицы размера $n \times n$, $t \in [T_0, T_1]$. Вектор-функция управления $u(t)$ и функция состояния системы $x(t)$, удовлетворяют (1) и условиям:

$$x(t)|_{t_i} = x_i^{0\ 0},\ i = \overline{0, l},$$

$$\frac{d^j u(t)}{(dt)^j}|_{t_i} = u_i^{j\ 0},\ i = \overline{0, l},\ j = \overline{0, p2},$$

где $x_i,\ u_i$ из R^n, при $T_0 = t_0 < ... < t_l = T_1$.

Здесь $p2$ максимальный порядок производных функции управления, условия на который накладываются в системе.

Поиск функций $x(t)$ и $u(t)$ осуществляется методом каскадной декомпозиции, описанным в работах Зубовой Светланы Петровны [1], [2], [3].

Основной решаемой задачей является задача поиска такого C, что при выполнении неравенств

$$|(u_i^{j\ 0})_k| \leqslant C,\ |(x_i^{0\ 0})_k| \leqslant C,\ j : \overline{0, l},\ k : \overline{0, p2},\ i : \overline{1, n}, \tag{2}$$

выполнится следующее ограничение для нормы функции $u(t)$

$$||u|| \leqslant d \tag{3}$$

с некоторым заданным d. Здесь $||u|| = \max\limits_{t \in [T_0, T_1]} \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} (u_m(t))^2}$, где d_m — некоторые числа.

Показано, что для выполнения оценки (3), компоненты краевых значений должны удовлетворять следующим ограничениям.

$$\max_{i=\overline{0,l},\ j=\overline{0,p2},\ k=\overline{1,k}}(|(x_i^{0\ 0})_k|,|(u_i^{j\ 0})_k|) \leqslant \frac{d}{\sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{(p2+2)n(l+1)}|\varphi_{i,m}(t)|)^2}}. \qquad (4)$$

где $\varphi_i(t),\ \ i=\overline{1,(p2+2)n(l+1)}$ — функции, являющиеся решением системы и удовлетворяющие краевым и промежуточным условиям специального вида, среди которых одно условие равно нулю, а остальные единице. Каждая такая функция имеет компоненты $\varphi_{i,m}(t),\ \ m=\overline{1,n}$. Задачи подобного типа рассматривались, например, в [4], [5].

Для смягчения условий типа (4) и минимизации норм функций $\varphi_i(t)$ ищется минимум специальной унимодальной функции

$\Psi(c_1,...,c_r)=||\varphi_i(t,c_1,...,c_r)||^2$.

Здесь $c_1,...,c_r$ — параметры по которым происходит минимизация. В качестве параметров, в частности, рассматриваются условия накладываемые на производные функции управления порядка выше чем $p2$.

Рассмотренные методы проиллюстрированы примером, в котором рассчитывается переходный процесс для модели бокового движения тяжелого самолета «Боинг-747» в посадочной конфигурации.

Литература

1. Зубова С. П. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления / С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, Ле Хай Чунг // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 6. — С. 33–40.

2. Зубова С.П. Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции / С.П. Зубова, Е. В. Раецкая // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 7. — С. 22–38.

3. Zubova S.P. On polynomial solutions of the linear stationary control system / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya, Le Hai Trung // Automation and Remote Control. — 2008. — Vol 69, No 11. — P. 1852–1858.

4. Литвинов Д.А. Об ограниченности компоненты управления для линейной стационарной динамической системы / Д.А. Лит-

винов // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXVII». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. — С. 46.

5. Зубова С.П. Построение управления с краевыми условиями и частичным ограничением для линейной стационарной динамической системы / С.П. Зубова, Д.А. Литвинов // Вестник Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. —2016. — № 2. — С. 116–118.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК ЖЁСТКИЕ И МЯГКИЕ МОДЕЛИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ СО СТАРШЕКЛАССНИКАМИ

Н.И. Лобанова (Зеленокумск, МУДО «ЦВР»)
lobantchik@yandex.ru

Предлагаемая нами методика преподавания ДУ (дифференциальные уравнения) в системе ДО (дополнительное образование) принципиально отличается от традиционной методики преподавания курса ДУ в высших учебных заведениях. Учитывая объём знаний, имеющийся у старшеклассников, включающий в себя знание геометрического и физического смысла производной, предлагается следующая схема изучения элементов теории ДУ в ДО:

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

↓

Основные определения (ДУ первого порядка, решение, интегральная кривая, начальное условие)

↓

Задача Коши для ДУ, разрешённого относительно производной)

↓

Определение общего решения, частного решения, общего интеграла, частного интеграла

↓

ДУ с разделёнными и разделяющимися переменными

↓

Однородные функции и однородные ДУ

↓

Линейные ДУ

↓

Уравнение Бернулли

↓

Решение геометрических и физических задач

↓

Решение практико-ориентированных задач

Схема изучения ДУ в системе ДО

В эту схему не входят такие классические разделы теории ДУ первого порядка, изучаемые в высших учебных заведениях, как уравнения в полных дифференциалах и ДУ, приводящиеся к ним с помощью интегрирующего множителя (требуется знание дифференциального исчисления функций двух переменных), уравнения, не разрешённые относительно производной (в частности, уравнения Лагранжа и Клеро), уравнение Риккати (которое в общем виде не интегрируемо в квадратурах).

В теории ДУ, как известно, важную роль играют линейные уравнения **высших** порядков с постоянными коэффициентами и поэтому в ФГОС рекомендуется им уделить особое внимание. Нами предлагается начать изучение линейных ДУ **первого** порядка со случая постоянных коэффициентов и применить к ним метод решения (метод Эйлера), известный для ДУ **высших** порядков с постоянными коэффициентами. А именно, предлагается рассмотреть сначала линейное неоднородное ДУ первого порядка с постоянным коэффициентом при неизвестной функции:

$$y\prime + p \cdot y = q, \tag{1}$$

где p и q есть заданные действительные числа.

Легко доказать теорему о структуре общего решения ДУ (1), хорошо известную для ДУ высших порядков, утверждающую, что $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$, где $y_{\text{он}}$ есть общее решение неоднородного ДУ (1), $y_{\text{оо}}$ есть общее *решение* соответствующего однородного уравнения:

$$y\prime + p \cdot y = 0, \tag{2}$$

а $y_{\text{чн}}$ есть любое частное решение неоднородного ДУ (1).

Следуя Эйлеру, ищем решение ДУ (2) в виде

$$y = e^{\lambda x} \tag{3}$$

и, подставляя (3) в (2), приходим к характеристическому уравнению:

$$\lambda + p = 0.$$

Значит, $\lambda = -p$ и, в силу (3),

$$y_{\text{оо}} = C \cdot e^{-px}. \tag{4}$$

Очевидно, что $y = \dfrac{q}{p}$ является частным решением ДУ (1). Значит, по теореме о структуре общего решения ($y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$) ДУ (1), имеем:

$$y = C \cdot e^{-px} + y = \frac{q}{p}. \tag{5}$$

Таким образом, формула (5) даёт общее решение ДУ (1).

В курсе ДУ линейное неоднородное уравнение (1) решается, как правило, методом Лагранжа (методом вариации произвольной постоянной C) или методом Бернулли. В соответствии с методом Лагранжа, сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения (2) путём разделения переменных и приходят к формуле (4). Затем ищут общее решение данного неоднородного уравнения (1) в виде (2), варьируя постоянную, т.е. в виде:

$$y = C(x) \cdot e^{-px}. \tag{6}$$

Подставив (6) в (1), после простых вычислений получают общее решение данного ДУ (1), а именно формулу (5). Если в уравнении (1) коэффициент при неизвестной функции есть переменная величина и правая часть так же не является постоянной величиной, то мы приходим к классическому линейному неоднородному ДУ первого порядка:

$$y\prime + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{7}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ есть заданные непрерывные функции.

Применяя метод Лагранжа или Бернулли (в данном случае, использованный выше метод Эйлера не применим) получают общее решение ДУ (7) в виде:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx\right). \tag{8}$$

Очевидно, что формула (5) является частным случаем формулы (8) и легко из неё получается.

В связи с линейными ДУ (1) и (7) обратимся к докладу выдающегося математика академика РАН Арнольда В.И. [1], сделанном им на семинаре при Президентском совете РФ в 1997 году. В этом докладе на примерах решения практико- ориентированных задач было рассказано о применениях теории ДУ в таких науках как экология, экономика и социология. При этом была выявлена важная роль открытой относительно недавно математической теории мягких моделей и показано их преимущество перед жёсткими моделями. В частности, была рассмотрена простейшая модель роста населения Земли, предложенная Мальтусом. Эта модель описывается линейным однородным ДУ вида (2) с постоянным коэффициентом $p = -k$, $k > 0$, и является примером жёсткой модели. В силу формулы (4) рост населения будет с течением времени экспоненциальным, т.е. очень быстрым, и поэтому модель Мальтуса применима лишь при дополнительных условиях. Недостаток модели Мальтуса кроется в том, что она является жёсткой, так как коэффициент k при неизвестной функции является постоянной величиной, т.е. не меняется. В докладе сделан вывод: жёсткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при её изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим её **мягкой**). Таким образом, ДУ (1) с постоянным коэффициентом может служить примером жёсткой модели, а ДУ (7) с переменным коэффициентом может служить примером мягкой модели.

Литература

1. Арнольд В.И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В.И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2004. — 32 с.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Л.Ф. Логачёва (Орёл, ОГУ)

milalog29@mail.ru

Пусть H — полное локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел, топология которого задаётся системой полунорм $\{\|.\|_p\}$ (банахово пространство не исключается) и пусть A — непрерывный линейный оператор, действующий в H. Рассмотрим уравнение (1): $A\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, где $u(t;\xi)$ — векторнозначная функция со значениями в H двух комплексных переменных ξ и t, аналитическая по совокупности переменных. Задача: описать условия и найти решение $u(t;\xi)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2): $u(t;\xi)|_{\xi=p(t)} = f(t)$, где $f(t)$ — целая векторнозначная функция со значениями в H, $p(t)$ — целая комплекснозначная функция; $p(0) \neq 0$. Оператор A имеет порядок β и тип α [1], [2].

Теорема. *Если оператор A имеет порядок $\beta < 0$, то для любых целых $f(t)$ и $p(t)$ задача (1), (2) имеет единственное решение. Оно является аналитической вектор-функцией $u(t;\xi)$ со значениями в H и представляется в виде абсолютно сходящегося ряда: $u(t;\xi) = g(t - A\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!}\xi^n$, где $g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Psi} \frac{1-p'(\lambda)A}{\lambda - A\cdot p(\lambda) - t} f(\lambda)d\lambda$, а Ψ — спрямляемый замкнутый контур, заключающий точку $\lambda = 0$ и не заключающий ни одного нуля функции p. Также $u(t;\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Psi} \frac{1-p'(\lambda)A}{\lambda - Ap(\lambda) - t} e^{\frac{-A\xi}{\lambda - Ap(\lambda) - t}} f(\lambda)d\lambda$.*

Литература

1. Громов В.П. Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям / В.П. Громов // ДАН СССР. — 1986. — Т. 228, № 1. — С. 27–31.

2. Громов В.П. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения / В.П. Громов, С.Н. Мишин, С.В. Панюшкин. — Орёл. : ОГУ. — 2009. — 430 с.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ И НЕРЕГУЛЯРНО ВЫРОЖДЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ОБЩИЙ ПОДХОД

И.С. Ломов (Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова)
lomov@cs.msu.ru

На примере двух эллиптических задач:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \kappa^2(x)u = f(x,z), \quad v|_{z=0} = v|_{z=h} = 0,$$

$$v|_{x=-M} = q_1(z), \quad v|_{x=M} = q_2(z),$$

и

$$\begin{aligned} &y^2 u_{yy} + u_{xx} - a^2(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in D, \\ &u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=b} = 0, \qquad |u(x,0)| < \infty, \end{aligned}$$

будет показано, что метод регуляризации сингулярных возмущений, разработанный С.А. Ломовым для построения регуляризованных асимптотических решений сингулярно возмущенных уравнений, может быть успешно применен к построению решений нерегулярно вырождающихся эллиптических задач. В обоих случаях для описания особенностей решения используется спектр предельного оператора. Вводятся новые переменные и новая задача решается в специальном пространстве бесконечного числа измерений. Полученная задача уже будет регулярной. Сужение получаемого решения дает решение исходной задачи.

В случае задачи с малым параметром при старшей производной, решение вновь полученной задачи ищется методом классической теории возмущений в специальном пространстве безрезонансных решений. Будет приведена теорема о существовании формального решения и построено асимптотическое решение задачи. В случае вырожденного эллиптического уравнения решается расширенная задача. Будут приведены утверждения о существовании формального и классического решения рассматриваемой задачи. Покажем что, как и в классической теореме Коши–Ковалевской, решение частично наследует аналитические свойства коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ ПРИ НЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА КОНЦЕ

Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)
lomovcev@bsu.by

В криволинейной первой четверти плоскости $\dot{\widetilde{G}}_\infty = \{]\sigma(t), \infty[\times]\kappa(x), \infty[, t > 0, \, x > 0\}$ решена и изучена смешанная задача:

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)u(x,t) = f(x,t), \;\; (x,t) \in \dot{\widetilde{G}}_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=\kappa(x)} = \varphi(x), \; \partial_t u(x,t)|_{t=\kappa(x)} = \psi(x), \; x > 0, \tag{2}$$

$$\Gamma(t)u \equiv [\alpha(t)\partial_t u(x,t) + \beta(t)\partial_x u(x,t) + \gamma(t)u(x,t)]|_{x=\sigma(t)} = \mu(t), \; t > 0, \tag{3}$$

где α, β, γ — заданные функции от t; f, φ, ψ, μ — заданные функции своих переменных x, t и a_1, $a_2 > 0$. Заменой переменных x и t всегда можно сделать так, чтобы $\kappa(0) = \sigma(0) = 0$. Если $\kappa(x) < x/a_1$, $x > 0$, и $\sigma(t) < a_1 t$, $t > 0$, то криволинейная четверть $\widetilde{G}_\infty = \{[\sigma(t), \infty[\times[\kappa(x), \infty[\subset \mathbb{R}^2 : t > 0, \, x > 0\}$ делится характеристикой $x = a_1 t$ на $\widetilde{G}_- = \big\{(x,t) \in \widetilde{G}_\infty : x > a_1 t > a_1\kappa(x), \, x > 0\big\}$ и $\widetilde{G}_+ = \big\{(x,t) \in \widetilde{G}_\infty : \sigma(t) \leqslant x \leqslant a_1 t, \, t \geqslant 0\big\}$. Используются функции

$$y = \chi_1(x) = x - a_1\kappa(x), \; z = \chi_2(x) = x + a_2\kappa(x), \; w = \sigma_1(t) = a_1 t - \sigma(t),$$

где $\chi_1(0) = \chi_2(0) = \sigma_1(0) = 0$, и их гладкие обратные функции:

$$\chi_1^{-1}(y) = x, \; \chi_2^{-1}(z) = x, \; \sigma_1^{-1}(w) = t, \; \chi_1^{-1}, \; \chi_2^{-1}, \; \sigma_1^{-1} \in C^2[0, \infty[. \tag{4}$$

Здесь $C^k(\Omega)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на Ω. Из работы типа [1] берем решения уравнения (1):

$$\widetilde{F}_0(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\Bigg[\int\limits_{\tilde{t}_0}^{t_1(x)+\tilde{t}_0} \int\limits_{a_2(t_1(x)-\tau)+(a_1+a_2)\tilde{t}_0}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)ds\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_1(x)+\tilde{t}_0}^{t} \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)ds\,d\tau\Bigg], \; (x,t) \in \widetilde{G}_\infty, \; x \geqslant 0, \tag{5}$$

где $t_1(x) = t - x/a_1$, $\tilde{t}_0 \in \Big[\max\limits_{s\in[x_2,\,x_3]} \kappa(s), t^*\Big[$, $x_2 = \chi_2^{-1}\big(\sigma(\sigma_1^{-1}(a_1t - x)) + a_2\sigma_1^{-1}(a_1t - x)\big)$, $x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2t)$, $t^* = (x + a_2t)/(a_1 + a_2)$ в $\widetilde{G}_+$, $x \geqslant 0$. Для $(x,t) \in \widetilde{G}_-$ решения $\widetilde{F}_0$ равны (5) при $t_1(x) = 0$ и $\tilde{t}_0 \in \Big[\max\limits_{s\in[x_1,\,x_3]} \kappa(s), t\Big[$, где $x_1 = \chi_2^{-1}(x - a_1t)$. Для $(x,t) \in \widetilde{G}_+$, $x < 0$, решения $\widetilde{F}_0$ равны (5), но в другом виде и при $\tilde{t}_0 \in]\kappa(x_3), t^*]$.

Теорема. *Пусть коэффициенты:* α, β, $\gamma \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\kappa(x)$, $\sigma(t) \in C^2[0,\infty[$; *не характеристическая первая косая производная:* $a_1\alpha(t) \neq \beta(t)$, $t \geqslant 0$; *выполняются неравенства:* $\kappa(x) < x/a_1$, $x > 0$, $\sigma(t) < a_1t$, $t > 0$; *существуют функции (4) и* $\widetilde{F}_0$ *в* $\widetilde{G}_+ : \exists\, \varepsilon_0 > 0$, $\kappa(x) = 0$, $x \in [0,\varepsilon_0]$, $\sigma(t) = 0$, $t \in [0,\varepsilon_0]$, $-a_2 < \sigma'(t) < a_1$, $t \geqslant 0$. *Чтобы смешанная задача (1)–(3) в каждой точке* $(x,t) \in \dot{\widetilde{G}}_\infty$ *имела локальные дважды непрерывно дифференцируемые решения необходимо и достаточно условий гладкости и согласования:*

$$\varphi \in C^2[0,\infty[,\ \psi \in C^1[0,\infty[,\ f \in C^{\,0}(\widetilde{G}_\infty),\ \mu \in C^1[0,\infty[, \tag{6}$$

$$\frac{a_2}{a_1}\int\limits_{\tilde{t}_0}^{t_1(x)+\tilde{t}_0} f\big(a_2(t_1(x) - \tau) + (a_1 + a_2)\tilde{t}_0, \tau\big)d\tau -$$

$$-\int\limits_{t_1(x)+\tilde{t}_0}^{t} f(x - a_1(t - \tau), \tau)d\tau,\ \int_{\tilde{t}_0}^{t} f(x + a_2(t - \tau), \tau)d\tau\ \in C^1(\widetilde{G}_\infty), \tag{7}$$

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0),\ \alpha'(0)\psi(0) + \beta'(0)\varphi'(0) +$$
$$+\gamma'(0)\varphi(0) + \alpha(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0)] + [\alpha(0)\sigma'(0) +$$
$$+\beta(0)]\psi'(0) + \beta(0)\varphi''(0) + \gamma(0)[\sigma'(0)\varphi'(0) + \psi(0)] = \mu'(0). \tag{8}$$

Эти локальные классические решения задачи (1)–(3) имеют вид:

$$u_-(x,t) = \varphi\left(\chi_2^{-1}(x + a_2t)\right) - \frac{1}{a_1 + a_2}\int\limits_{\chi_1^{-1}(x - a_1t)}^{\chi_2^{-1}(x + a_2t)} \big\{a_2\varphi'(s) - \chi_2{}'(s)\psi(s) -$$

$$-a_2\big(\widetilde{F}_0(s, \kappa(s))\big)'_s + \chi_2{}'(s)\widetilde{F}_0{}'_t(s,t)|_{t=\sigma(s)}\big\}\chi{}'_1(s)\,ds -$$

$$-\widetilde{F}_0\big(\chi_2^{-1}(x + a_2t), \kappa(\chi_2^{-1}(x + a_2t))\big) + \widetilde{F}_0(x,t),\ (x,t) \in \widetilde{G}_-, \tag{9}$$

$$u_+(x,t) = \int\limits_0^{\sigma_1^{-1}(a_1t-x)} e^{\int\limits_{\sigma_1^{-1}(a_1t-x)}^{s} \frac{\gamma(\rho)\sigma_1'(\rho)}{a_1\alpha(\rho)-\beta(\rho)}\,d\rho} \frac{\mu(s)-P(s)}{a_1\alpha(s)-\beta(s)}\,\sigma_1'(s)ds +$$

$$+\varphi\left(\chi_2^{-1}(x+a_2t)\right) - \frac{1}{a_1+a_2} \int\limits_0^{\chi_2^{-1}(x+a_2t)} \big\{a_2\varphi'(s) - \chi_2{}'(s)\psi(s) -$$

$$-a_2\big(\widetilde{F}_0(s,\kappa(s))\big)'_s + \chi_2{}'(s)\widetilde{F}_0{}'_t(s,t)|_{t=\sigma(s)}\big\}\,\chi_1{}'(s)\,ds -$$

$$-\widetilde{F}_0\big(\chi_2^{-1}(x+a_2t), \kappa(\chi_2^{-1}(x+a_2t))\big) + \widetilde{F}_0(x,t),\ (x,t)\in\widetilde{G}_+. \quad (10)$$

Здесь применена специальная функция граничного оператора

$$P(t) = \Gamma(t)\,[h\big(x+a_2t\big) + \widetilde{F}_0x,t)],$$

$$h(z) = \varphi\left(\chi_2^{-1}(z)\right) - \frac{1}{a_1+a_2} \int\limits_0^{\chi_2^{-1}(z)} \Big\{a_2\varphi'(s) - \chi_2{}'(s)\psi(s)\Big\}\chi_1{}'(s)ds.$$

Следствие 1. *Если $\kappa \equiv 0$, то задача (1)–(3) имеет единственное и устойчивое по φ, ψ, f, μ классическое решение $u \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$, равное (9) и (10), и критерий корректности (6)–(8) при $\tilde{t}_0 = 0$.*

Следствие 2. *Если $\kappa \equiv \sigma \equiv 0$, то формулы (9), (10) и критерий корректности (6)–(8) с $\tilde{t}_0 = 0$ являются классическим решением и критерием корректности задачи (1)–(3) в линейной четверти плоскости $G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[$ из теоремы 1 статьи [2].*

Замечания. Теорема выражает локальную, а следствия 1 и 2 — глобальные структуры классических решений задачи. Функции (9) и (10) удовлетворяют уравнению (1) и условиям (2), (3) в классическом смысле. Если $\kappa(x)$, $\sigma(t) \in C^2[0,\infty[$, то для (4) достаточно неравенств: $\kappa'(x) < -1/a_2$ или $\kappa'(x) > 1/a_1$, $x \geqslant 0$, и $\sigma'(x) < a_1$, $t \geqslant 0$.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф.Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат-ка. Инфор-ка. — 2017. — № 3. — С. 38–52.

2. Ломовцев Ф.Е. Начально-краевая задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны общего вида с первыми не характеристическими косыми производными в нестационарных граничных условиях / Ф.Е. Ломовцев, Ю.Ф. Новик // Вестн. БГУ. Сер. 1. : Физика. Мат-ка. Инфор-ка. — 2016. — № 1. — С. 129–135.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ-ВИНЕРА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА

Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина (Воронеж, ВГУ;
Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского)
levnlya@mail.ru; marina.lapsh@yandex.ru

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}_N$ выделим область $\mathbb{R}_N^+=\{x'\,,x''\}$, где $x' = x_1{>}0,\ldots,x_n{>}0$. Преобразование Радона-Киприянова x'-четной (четной по каждой координате вектора x') функции $f(x)$ из пространства Шварца определяется формулой (см. [1])

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(x)\,\mathcal{P}_{x'}^\gamma\delta(p-\langle x,\xi\rangle)(x')^\gamma dx,$$

где $\mathcal{P}_{x'}^\gamma g(x',x'')=\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi g(x_1\cos\alpha_1,\ldots,x_n\cos\alpha_n\,,x'')\times$ $\times\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i d\alpha_1\ldots d\alpha_n$ — многомерный оператор Пуассона, действующий по переменным x'.

Из [1], [2] известно, что преобразование Радона-Киприянова функции f обладает свойствами.

1. Свойство однородности: $K_\gamma[f](\alpha\xi,\alpha p)=|\alpha|^{-1}K_\gamma[f](\xi,p)$.

2. Функция $K_\gamma[f](\xi,p)$ бесконечно дифференцируема по ξ и по p при $\xi\neq0$.

3. При $|p|\to\infty$ для любого $k>0$ справедлива оценка $|K_\gamma[f](\xi,p)|=O\left(|p|^{-k}\right)$ равномерно по ξ, когда ξ пробегает ограниченную замкнутую область, не содержащую точки $\xi=0$.

4. Для любого $k>0$ интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}K_\gamma[f](\xi;p)\,p^k\,dp$ является однородным многочленом от ξ степени k.

Теорема 1. *Всякая функция, удовлетворяющая условиям 1-4 является преобразованием Радона-Киприянова x'-четной функции $f(x)$ из пространства Шварца.*

Литература

1.Киприянов И.А. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона / И.А. Киприянов, Л.Н. Ляхов // ДАН. — 1998. — Т. 360, № 2. — С. 157–160.

2. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова—Радона / Л.Н. Ляхов // Труды МИАН. — 2005. — Т. 248. — С.144–152.

ПОЛНОТА И БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И ДИРАКА

А.С. Макин (Москва, МИРЭА)
alexmakin@yandex.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения для заданного на интервале $(0, \pi)$ уравнения Штурма-Лиувилля

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

с общими двухточечными краевыми условиями

$$B_i(u) = \alpha_{i1}u'(0) + \alpha_{i2}u'(\pi) + \alpha_{i3}u(0) + \alpha_{i4}u(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $B_i(u)$ $(i = 1, 2)$ — линейно независимые формы с произвольными комплексными коэффициентами. Функция $q(x)$ есть произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1(0, \pi)$.

Условия (2) подразделяются на 4 основные типа: 1) усиленно регулярные; 2) регулярные, но не усиленно регулярные; 3) нерегулярные; 4) вырожденные.

Известно [1], что для любых невырожденных краевых условий система корневых функций $\{u_n(x)\}$ задачи (1), (2) полна в $L_2(0, \pi)$. Известно также, что в первом случае система $\{u_n(x)\}$ всегда является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$, в третьем случае она никогда не образует даже обычный базис в указанном пространстве, а во втором случае в зависимости от конкретного вида краевых условий и функции $q(x)$ система $\{u_n(x)\}$ может обладать или не обладать свойством базисности в пространстве $L_2(0, \pi)$. В последнее время возрос интерес к исследованию задач на собственные значения для уравнения (1) с вырожденными краевыми условиями. Согласно [1], за исключением задачи Коши, где спектр отсутствует, они имеет вид

$$u'(0) + du'(\pi) = 0, \quad u(0) - du(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $d \neq 0$. Полнота системы собственных и присоединенных функций задачи (1), (3) существенно зависит от свойств функции $\tilde{q}(x) = q(x) - q(\pi - x)$. Из [2-4] вытекает, справедливость следующих утверждений:

Теорема 1. *Если $d^2 \neq 1$, то система корневых функций задачи (1), (3) полна в $L_2(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда точка $\pi \in supp\,\tilde{q}(x)$.*

Теорема 2. *Если для некоторого $\rho > 0$*

$$\lim_{h\to 0} h^{-\rho} \int_{\pi-h}^{\pi} \tilde{q}(x)dx = \nu,$$

причем $\nu \neq 0$, то система собственных и присоединенных функций задачи (1), (3) полна в пространстве $L_2(0,\pi)$.

В [5-6] была установлена следующая

Теорема 3. *Система корневых функций задачи (1), (3) никогда не образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$.*

Далее на интервале $(0,\pi)$ рассмотрим систему Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

функции $P(x), Q(x) \in L_1(0,\pi)$, и двухточечными краевыми условиями

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0, \tag{5}$$

где $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$,

$$A = (C, D) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

коэффициенты a_{ij} — произвольные комплексные числа, причем строки матрицы A линейно независимы. Как и условия (2), условия (5) могут быть разделены на те же 4 основных типа. Известно [1], что система корневых функций задачи (4), (5) с регулярными краевыми условиями полна в $L_2(0,\pi)$. Полнота системы корневых функций в случае нерегулярных и вырожденных краевых условий исследовалась в [7]. В [8-11] было доказано, что в случае сильно регулярных краевых условий система корневых функций задачи (4), (5) образует базис Рисса, а для регулярных, но не усиленно регулярных условий, — базис Рисса со скобками. В настоящем докладе исследуется вопрос о базисности Рисса (без скобок) в случае регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий.

Литература

1. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 330 с.

2. Макин А.С. О полноте системы корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями / А.С. Макин // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 6. — С. 835–838.

3. Маламуд М.М. О полноте системы корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с общими граничными условиями / М.М. Маламуд // Функц. анализ и его приложения. — 2008. — Т. 42, № 3. — С. 45–52.

4. Бияров Б.Н. О спектральных свойствах корректных сужений и расширений оператора Штурма-Лиувилля / Б.Н. Бияров // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 12. — С. 2027–2032.

5. Макин А.С. О базисных свойствах системы корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями. I / А.С. Макин // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 10. — С. 1367–1382.

6. Макин А.С. О базисных свойствах системы корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями. II / А.С. Макин // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 12. — С. 1610–1625.

7. Malamud M.M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problem for first order systems and applications / M.M. Malamud, A.A. Lunyov // J. Spectr. Theory. — 2015. — V. 5. — P. 17–70.

8. Савчук А.М. Оператор Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 5. — С. 777–810.

9. Савчук А.М. Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом / А.М. Савчук, И.В. Садовничая // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2015. — Т. 58. — С. 128–152.

10. Lunyov A.A. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators / A.A. Lunyov, M.M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — V. 441, № 1. — P. 57–103.

11. Лунев А.А. О базисности Рисса системы корневых векторов для (2×2) - системы типа Дирака / А.А. Лунев, М.М. Маламуд // Доклады РАН. — 2014. — Т. 458, № 3. — С. 255–260.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В.П. Максимов (Пермь, ПГНИУ)
maksimov@econ.psu.ru

Рассматривается линейная функционально-дифференциальная система

$$\delta y = \mathcal{T} y + f, \qquad (1)$$

где $y = col(x,z), x : [0,T] \to R^n, z : \{0, t_1, ..., t_N, T\} \to R^\nu$, $\delta y = col(\dot{x}, z), \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} \end{pmatrix}$; $\mathcal{T}_{11} : DS^n \to L^n$, $\mathcal{T}_{12} : FD^\nu \to L^n$, $\mathcal{T}_{21} : DS^n \to FD^\nu$, $\mathcal{T}_{22} : FD^\nu \to FD^\nu$ – линейные вольтерровы операторы. По заданным множествам $J = \{0, t_1, ..., t_N, T\}, 0 < t_1 < ... < t_N < T$, и $J_1 = \{0, \tau_1, ..., \tau_M, T\}, 0 < \tau_1 < ... < \tau_M < T$, пространства DS^n и FD^ν определяются следующим образом. DS^n — пространство функций $x : [0,T] \to R^n$, представимых в виде $x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\, ds + \sum_1^M \chi_{[\tau_i, T]}(t)[x(\tau_i) - x(\tau_i - 0)]$, χ_A — характеристическая функция множества A; FD^ν — пространство функций $z : J \to R^\nu$.

Системы вида (1) возникают, в частности, при моделировании процессов экономической динамики и охватывают широкие классы динамических моделей с последействием и импульсными воздействиями.

В докладе излагаются результаты о представлении решений задачи Коши и краевых задач для системы (1). Описаны структура и свойства оператора Коши, представлен подход к его приближенному построению, использующий представление операторов $\mathcal{T}_{ij}$, $i, j = 1, 2$. Полученные результаты развивают основные положения работ [1,2].

Пусть V — оператор интегрирования: $(Vu)(t) = \int_0^t u(s) ds$. Общность рассматриваемой системы определяется условием интегральности оператора $K = \mathcal{T}_{11} V$, ядро которого $K(t,s) = (k_{ij}(t,s))$ предполагается удовлетворяющим условию $\mathcal{K}$: для всех элементов k_{ij} существует общая суммируемая на $[0,T]$ мажоранта $\kappa(\cdot)$, $|k_{ij}(t,s)| \leqslant$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332).

$\kappa(t)$. В таком случае подсистема с непрерывным временем охватывает разнообразные случаи уравнений с последействием: дифференциальные уравнения с сосредоточенным и распределенным запаздыванием, интегро-дифференциальные уравнения и др.

Обозначим через C_1 и C_2 операторы Коши уравнений $\dot{x} = \mathcal{T}_{11}x$ и $z = \mathcal{T}_{22}z$ соответственно. Определим операторы H_{ij}, $i, j = 1, 2$ равенствами

$$H_{11} = (I - C_1\mathcal{T}_{12}C_2\mathcal{T}_{21})^{-1};\ H_{12} = -(I - C_1\mathcal{T}_{12}C_2\mathcal{T}_{12})^{-1}C_1\mathcal{T}_{21};$$

$$H_{21} = C_2\mathcal{T}_{21}(I - C_1\mathcal{T}_{12}C_2\mathcal{T}_{21})^{-1};\ H_{22} = (I - C_2\mathcal{T}_{21}C_1\mathcal{T}_{12})^{-1}.$$

Здесь I — тождественный оператор.

Теорема 1. *Оператор Коши $C = (C_{ij})$ системы (1) определяется равенствами*

$$C_{ij} = H_{ij}C_j,\ i, j = 1, 2.$$

Отметим, что оператор C_2 в силу специфики дискретного времени строится точно. Из теоремы 1 следует, что в конструкции оператора C исключительная роль принадлежит компоненте C_1, требующей разработки эффективных алгоритмов ее приближенного построения. В докладе предлагаются и обсуждаются некоторые из таких алгоритмов, основанные на использовании вольтерровости оператора K, полностью определяющего оператор C_1, возможности достаточно точной кусочно постоянной аппроксимации ядра $K(t, s)$ с сохранением вольтерровости аппроксимирующего оператора и построением аппроксимации резольвентного ядра.

Непрерывно-дискретные системы активно изучаются в связи с актуальными прикладными задачами управления [3].

Литература

1. Максимов В.П. Некоторые вопросы теории управления функционально-дифференциальными системами / В.П. Максимов // Известия Института математики и информатики УдГУ. — 2015. — № 2. — С. 112–119.

2. Максимов В.П. Функционально-дифференциальные непрерывно-дискретные системы / В.П. Максимов // Известия Института математики и информатики УдГУ. — 2012. — № 1. — С. 88–89.

3. Марченко В.М. Управляемость и наблюдаемость гибридных дискретно-непрерывных систем в простейших классах функций / В.М. Марченко // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1469–1481.

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОГРАММ ПРИ МНОГОАГЕНТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ[1]

О.А. Малафеев, Н.Д. Рединских
(Санкт-Петербург, СПбГУ)
o.malafeev@spbu.ru

Рассматривается несколько экономических агентов организующих процесс распределения капитала в нескольких регионах. Множество распределяемых по регионам ресурсов экономическими агентами задается в начальный момент времени. Каждый агент вычисляет эффективность вложений в том или ином регионе. Каждый тип ресурса может находиться в одном из конечного числа состояний, различающихся эффективностью его использования. Каждый регион потенциального вложения капитала может находиться в одном из конечного числа социально-экономических состояний. Такие социально-экономические состояния характеризуются уровнем потенциала возможного экономического и финансового развития, эффективностью вложения в данный регион. Под эффективностью вложения понимается средняя скорость роста капитала, вложенного в экономику данного региона. В каждый новый период времени в зависимости от решения, принятого на предыдущем этапе, и, возможно, от иных причин может измениться множество регионов инвестирования, множество ресурсов, а также эффективность того или иного типа капитала в том или ином регионе. В работе формализуется задача распределения капитала по экономическим регионам таким образом, чтобы суммарная эффективность вложений была максимальной. Решается численный пример.

Литература

1. Malafeev O.A. Understanding game theory / O.A. Malafeev, V.N. Kolokoltsov. — New Jersey : World Scientific Publishing Co., 2010. — 286 p.

2. Tintner G. Stohastic process, Control, and linebreak Programming / G. Tintner, J.K. Sengupta. — New York and London : Academic Press, 1972. — 321 p.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00796).

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ[1]

Н.В. Мартемьянова (Самара, Самарский университет)
ninamartem@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - bK(y)u = F(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $K(y) = sgny \cdot |y|^n$, $n > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, – заданные действительные числа, и поставим следующую обратную задачу.

Обратная задача. *Найти функции $u(x,y)$ и $f_i(x)$, $i = 1,2$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad f_i(x) \in C(0,l) \cap L_2[0,l];$$

$$Lu(x,y) = F(x,y), (x,y) \in D_- \cup D_+;$$

$$u_x(0,y) = u_x(l,y),\ u(l,y) = 0,\ -\alpha \leqslant y \leqslant \beta;$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ u(x,-\alpha) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l;$$

$$u_y(x,\beta) = \chi(x),\ u_y(x,-\alpha) = g(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ и $g(x)$– заданные достаточно гладкие функции, $\varphi'(0) = \varphi'(l), \psi'(0) = \psi'(l),\ \varphi(l) = \psi(l) = 0, D_+ = D \cap \{y > 0\},\ D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что эта задача при $n = 0$ изучалась в работах [1-3].

В данной работе, следуя [4,5], доказаны теоремы существования и единственности решения поставленной задачи.

Литература

1. Сабитов К.Б. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа / К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Известия Вузов. Математика. — 2011. — №2. — С. 71–85.

2. Сабитов К.Б. Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием /

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00421).

К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Сибирский математический журнал. — 2012. — Т. 53, № 3. — С. 633–647.

3. Сабитов К.Б. Обратная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, связанная с поиском элементов правой части / К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Известия вузов. Математика. — 2017. — №2. — С. 44–57.

4. Сабитов К.Б. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием / К.Б. Сабитов, С.Н. Сидоров // Известия Вузов. Математика. — 2015. — № 1. — С. 46–59.

5. Мартемьянова Н.В. Обратная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, связанная с поиском элементов правой части / Н.В. Мартемьянова // Известия вузов. Математика. — 2017. — №2. — С. 44–57.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФИРМОЙ В УСЛОВИЯХ СТРОГОЙ РЕГЛАМЕНТАЦИИ ЕЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ[1]

А.В. Мартыненко, С.В. Вихарев
(Екатеринбург, УрГУПС, УрФУ)
amartynenko@rambler.ru

Рассматривается вопрос о моделировании влияния управленческой деятельности на прибыль фирмы в условиях строгой регламентации ее работы со стороны регулятора. Предлагаемая модель сводится к следующей задаче оптимального управления

$$y'(t) = \alpha(Q - w(t)), \quad w(t) \in [0, Q], \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

$$J(t) = \int_0^T \big(F(w(t), B) - M(y(t))B\big)e^{-\delta t}dt \to max, \tag{3}$$

где $F(x_0, x_1, ..., x_n)$ — производственная функция, значение которой представляет собой объем выпуска продукции в денежной форме, $w(t)$ — интенсивность управленческого труда, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ — прочие факторы производства, $M(y) = (m_1(y), m_2(y), ..., m_n(y))$ — цены факторов производства, $e^{-\delta t}$ — дисконтирующий множитель

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №17-71-20108).

с $\delta \geqslant 0$ и Q, α, T — заданные неотрицательные постоянные, причем возможен случай бесконечного горизонта $T = \infty$.

При достаточно общих предположениях относительно F и M с помощью принципа максимума Понтрягина установлены некоторые свойства решений задачи (1)–(3). В частности, показано, что оптимальное управление имеет нулевой режим в финальной стадии и найдены точные условия, при которых нулевой режим управления является оптимальным на всем рассматриваемом промежутке времени.

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ПАРЫ УРАВНЕНИЙ ХАТЧИНСОНА С КОНКУРЕНТНОЙ И ДИФФУЗИОННОЙ СВЯЗЬЮ[1]

Е.А. Марушкина, Е.С. Самсонова
(Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова)
marushkina-ea@yandex.ru

Рассмотрим систему двух связанных уравнений Хатчинсона, описывающих динамику слабого конкурентного взаимодействия двух популяций:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= (\tfrac{\pi}{2} + \varepsilon)(1 - N_1(t-1) + \varepsilon\alpha N_2)N_1 + \varepsilon d(N_2 - N_1), \\ \dot{N}_2 &= (\tfrac{\pi}{2} + \varepsilon)(1 - N_2(t-1) + \varepsilon\alpha N_1)N_2 + \varepsilon d(N_1 - N_2). \end{aligned} \tag{1}$$

В этой задаче величины $d > 0$ и α отвечают за интенсивность взаимодействия между популяциями. Эта связь выбрана слабой, пропорциональной малому параметру $0 < \varepsilon \ll 1$. Отметим, что при $\varepsilon = 0$ в спектре устойчивости состояния равновесия $(1,1)^T$ системы (1) имеется пара чисто мнимых собственных чисел $\lambda = \pm i\frac{\pi}{2}$ кратности 2, которым соответствуют две линейно независимые собственные функции. В этом случае данная задача имеет устойчивое локальное 4–мерное интегральное многообразие. Для нахождения системы ОДУ, отвечающей за динамику системы (1) на этом многообразии, использовалась стандартная замена метода нормальных форм: $N_j(t) = 1 + \sqrt{\varepsilon}(z_j(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \text{к.с.}) + \varepsilon u_{j1}(t,\tau) + \varepsilon^{3/2}u_{j2}(t,\tau) + \ldots$, где $z_j(\tau)$ — комплекснозначные функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$, $(j = 1, 2)$. На третьем шаге алгоритма из условий разрешимости задач для $u_{j2}(t,\tau)$ в классе 4–периодических по t функций

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10043).

была получена следующая нормальная форма:

$$\begin{aligned}(20+10\pi i)z_1' &= 20iz_1+(2-6i)\pi z_1|z_1|^2-10\pi\alpha z_2+20d(z_2-z_1),\\ (20+10\pi i)z_2' &= 20iz_2+(2-6i)\pi z_2|z_2|^2-10\pi\alpha z_1+20d(z_1-z_2).\end{aligned} \tag{2}$$

В работе проанализирована динамика системы (2), в частности, найдены условия, при которых однородный режим задачи ($z_1 \equiv z_2$) теряет устойчивость дивергентным и колебательным образом. Это позволяет разобраться с локальной динамикой системы (1) при достаточно малых ε.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

О.Х. Масаева (Нальчик, ИПМА)
olesya.masaeva@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\right)u(x,y)=f(x,y),\ 1<\alpha,\beta<2, \tag{1}$$

в области $D=\{(x,y): x>0, y>0\}$. Операцию дробного дифференцирования будем понимать в смысле Римана-Лиувилля, с началом в точке 0, $\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu}\equiv D^\mu_{0t}$ [1].

Уравнения дробного порядка имеют много различных приложений, в частности, возникают в математическом моделировании производственных процессов [2].

В данной работе изучается следующая

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{x\to 0} x^{2-\alpha}u(x,y)=0,\ y>0, \quad \lim_{y\to 0} y^{2-\beta}u(x,y)=0,\ x>0. \tag{2}$$

В работе доказана разрешимость задачи (1), (2) в классе функций, имеющих дробные интегралы, исчезающие в бесконечно удаленной точке.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

2. Нахушев А.М. О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием / А.М. Нахушев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2007. — Т. 9, № 1. — С. 128–137.

РЕЗОНАНСЫ ОПЕРАТОРА ДИРАКА НА ПОЛУОСИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Д.С. Мокеев (Санкт-Петербург, СПбГУ)
mokeev.ds@yandex.ru

Мы рассмотрим оператор Дирака с периодическим потенциалом на полуоси с граничным условием Дирихле в нуле. Его спектр состоит из абсолютно непрерывной части, которая имеет зонную структуру, и собственных значений, не более одного в каждой лакуне абсолютно непрерывного спектра. Резольвента рассматриваемого оператора допускает мероморфное продолжение на двулистную риманову поверхность. Будем называть полюса резольвенты состояниями оператора Дирака. В работе [1] показано, что над каждой открытой лакуной в спектре существует единственное состояние оператора Дирака, причем полюсы на первом листе являются собственными значениями, а полюсы на втором листе — резонансами. При сдвиге потенциала на некоторый вещественный параметр t, абсолютно непрерывный спектр не изменяется, а состояния двигаются по лакунам. В работе [1] доказано, что каждое состояние является абсолютно непрерывной и в общем немонотонной функцией t. Кроме того, при некоторых ограничениях на потенциал состояния являются строго монотонными функциями t. Используя эти результаты получены формулы для восстановления потенциалов специального вида.

Литература

1. Korotyaev E. Periodic Dirac operator on the half-line / E. Korotyaev, D. Mokeev. — arXiv : 1903.08530.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ

В.С. Мокейчев (Казань, КФУ)
Valery.Mokeychev@kpfu.ru

Формально в методе Фурье для линейного уравнения $Au = f$ следует **выбрать** $\varphi = \{\varphi_{(p)},\ p \in N\}$ — **множество элементов,**

для которых определены линейные комбинации, и элементы $A\varphi_{(p)},\ p \in N$, **выписать уравнение** $\sum u_p A\varphi_{(p)} = f$. В случае существования u_p объект $\sum u_p\varphi_{(p)}$ называется формальным решением. Обоснование метода Фурье заключается в ответах на вопросы: **при каких** f **существуют** $u_p, p \in N$, **существуют ли пространства, в которых сходятся ряды** $\sum u_p\varphi_{(p)}, \sum u_p A\varphi_{(p)}$?

Обоснование будет осуществлено при предположениях:

P1: в φ элементы линейно независимы;

P2: после удаления из $A\varphi$ нулевых элементов, а также конечного множества ненулевых элементов, линейно зависимых от оставшихся, получим линейно независимую систему $A\tilde{\varphi} = \{A\varphi_{(p)},\ p \in \tilde{N}\}$.

Теорема 1. *Если в множестве* $g = \{g_{(p)},\ p \in N\}$ *элементы линейно независимы и* $\mu = \{\mu_p \neq 0,\ p \in N\}$ *то существует такое гильбертово пространство* $H_\mu(g)$, *что* g *— ортогональный базис в* $H_\mu(g)$, *ряд* $\sum u_p g_{(p)}$ *сходится в* $H_\mu(g) \iff \sum |\mu_p|^2 \cdot |u_p|^2 < +\infty$, *ряд* $\sum v_p g_{(p)}$ *сходится в* $H(g) = \bigcup\limits_{\mu} H_\mu(g) \iff \sum |\mu_p|^2 \cdot |u_p|^2 < +\infty$ *при некотором* μ.

При этом ряд называется сходящимся в $H(g)$, если при некотором μ ряд сходится в $H_\mu(g)$. В силу P1,P2 и теоремы 1 **при любых** u_p **ряд** $\sum u_p\varphi_{(p)}$ **сходится в** $H(\varphi)$, **а ряд** $\sum u_p A\varphi_{(p)}$ **— в** $H(A\tilde{\varphi})$.

Теорема 2. *Пусть для* φ *выполняются P1,P2. Существует решение* $u \in H(\varphi)$ *линейного уравнения* $Au = f \iff f \in H(A\tilde{\varphi})$, *причём решение — единственное* $\iff A\tilde{\varphi} = A\varphi$.

Ранее метод Фурье обосновывался с использованием пространства D'_g (g-распределений), которое удавалось построить тогда, когда g имела биортогональную систему в некотором гильбертовом пространстве, в этом случае $H(g) = D'_g$ [1–5].

Литература

1. Мокейчев В.С. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами / В.С. Мокейчев. — Казань : Казанский университет, 1985. — 224 с.

2. Мокейчев В.С. Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных / В.С. Мокейчев, А.В. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 1999. — № 1. — С. 25–35.

3. Мокейчев В.С. Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных / В.С. Мокейчев, А.В. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 1999. — № 7. — С. 30–41.

4. Мокейчев В.С. Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных / В.С. Мокейчев, А.В. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 1999. — № 11. — С. 50–59.

5. Мокейчев В. С. Метрические, банаховы, гильбертовы пространства φ_B-распределений / В.С. Мокейчев // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 5. — С. 64–70.

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВ СЕРПИНСКОГО ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

П.В. Москалев (Воронеж, ВГАУ)
moskaleff@mail.ru

Исследование реализаций рассмотренной в [1, 2] рандомизированной системы итерированных функций (РСИФ): $x_{i+1} = \frac{x_i+\mu z_j}{1+\mu}$, где $\mu \geqslant 0$ — параметр РСИФ, соответствующий коэффициенту разбиения итерационных отрезков; z_j — случайная точка порождающего множества $\mathbf{Z}$, выбранная согласно распределению $p_j = \mathbf{P}\{z_j\}$ при $j = 1, 2, \ldots, k$, продемонстрировало зависимость топологической структуры формируемых в $\mathbf{R}^2$ реализаций от трех параметров: неотрицательного коэффициента разбиения $\mu \in \mathbf{R}$ и натуральных k_1 и k_2 таких, что $k_1 \cdot k_2 = k$ — число точек порождающего множества $\mathbf{Z}$. Последнее соотношение допускает интерпретацию множества $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2$ как декартова произведения двух подмножеств: $\mathbf{Z}_1$ вершин правильного многоугольника и $\mathbf{Z}_2$ точек равномерного разбиения его сторон. Действительно, при фиксированном $k_1 = 3$ и варьируемых $k_2 = \mu = 1, 2, \ldots$ структура реализаций РСИФ в $\mathbf{R}^2$ будет соответствовать треугольным множествам Серпинского первого, второго и последующих порядков. Аналогично, при $k_1 = 4$ и $k_2 = \mu = 1, 2, \ldots$ структура реализации РСИФ в $\mathbf{R}^2$ будет соответствовать квадратным множествам Серпинского первого, второго и последующих порядков. При этом для $k_1 = 6$ и $k_2 = 1$ структура шестиугольного множества Серпинского первого порядка наблюдается лишь при $\mu = 2$, что может объясняться эквивалентностью $k_1 \cdot k_2 = 3 \cdot 2 \equiv 6 \cdot 1$ и приводит к гипотезе об изоморфизме между треугольным множеством Серпинского второго порядка и шестиугольным множеством Серпинского первого порядка.

Литература

1. Москалев П.В. О размерности подобия рандомизированной системы итеративных функций / П.В. Москалев, А.Г. Буховец // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 681–891.

2. Buchovets A.G. Ultrametric properties of the attractor spaces for random iterated linear function systems / A.G. Buchovets, P.V. Moskalev // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — V. 973, No. 1. — P. 012028.

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ

М. В. Муковнин (Воронеж, ВГУ)

mikhailmukovnin@gmail.com

Исследуется следующая система уравнений.

$$\sqrt{\rho(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\rho(x)}\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}\right) = \nu \cdot \frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} = \gamma(P_2(t,x) - P_1(t,x)), \quad (2)$$

и рассматривается задача со следующими условиями

$$P_1(t,0) = \varphi(t), \quad (3)$$

$$\lim_{x\to\infty}|P_1(t,x)| = \lim_{x\to\infty}|P_2(t,x)| = 0, \quad (4)$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|P_1(t,x)| < \infty, \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}|P_2(t,x)| < \infty. \quad (5)$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Задача (1)—(5) равномерно корректно разрешима и её решение представимо в виде*

$$P_1(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m}h(x)} e^{mt},$$

$$P_2(t,x) = \gamma\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m}h(x)} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\gamma(\xi-t)} e^{m\xi} d\xi$$

Теорема 2. *Если в условии (3) функция $\varphi(t)$ периодическая с периодом T и рядом Фурье*

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right],$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$,

$$\rho_n = \frac{\omega_n}{a} \sqrt{\frac{\gamma^2 + \omega_n^2 \nu^2}{\omega_n^2 + \gamma_2}}, \qquad \alpha_n = \frac{\omega_n^2 (1 - \nu)\gamma}{a(\gamma^2 + \omega_n^2)}.$$

то существует периодическое решение задачи (1)-(4),при любом $x \in \mathbb{R}^+$

$$P_1(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n + \alpha_n)}{2}} h(x)} \cdot \cos \left[\sqrt{\frac{(\rho_n - \alpha_n)}{2}} x - \omega_n t + \delta_n^0 \right],$$

$$P_2(t, x) = \gamma \int_{-\infty}^{t} e^{\gamma(\xi - t)} P_1(\xi, x) d\xi.$$

Литература

1. Голубев В.С. Уравнение движения жидкости в пористой среде с застойными зонами / В.С. Голубев // ДАН. СССР — 1978. — Т. 238, № 6. — С. 1318–1320.

2. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю.И. Бабенко. — Л. : Химия, 1986. — 144 с.

3. Костин В.А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // ДАН. — 2014. — Т. 455, № 2. — С. 142–146.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА, ОСНОВАННАЯ НА ПРОБЛЕМЕ НЕЙРОБИОЛОГИИ[1]

Г.Е. Мурзабекова, К.Б. Нуртазина, А.А. Атантаева
(Казахстан, Нур-Султан,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева)
guldenmur07@mail.ru, knurtazina@mail.ru, saneka77@mail.ru

Модель основана на практической проблеме дендритных деревьев, формируемых нейронами центральной нервной системы. Активность нейронов сопровождается значительными вариациями электрических и физических параметров. Информация формируется через электрический импульс.

Состояние системы описывается на квантовом графе [1] с дифференциальными операторами на ребрах и условиями согласования Кирхгофа-Неймана в вершинах. В отличие от методов окрашивания и визуализации для оценки многих дендритных свойств наш подход [2] аналитически строг и опирается на изучение изменения токов. В отличие от [3] нами дано математическое обоснование, основанное на обратной задаче для параболического уравнения на графе-дереве. Мы расширяем теорию нейронных кабелей BC-методом; доказываем достаточные условия идентификации априорных параметров; строим алгоритм идентификации источника на графе-дереве; восстанавливаем топологию графа и длины ребер.

На любой заданной ветви дендрита (ребра e_i графа-дерева) найдутся источники N_i соединения с другими клетками, где $N_i = 0, 1, 2, \ldots$, причем N_i конечное число. Полученные результаты по восстановлению источников позволяют изучить функциональную активность нейронов в процессе влияния рецепторов кожи.

Литература

1. Avdonin S. Inverse problems for quantum trees/ S. Avdonin, P. Kurasov // Inverse Problems and Imaging. — 2008. — No. 2. — P. 1—21.

2. Avdonin S. Determining distributed parameters in a neuronal cable model on a tree graph / S. Avdonin, J. Bell, K. Nurtazina // Math. meth. in appl. sciences. – 2017. — No. 40 (11). — P. 3973—3981.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP05136197).

3. Stephenson E. A mathematical model of skeletal muscle regeneration / E. Stephenson, H. Kojouharov // Math. meth. in the appl. sciences, 2018.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОБРАЗОВАНИИ ГИДРАТА МЕТАНА В ПЛАСТЕ СО СКАЧКОМ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ФРОНТЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ[1]

Н.Г. Мусакаев, М.К. Хасанов, А.А. Губайдуллин (Тюмень, ТюмФ ИТПМ СО РАН,
Тюменский индустриальный университет;
Стерлитамак, СФ БашГУ)
musakaev@ikz.ru

Представлена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая процесс образования гидрата метана в пористой среде при закачке в гидратонасыщенный пласт холодного ($T_e < T_0$) газа. С учетом полученных в работе [1] результатов принята модель со ступенчатым распределением температуры с ее скачком на фронте гидратообразования. С использованием метода последовательных смен стационарных состояний построено решение для нахождения координаты границы фазовых переходов:

$$x_{(s)} = \frac{c_g\sqrt{k_{(1)} m S_g (2p_e^2 - p_e p_0 - p_0^2)(p_e^2 - p_0^2)}}{R_g\sqrt{3\mu_g(p_e + p_0)}} \times$$
$$\times \frac{1}{\left(\rho c T_e - m S_{h(1)} \rho_h T_e \left(\frac{L_h}{\left(T_e - T_0 - T_* \ln\left(\frac{p_e}{p_{s0}}\right)\right)}\right) + m S_{g(1)} c_g \frac{p_e}{R_g}\right)} \sqrt{t},$$

где $k_{(1)} = k_0 S_{g(1)}^3$; t — время; p_0 и T_0 — начальные давление и температура; p_e и T_e — давление и температура закачиваемого газа; m и k_0 — пористость и проницаемость пласта; $S_{h(1)}$ и $S_{g(1)}$ — гидрато- и газонасыщенность; R_g — удельная газовая постоянная; ρ_h и L_h — плотность и теплота образования газогидрата; c_g и μ_g — теплоемкость и динамическая вязкость метана.

Литература

1. Shagapov V.Sh. Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas / V.Sh. Shagapov, N.G. Musakaev,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10023).

M.K. Khasanov // Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 2015. — Vol 84. — P. 1030–1039.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА В СЛУЧАЕ ПРОСТЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Р. Мустафокулов (Душанбе, ТНУ)
rmustaf@list.ru

Рассмотрим линейное уравнение вида

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + ...+$$

$$+a_{n-1}(x)\omega(x)y^{'} + a_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_i(x), \omega(x)$ и правая часть $f(x)$ являются непрерывными при всех $x \geqslant 0$ функциями, причем $\omega(x) \neq 0$ при $x > 0$.

Обозначим $\mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}$ и для каждого $k = 1, 2, ..., n-1, i = 2, ..., k-1$, введем в рассмотрение функции

$$P_k{}^i(x) = \mu^{'}(x) P_{k-1}^{i-1}(x) + (P_{k-1}^{i}(x))^{'},$$

$$P_k^1(x) = \mu^{(k)}(x),\ P_k^k(x) = [\mu^{'}(x)]^k.$$

Уравнения (1) называется *модельным*, если существуют такие постоянные p_k, что коэффициенты $a_k(x)$ удовлетворяют условиям

$$a_k(x) = p_k - \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x)[\omega(x)]^{n-i} P_{k-i}^{n-k}(x) \ \ (k = \overline{1, n-1}),$$

$$a_0(x) \equiv 1, a_n(x) \equiv p_n.$$

Под характеристиками модельного уравнения (1) будем понимать корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

В настоящем докладе обсуждается случай наличия у модельного уравнения (1) p вещественных $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_p$ и q комплексно-сопряженных $\theta_1 = \alpha_1 \pm i\beta_1, \theta_2 = \alpha_2 \pm i\beta_2, ...\theta_q = \alpha_q \pm i\beta_q$ характеристик, где $p + 2q = n$.

По этим характеристикам составим определитель

$$W = \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & 1 & 0 & ... & 1 & 0 \\ \lambda_1 & ... & \lambda_p & \alpha_1 & \beta_1 & ... & \alpha_q & \beta_q \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & ... & \lambda_p^{n-1} & a_1^{n-2} & b_1^{n-2} & ... & a_q^{n-2} & b_q^{n-2} \end{vmatrix},$$

где $a_j^{k-1} = Re\theta_j^k$, $b_j^{k-1} = Im\theta_j^k$ $(k = \overline{1, n-1})$, причем $a_j^0 = \alpha_j$, $b_j^0 = \beta_j$ $(j = \overline{1, q})$.

Теорема. *Общее решение модельного уравнения (1) определяется равенством*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k e^{\lambda_k \mu(x)} + \sum_{m=1}^{q} e^{\alpha_m \mu(x)} [c_m^{(1)} \cos(\beta_m \mu(x)) + c_m^{(2)} \sin(\beta_m \mu(x))] +$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{W_{nk}}{W} \int_0^x e^{\lambda_k [\mu(x) - \mu(s)]} \mu'(s) f(s) ds + \sum_{m=1}^{q} \int_0^x e^{\alpha_m [\mu(x) - \mu(s)]} \Big\{ \frac{W_{n,p+2m}}{W}$$

$$\sin(\beta_m [\mu(x) - \mu(s)]) - \frac{W_{n,p+2m-1}}{W} \cos(\beta_m [\mu(x) - \mu(s)]) \Big\} \mu'(s) f(s) ds,$$

где $c_k (k = \overline{1, p})$, $c_m^{(1)}$, $c_m^{(2)}$ $(m = \overline{1, q})$ произвольные постоянные,а W_{n_j} — алгебраическое дополнение элементов n-й строки и j-го столбца определителя W, $j = \overline{1, n}$.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ

А.В. Нестеров (Москва, РЭУ им. Г. В. Плеханова)
andrenesterov@yandex.ru

Строится асимптотическое разложение (АР) решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малой нелинейной диффузией в области $|x| < \infty, t > 0$

$$\varepsilon^2 (U_t + DU_x) = AU + \varepsilon F(U) + \epsilon^3 B(U) U_{xx}, U(x, 0) = \omega(x/\epsilon). \quad (1)$$

Здесь $0 < \varepsilon << 1$ - малый параметр, матрица A имеет однократную собственную пару $\lambda_0 = 0 \Leftrightarrow h_0$. При ряде требований, наложенных на начальные условия, функцию $F(U)$, матрицы D, A, $B(U)$, построено АР решения по малому параметру

$$U(x,t,\epsilon) = \sum_{i=0}^{N} \epsilon^i (s_i(\zeta,t) + \Pi_i(\xi,\tau)) + R_N, \tag{2}$$

переменные ζ, ξ, τ выражаются через данные задачи (1).

Старший член АР (2) имеет вид $s_0(\zeta,t) = \varphi_0(\zeta,t)h_0$ где $\varphi_0(\zeta,t)$ есть решение задачи Коши для уравнения

$$\varphi_{0t} + M\varphi_{0\zeta\zeta} + (F_{eff}(\varphi_0))_\zeta + (B_{eff}(\varphi_0)\varphi_{0,\zeta\zeta})_\zeta = 0. \tag{3}$$

M, F_{eff}, B_{eff} выражаются через данные задачи (1). При квадратичной $F(U)$ и постоянной $B(U)$ уравнение (3) является уравнением Бюргерса - Кортевега - де Фриза

$$\varphi_{0t} + M\varphi_{0\zeta\zeta} + k\varphi_0\varphi_{0\zeta} + b\varphi_{0,\zeta\zeta\zeta} = 0. \tag{4}$$

Литература

1. Нестеров А.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае / А.В. Нестеров, О.В. Шулико // ЖВМиМФ. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 268–275.

2. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Изд-во МГУ, 1978. — 262 с.

СЕКРЕТНОСТЬ КЛЮЧА В КВАНТОВОЙ КРИПТОГРАФИИ

Н.К. Ногаев, К.М. Сулейменов
(Астана, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева)
vip.nuras98@gmail.com

Появление квантовых компьютеров, разработка которых ведется уже несколько десятилетий, не только продвинет науку, но и сделает современные криптосистемы уязвимыми.

Стойкость алгоритма RSA основывается на сложности вычисления обратной функции к функции шифрования. С появлением квантовых компьютеров при помощи алгоритма Шора взлом будет происходит намного быстрее, и все системы, использующие для шифрования алгоритмы RSA и другие, станут неэффективными. Так как алгоритм Шора основан на свойствах квантовой физики, то требуются алгоритмы шифрования для квантовой криптографии. Одной из предпосылок создания таких алгоритмов, является установление критериев секретности информации.

Пусть K — ключевое множество мощности N с некоторым распределением вероятностей $P = (p_1, p_2, ..., p_N)$, в соответствии с которым ключи выбираются для шифрования. Будем считать, что ключи упорядочены по вероятностям:

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_N.$$

Нами подробно разобрано равновероятное распределение $P_0 = (N^{-1}, N^{-1}, \ldots, N^{-1})$. Показано, что средний объем алгоритма опробования ключей близок к максимальному объему, и в данное время нет более эффективных алгоритмов. Для оценки секретности алгоритмов, основанных на ключевых множествах и соответствующих распределениях, можно использовать энтропийный критерий и критерий расстояния по вариации, в которых в качестве эталона применяется изученное равновероятное распределение P_0.

Литература

1. Арбеков И.М. Критерии секретности ключа / И.М. Арбеков // Матем. вопр. криптогр. — 2016. — № 7 (1). — С. 39–56.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

С.С. Орлов, Е.В. Рожков (Иркутск, ИГУ)

orlov_sergey@inbox.ru

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, u — неизвестная, а f — заданная функции со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим начальную задачу

$$Bu'(t) - Au(t) = f(t), \, u(0) = u_0, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а).

где B и A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A)$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, оператор B *фредгольмов*, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$.

Проблему существования периодических решений абстрактных дифференциальных уравнений обычно изучают, рассматривая так называемую *периодическую краевую задачу* с граничным условием $u(0) = u(T)$, где T — период искомого решения [1]. Исследование ее разрешимости естественным образом приводит к ограничениям на спектр операторных коэффициентов уравнения. При таком подходе единственность периодического решения и поиск основного периода становятся самостоятельными проблемами.

В представляемом докладе предлагается строить периодическое решение дифференциально-операторного уравнения, рассматривая не краевую, а начальную задачу (1) в предположении однозначной разрешимости. Основная проблема состоит в описании множества операторов A и B, свободных функций f и начальных значений u_0, при которых сильно непрерывно дифференцируемое (*классическое*) решение u начальной задачи (1) окажется периодическим. Данный подход позволяет ослабить указанные выше ограничения на спектр операторов и найти основной период искомого решения.

Литература

1. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ГРАМИАНА УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

И.О. Осипов (Екатеринбург, ИММ УрО РАН)
79193053374@yandex.ru

В работе [1] была доказана выпуклость множеств достижимости нелинейной управляемой системы при условии, что ограничения на управление заданы шаром в пространстве $\mathbb{L}_2$ достаточно малого радиуса. С использованием данного результата в [2] получены достаточные условия выпуклости множеств достижимости на малом интервале времени. Эти условия требуют проверки асимптотики минимального собственного числа грамиана управляемости линеаризованной системы при стремящейся к нулю длине интервала.

После замены времени малый параметр (длина интервала) появляется в виде множителя при матрице состояния линеаризованной системы. В стационарном случае задача сводится к изучению асимптотики минимального собственного числа грамиана управляемости для системы

$$\dot{x} = \varepsilon Ax + Bu,\ \varepsilon > 0,\ t = [0;1]. \tag{1}$$

Разложение грамиана управляемости по степеням малого параметра позволяет записать реккурентную процедуру для вычисления коэффициентов разложения.

Для нильпотентной матрицы A разложение конечно, в этом случае возможно получить явную зависимость наименьшего собственного числа от малого параметра. В более общих случаях приходится прибегать к анализу остаточного члена ряда.

Полученная асимптотика применяется к анализу выпуклости множеств достижимости для ряда систем 2-го и 3-го порядков.

Приведены результаты численного моделирования.

Литература

1. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls / B.T. Polyak // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser. A. Math. Anal. — 2004. — V. 11. — P. 255–267.

2. Gusev M.I. On Convexity of Reachable Sets of a Nonlinear System under Integral Constraints / M.I. Gusev // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — Vol.51, iss.32. — P. 207–212.

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА[1]

В.В. Панков (Воронежский государственный университет)

В настоящее время интенсивно исследуются процессы с вырождением, то есть процессы, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, различных процессов гидродинамики с сингулярной особенностью у параметров. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева [2] были получены априорные оценки и доказаны теоремы о существовании и единственности решения общей краевой задачи в полосе для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t. Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t, были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]–[7].

Рассмотрим в полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b(-1)^{k-1}\partial_t^{2k-1}v$, $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, $b,\ a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\,\overline{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x)\ v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1}\ v|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1, 2, ..., k \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t \ v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1} \ v|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau| \leqslant m_j} b_{\tau j}\xi_\tau \neq 0$, $j = 1, 2, ..., k$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7]. Для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$, $\quad F_{\eta\to\tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u(t) \in C^s[0,d]$ и удовлетворяет условиям $u(0) = \partial_t u(0) = ... = \partial_t^{s-1} u(0) = 0$, то справедливо равенство $F_\alpha \left[D_{\alpha,t}^j u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$ при всех $j = 0, 1, 2, ..., s$.

С помощью преобразования F_α были построены псевдодифференциальные операторы с вырождением. Исследование таких псевдодифференциальных уравнений позволило получить априорные оценки и теоремы о существовании граничных задач в полупространстве для новых классов вырождающихся уравнений.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} =$$

$$\{\sum_{l=0}^{[\frac{(2k-1)s}{2m}]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{2k-1}l)}F_{\alpha}F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{(2k-1)s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$.

Здесь $F_{x\to\xi}$ $(F^{-1}_{\xi\to x})$ — прямое (обратное) преобразование Фурье

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l\leqslant s} \left\|D_x^{\tau}D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^l v\right\|_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева – Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_s$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ — *целое число,* $m \geqslant 2k-1$ *и выполнены условия 1–3. Пусть* $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}(R^{n-1})$, $j = 1,2,...,k-1$. *Тогда существует единственное решение* $v(x,t)$ *задачи (1) - (3), принадлежащее пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$.

Литература

1. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

2. Баев А. Д. О корректности краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения в частных производных : сб. науч. тр. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 17–21.

3. Бунеев С.С. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

4. Бунеев С.С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

5. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

6. 2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Ковалевский Р.А. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А.Д. Баев А.Д., Р.А. Ковалевский, П.А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА[1]

В.В. Панков (Воронежский государственный университет)

В настоящее время интенсивно развивается теория краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Это обусловлено тем, что такие краевые задачи используются при исследовании процессов с вырождением, то есть процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, различных процессов гидродинамики с сингулярной особенностью у параметров. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д. Баева [2] были получены априорные оценки и доказаны теоремы о существовании и единственности решения общей краевой задачи в полосе для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t. Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t, были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]–[7].

Рассмотрим в полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b(-1)^{k-1}\partial_t^{2k-1}v$, $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j}$, $b,\ a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\,\overline{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^{\tau} = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x)\left. v\right|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^{\tau}\partial_t^{j-1}\left. v\right|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1, 2, ..., k \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$\left. v\right|_{t=d} = \partial_t\left. v\right|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\left. v\right|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\overline{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau| \leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \neq 0$, $j = 1, 2, ..., k-1$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7]. Обратное преобразование F_α^{-1}, можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$, $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ - обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u(t) \in C^s[0,d]$ и удовлетворяет условиям $u(0) = \partial_t u(0) = ... = \partial_t^{s-1} u(0) = 0$, то справедливо равенство $F_\alpha\left[D^j_{\alpha,t} u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$ при всех $j = 0, 1, 2, ..., s$.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} =$$

$$\{\sum_{l=0}^{[\frac{(2k-1)s}{2m}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F_\alpha^{-1}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{2k-1}l)} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{(2k-1)s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$.

Здесь $F_{x\to\xi}$ ($F^{-1}_{\xi\to x}$) — прямое (обратное) преобразование Фурье.

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l \leqslant s} \left\| D_x^\tau D^j_{\alpha,t} \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева – Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_{\,s}$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s \geqslant \max\{2m,\ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ *- целое число,* $m \geqslant 2k-1$ *и выполнены условия 1 - 3. Тогда для любого решения*$v(x,t) \in H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R^n_d)$ *задачи (1) –(3). Справедлива априорная оценка*

$$\|v(x,t)\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leqslant c(\|A(D_x, D_{\alpha,t})v(x,t)\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{k} \langle\langle B_j(D_x)\ v(x,t)|_{t=0}\rangle\rangle_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}})$$

с константой, не зависящей от $v(x,t)$.

Литература

1. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

2. Баев А. Д. О корректности краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения в частных производных : сб. науч. тр. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 17–21.

3. Бунеев С.С. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

4. Бунеев С.С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

5. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

6. 2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Ковалевский Р.А. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский, П.А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

РАЗВИТИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗА СИЛЬНЫХ ЛЕТНИХ ПОЛУСУТОЧНЫХ ОСАДКОВ ДЛЯ ТЕРРИТОРИИ РОССИИ

Э.В. Переходцева (Москва,
Московский технологический университет РТУ МИРЭА,
Гидрометцентр России)
perekhod@mecom.ru

Возникновение сильных ливней или летних полусуточных осадков количеством $Q \geqslant 15$мм/12ч и опасных осадков количеством $Q \geqslant 50$мм/12ч связано с развитием кучево-дождевой облачности, развивающейся в зонах конвекции, характеризуемой значениями целого ряда параметров атмосферы (предикторов). Гидродинамические модели прогноза погоды (ГДМА), включающие блоки расчета конвекции, прогнозируют эти неблагоприятные и опасные явления с недостаточно успешной предупрежденностью. Для целей распознавания и прогноза этих явлений предварительно из 38 параметров были отобраны по определенным алгоритмам наиболее информативные малозависимые признаки, а затем для них рассчитаны дискриминантные функции распознавания и прогноза неблагоприятных ($Q \geqslant 15$мм/12ч) и опасных ($Q \geqslant 50$мм/12ч) летних полусуточных осадков. Разработанные статистические модели распознавания этих явлений показали высокие результаты успешности распознавания на независимой диагностической выборке.

Применение этих разработанных статистических моделей не только к распознаванию, но и к прогнозу сильных осадков обоих классов позволило повысить успешность автоматизированного прогноза сильных и опасных осадков по Европейской территории России с использованием выходных прогностических полей гидродинамических моделей Гидрометцентра России.

В 90-х годах первый гидродинамико-статистический прогноз летних неблагоприятных полусуточных осадков с заблаговременностью 12 и 24ч успешно прошел независимые испытания в пяти Управлениях по Гидрометслужбе и потом ежедневно оперативно

2 раза в сутки успешно передавался в эти Управления до 2006 г. В УГМС Татарстана успешно прошел испытания метод прогноза опасных осадков.

В настоящее время в Гидрометцентре России оперативно функционирует региональная гидродинамическая модель (автор — Лосев В.М.) с горизонтальным разрешением 75х75км. Новый гидродинамико -статистический метод прогноза летних осадков количеством $Q \geqslant 15$мм/12ч, использующий выходные прогностические поля региональной модели, также оперативно испытывался в Гидрометцентре России. Он был принят для использования в оперативной синоптической практике. Сравнивались при испытании значения выпавших и прогнозируемых осадков теперь не по области, а на станциях, т.е в пункте прогноза. При таком жестком испытании гидродинамико-статистический метод прогноза на текущий день давал значения предупрежденности явлений П=70-80%, критерия успешности Пирси-Обухова Т=0,45-0,51, в то время как по всем другим моделям предупрежденность и на текущий день, и на последующий составляла не более 25%, а значения критерия Пирси-Обухова составляли не более 0,25. Летом 2018 г. значение предупрежденности у мезомасштабной модели было равно П=9%, а у гидродинамико-статистического прогноза П=80%. В течение последних двух лет в новой технологии карты прогноза осадков выкладываются оперативно на сервер ГВЦ, откуда их могут брать синоптики в любое время. В докладе будут приведены примеры прогнозов и подробно представлены результаты прогнозов заблаговременностью до 48 ч по всем годам и моделям, начиная с 2012 года по 2018 г.

Для территорий Урала и Сибири также была разработана технология представления прогнозов сильных осадков в виде карт осадков. Для этих территорий также предупрежденность сильных осадков и показатель успешности $T = 1 - a - b$ (Пирси-Обухова) нашего прогноза существенно выше. Это свидетельствует об устойчивости разработанных статистических моделей распознавания сильных осадков.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

С.В. Пикулин (Москва, ВЦ ФИЦ ИУ РАН)
spikulin@gmail.com

В докладе рассмотрена следующая двухточечная сингулярная краевая задача для уравнения Эмдена–Фаулера:

$$\frac{d^2y}{dr^2} - r^{\nu}\, y^{1+\sigma}(r) = 0, \quad r \in (0, R), \quad R \in (0, +\infty], \tag{1}$$

$$y(0) = Z, \quad Z \in (0, +\infty), \qquad \lim_{r\to R} y(r) = 0, \tag{2}$$

где $\sigma > 0$, $-1 < \nu =: N/M \in \mathbb{Q}$.

Теорема ([1]). *Решение $y(t)$ задачи (1), (2) при $R = +\infty$ допускает следующее параметрическое представление с параметром $t \in (0, 1]$:*

$$r(t) = \frac{{f_0}^{1/(\nu+2)}}{Z^{1/\beta}}\, t^{1/\alpha}\, (1-t)^M\, \mathcal{H}(t), \quad y(t) = Z\, t^{-\beta/\alpha}\, \mathcal{H}^{-\beta}(t), \tag{3}$$

где $\beta = (\nu+2)/\sigma$, $f_0 = \beta\,(\beta+1)$, $\alpha = \frac{1}{2}\big(2\,\beta+1-\sqrt{(2\,\beta+1)^2+4\,\sigma\, f_0}\big)$, функция $\mathcal{H}(t) > 0$ является аналитической на единичном отрезке.

На основе представления (3) построен высокоэффективный аналитико–численный метод для задачи (1), (2). В частности, для модели Томаса—Ферми распределения внутриатомного потенциала в тяжелом охлажденном атоме (при $\nu = -1/2, \sigma = 1/2$) данный метод позволяет найти решение $y(r)$ и его производную dy/dr с любой заданной точностью в произвольной точке луча. Для решения задачи (1), (2) при $R \in (0, +\infty)$ найдено представление, аналогичное (3). В основе полученных результатов лежит некоторое аналитическое свойство уравнения Абеля II рода специального вида, см. [2].

Литература

1. Пикулин С.В. О задаче Томаса-Ферми и о решениях уравнения Эмдена-Фаулера / С.В. Пикулин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, № 8. — (В печати.)

2. Пикулин С.В. О поведении решений уравнения Абеля II рода специального вида вблизи узловой особой точки / С.В. Пикулин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 12. — С. 2074–2095.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО[1]

С.И. Пискарев (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
piskarev@gmail.com

В банаховом пространстве E рассматривается обратная переопределенная задача

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t) + F(t)p, \quad t \in [0,T], u(0) = u^0, u(T) = u^T,$$

с оператором A, который порождает аналитические и компактные α-раз резольвентное семейство $\{S_\alpha(t,A)\}_{t\geqslant 0}, 0 < \alpha < 1$, $\mathbf{D}_t^\alpha$ — производная по Капуто, а функция $F(\cdot) \in C^k([0,T];E)$.

Мы приводим результаты по аппроксимации обратных задач по пространству и времени.

Литература

1. Orlovsky D. On Approximation of Coefficient Inverse Problems for Differential Equations in Functional Spaces / D. Orlovsky, S. Piskarev // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — V. 133. — C. 3–80.

2. Orlovsky D. Approximation of inverse Bitzadze-Samarskii problem for elliptic equation with Dirichlet conditions / D. Orlovsky, S. Piskarev // Differential Equations. — 2013. — V. 49, N. 7. — C. 923–935.

3. Orlovsky D. Approximation of inverse Bitzadze-Samarsky problem for elliptic eqaution with Neumann conditions / D. Orlovsky, S. Piskarev // Contemporary Analysis and Applied Mathematics. — 2013. — V. 1, N. 2. — C. 118–131.

ОНЛАЙН-ТЕСТИРОВАНИЕ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Ю.А. Плотникова (Вологда, Вологодская ГМХА)
japlotnikova@yandex.ru

Тестирование является одной из распространенных форм контроля знаний студентов. С помощью электронной образовательной среды преподаватель может проводить онлайн-тестирование в аудитории или дистанционно, охватывая большое количество

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-51-53008).

участников и получая автоматически обработанные результаты. Требующее на стадии подготовки достаточно больших затрат времени от преподавателя онлайн-тестирование, в то же время, имеет ряд преимуществ перед другими формами контроля.

Онлайн-тестирование в преподавании математических дисциплин можно применять не только для контроля знаний студентов, но и как часть самостоятельной работы (см., например, [1]), направленной на освоение разделов, в которых применяются типовые расчеты и кейс-задания. Целью таких тестирований является, в первую очередь, самообучение студентов, а также помощь учащимся в анализе материала, пройденного на занятиях и формирование умения находить необходимую информацию.

Для создания онлайн-тестов, включающих типовые расчеты по математическим дисциплинам, удобно использовать типы тестовых заданий, в которых вопрос и ответ формируются с помощью переменных, выступающих в роли параметров (см., например, [2]). Такие типы вопросов позволяют автоматически сформировать для каждого студента свой вариант, причем каждый раз при открытии теста значения параметров изменяются, что позволяет избежать повторений заданий. Примерами тем, при изучении которых могут использоваться вопросы с входными параметрами, являются «Определенный интеграл», «Классическое определение вероятности», «Решение систем линейных уравнений» и другие.

Онлайн-тестирование позволяет использовать и кейс-задания по математическим дисциплинам. Примерами таких задач могут служить практические задачи оптимизации, основанные на поиске наибольшего или наименьшего значений функции одной или нескольких переменных (см., например, [3]). Решение такой задачи можно разбить на несколько шагов и, соответственно, несколько тестовых заданий. Например, на первом шаге нужно будет составить соответствующую функцию, на втором шаге найти значения переменной/переменных, которые могут дать оптимальный результат, на третьем шаге найти оптимальное значение функции, осмыслить практический смысл результата, оформить вывод. При варьировании входящих параметров преподаватель имеет широкий спектр возможностей для записи условия.

Тестирования, используемые для контроля знаний студентов, обычно имеют ограничения по времени и количеству попыток. Основываясь на опыте, отметим, что на тестирования, о которых мы здесь говорим, лучше не накладывать подобные ограничения и дать возможность студенту вдумчиво, спокойно решать задания, при необходимости возвращаясь к ним несколько раз. Причем желательно, чтобы неверно сделанные попытки не влияли на результат прохождения такого теста. Если кейс-задание требует пошагового выполнения, то можно установить ограничения по выполнению следующего шага, если не выполнен предыдущий. При таких условиях самостоятельная работа в форме онлайн-тестирования будет служить достижению целей дисциплины.

Литература

1. Груздева М.Л. Тестирование как форма организации самостоятельной работы студентов / М.Л. Груздева, А.Л. Козицын // Современные наукоемкие технологии. — 2016. — № 7-1. — С. 118–121.

2. Плотникова Ю.А. Создание тестовых вопросов с параметрами для математических дисциплин в среде MOODLE / Ю.А. Плотникова // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна : материалы конференции. — Воронеж : Воронежский государственный университет. — 2017. — С. 154–156.

3. Балабаева Н.П. Математический анализ. Функции многих переменных / Н.П. Балабаева, Е.А. Энбом. — Самара : ПГУТИ, 2015. — 119 с.

МНОГООБРАЗИЯ БЕТЕ И ДУНКЛА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ОПЕРАТОРАМИ ДУНКЛА-ДАРБУ

К.О. Политов (Коломна, ГСГУ)

mr.politov.k@gmail.com

В работе [1] установлено совпадение многообразий Бете и Дункла, определенных в [2] для операторов Дункла.

Введем аналоги этих многообразий, ассоциированные с классическими обобщениями операторов Дункла на случай операторов Дункла-Дарбу(см., например, [3]).

Пусть $x, \alpha \in \mathbb{R}^n$. Отражение вектора x относительно гиперплоскости, ортогональной к вектору α, задается формулой

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(\alpha, x)}{\alpha, \alpha}\alpha.$$

Здесь круглые скобки — стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$.

Пусть также $\mathcal{R}$ — система корней в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_+$ — её положительная часть; k_α — целозначная неотрицательная функция на $\mathcal{R}$, инвариантная относительно отражений: $k_{s_\beta \alpha} = k_\alpha, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$; $L_k(t)$ — функция на $\mathbb{R}$, зависящая от целочисленного параметра k.

Определение 1. Многообразие D_L, определенное формулой

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}_+} \left[(\alpha,\xi)(\beta,\eta) - (\alpha,\eta)(\beta,\xi)\right] L_{k_\alpha}((\alpha,x)) L_{k_\beta}((\beta,x)) s_\beta s_\alpha = 0,$$

называется многообразием Дункла.

Определение 2. МногообразиеB_L, определенное формулой

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{R}_+} (\alpha,\beta) L_{k_\alpha}((\alpha,x)) L_{k_\beta}((\beta,x)) s_\beta s_\alpha = 0,$$

называется многообразием Бете.

Теорема. *Многообразия Бете и Дункла совпадают в* $\mathbb{R}^n$*:*

$$D_L = B_L.$$

Доказательство теоремы основано на том факте, что $s_\beta s_\alpha = s_\gamma s_\delta$ только в случае, если векторы лежат в одной плоскости и $tg(\widehat{\alpha,\beta}) = tg(\widehat{\gamma,\delta})$. Таким образом, найдется система координат, в которой скалярная форма, определяющая многообразия Дункла, примет вид

$$(\alpha,\xi)(\beta,\eta) - (\alpha,\eta)(\beta,\xi) = const\ tg(\widehat{\alpha,\beta})\ (\alpha,\beta).$$

Литература

1. Мещеряков В.В. Дифференциально-разностные операторы. Свойства, приложения, обобщения / В.В. Мещеряков. — Saarbrucken, Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010. — 136 с.

2. Golubeva V.A. Heisenberg-Weyl operator algebras associated to the models of Calogero-Sutherland type and isomorphism of rational and trigonometric models / V.A. Golubeva V.P. Leksin // J. Math. Sci. — 2000. — Т. 98, № 3. — С. 291–318.

3. Хэкало С.П. Дифференциально-разностные операторы Дункла–Дарбу / С.П. Хэкало // Известия РАН. Сер. матем. — 2017. — Т. 81, № 1. — С. 161–182.

ЭФФЕКТ ГЮЙГЕНСА В ОДНОЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

И.П. Половинкин, М.В. Половинкина, С.А. Рабееах (Воронеж, ВГУ)
polovinkin@yandex.ru

Пусть $Y = Y(x, y, t)$ — отклонение уровня дохода от невозмущенного состояния в точке с координатами x, y в момент времени t, норма инвестиций $v = v(t)$ и норма сбережений $s = s(t)$ задаются экзогенно. Следуя в целом [1], мы несколько возмутили исходные предположения модели и пришли к уравнению

$$\alpha\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - (\alpha^2 v - \alpha s + \alpha - \alpha\beta)\frac{\partial Y}{\partial t} - (\alpha s - \alpha\beta s - \alpha\dot{s})Y = m\Delta Y.$$

Если считать α и β постоянными, а нормы сбережений и инвестиций задать соответственно с помощью формул

$$s = s(t) = s_0 e^{-\beta\, t},\ v = v(t) = \left(s_0 e^{-\beta\, t} + \beta - \frac{1}{t}\right)/\alpha,$$

задача Коши с начальными условиями

$$\lim_{t\to+0} Y(x, y, t) = \varphi(x, y),\ \lim_{t\to+0}\frac{\partial Y}{\partial t}(x, y, t) = 0,$$

будет удовлетворять принципу Гюйгенса. Это означает, что краткосрочный локальный шок приводит к краткосрочным изменениям в активности близлежащих субъектов, но не приводит к выходу этих субъектов на новый уровень развития.

Проведя стандартный регрессионный анализ на основе данных Росстата, мы пришли к выводу, что экономика России в 1992–1998 гг попадает под приведенное выше описание, а значит, удовлетворяет принципу Гюйгенса. Расчеты же для Казахской экономики за этот период не подтвердили наличия эффекта Гюйгенса.

Литература

1. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика (пер. с англ.) / Т. Пу. — Ижевск : Изд. дом «Удмуртский университет», 2000. — 200 с.

БУФЕРНОСТЬ И BURSTING-ЭФФЕКТ В РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СВЯЗЬЮ[1]

М.М. Преображенская (Ярославль, ЯрГУ)
rita.preo@gmail.com

Рассматривается система двух специальным образом связанных дифференциально-разностных уравнений релейного типа с запаздыванием в цепи связи:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \big(\lambda F\big(u_1(t-1)\big) + b\,G\big(u_2(t-h)\big)\ln(u_*/u_1)\big)u_1, \\ \dot{u}_2 &= \big(\lambda F\big(u_2(t-1)\big) + b\,G\big(u_1(t-h)\big)\ln(u_*/u_2)\big)u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$F(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & 0 < u \leqslant 1, \\ -a, & u > 1, \end{cases} \qquad G(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & 0 < u \leqslant 1, \\ 1, & u > 1. \end{cases}$$

Здесь $a, b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(c\,\lambda)$, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, $h > 1$. Эта система моделирует ассоциацию связанных нейроподобных осцилляторов.

Важной особенностью (1) является наличие дополнительного запаздывания h в цепи связи, приводящего к новым эффектам, не характерным для системы без запаздывания.

Основной результат состоит в следующем. По любому фиксированному целому n удалось выявить механизм возникновения $(2n-1)$-го устойчивого релаксационного периодического решения. Компоненты этих решений имеют в сумме $2n$ всплесков на периоде. То есть, реализуются одновременно и явление мультистабильности (буферности) и явление пачечной активности (bursting-эффект).

Вторая важная особенность рассмотренной системы состоит в том, что (1) является самостоятельной феноменологической моделью для системы из двух синаптически связанных нейронов. Представленный подход позволяет рассматривать только релейную систему (1), которой придается некоторый биологический смысл. Это позволяет избежать трудоемкого доказательства теорем о соответствии, которые необходимо доказывать в случае, когда нелинейности в (1) непрерывные и параметр λ велик.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10055).

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ЧИСЛА ЗАЯВОК СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко

(Владивосток, ДВФУ)

prokopievad@yandex.ru, Tatyana_zhukdv@mail.ru, ygolovko@yahoo.com

Рассмотрим систему массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого λ изменяется на промежутке $[\alpha, \beta]$ и представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α, β.

Обозначим через $q_k(x)$, $k \geqslant 0$, совместное стационарное распределение числа заявок ν и интенсивности λ входного потока в стационарном режиме: $q_k(x) = \mathsf{P}\{\nu = k, x \leqslant \lambda < x + dx\}/dx$, через $g_n(x)$ — вспомогательные неизвестные функции, $n \in \mathbb{Z}$, $g_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} q_k(x), n \geqslant 0$, для значений $n < 0$ функции $g_n(x)$ являются произвольными.

В [1] приведена система дифференциальных уравнений относительно стационарных характеристик числа заявок $q_k(x), k \geqslant 0$. Для решения этой системы уравнений в [2] рассмотрена вспомогательная неоднородная система уравнений относительно неизвестных функций $g_n(x), n \in \mathbb{Z}, \ \Upsilon(x)$. Для решения которой введена производящая функция $F(x, z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x) z^n, \quad z \in \mathbb{C}$.

Однородная краевая задача относительно производящей функции $F(x, z)$ имеет вид:

$$F''_{xx}(x, z) - h(x - \frac{\mu}{z}) F(x, z) = 0, \tag{1}$$

где $h = \frac{2}{b}(1 - z)$.

Краевые условия: $\partial F(x_i, z)/\partial x = 0, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta$.

Фундаментальная система решений $Q_0(x,z)$, $Q_1(x,z)$ дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$Q_0(x,z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{2}{b}\right)^k (1-z)^k \left(x - \frac{\mu}{z}\right)^{3k},$$

$$Q_1(x,z) = x - \frac{\mu}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{2}{b}\right)^k (1-z)^k \left(x - \frac{\mu}{z}\right)^{3k+1},$$

$$a_k = \left(\prod_{p=1}^{k} (3p-1)\, 3p\right)^{-1}, \; b_k = \left(\prod_{p=1}^{k} (3p+1)\, 3p\right)^{-1}.$$

Общее решение однородного уравнения (1) имеет вид:

$$F_0\left(x,z\right) = c_0\left(z\right) Q_0\left(x,z\right) + c_1\left(z\right) Q_1\left(x,z\right),$$

где $c_0\left(z\right)$, $c_1\left(z\right)$ — произвольные аналитические функции, которые в дальнейшем будут найдены из краевых условий.

Литература

1. Прокопьева Д.Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Известия КГТУ. — 2017. — № 46. — С. 184–193.

2. Прокопьева Д.Б. Производящая функция числа заявок СМО с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции — Воронеж : Издательский дом ВГУ. — 2019. — С. 215–216.

ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ[1]

Л.С. Пулькина, В.А Киричек
(Самара, Самарский университет)
louise@samdiff.ru, Vitalya29@gmail.com

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + cu = f \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$l_1 u + \int\limits_0^l K_1 u dx = 0, \quad l_2 u + \int\limits_0^l K_2 u dx = 0. \tag{3}$$

Изучение нелокальных задач показало, что обоснование их разрешимости нельзя провести известными классическими методами, применимыми к исследованию начально-краевых задач. Причина этого кроется в свойствах операторов, порождаемых нелокальными задачами. К настоящему времени разработаны некоторые эффективные методы исследования нелокальных задач, например, метод вспомогательных задач [1], метод сведения нелокальной задачи к нагруженному уравнению [2], метод априорных оценок в пространствах Соболева [1]. Оказалось, что выбор метода во многом зависит от структуры нелокального условия, в частности, вида граничных операторов l_i. Доклад посвящен проблеме выбора метода исследования разрешимости нелокальной задачи и демонстрации применения его для доказательства существования и единственности нелокальной задачи с интегральными условиями (1)-(3), где $l_1 u = u(0,t)$, $l_2 u = u(l,t)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

Литература

1. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / Л.С. Пулькина. — Самара : Издательство «Самарский университет», 2012. — 194 с.

2. Кожанов А.И. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений / А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 9. — С. 1166–1179.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

К.А. Раецкий (Воронеж, ВГУ)
raetskiy@mail.ru

Рассматривается динамическая система

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t), \tag{1}$$

где B — матрица $n \times n$, D — матрица $m \times n$, $t \in [0, T]$.

Задача состоит в построении такой входной вектор-функции $u(t)$, что траектория $x(t)$ системы (1) с началом $x(0) = x_0$ приходит в момент $t = T$ в точку x_T, то есть $x(T) = x_T$. В случае существования такой вектор-функции $u(t)$, $\forall x_0$, $x_T \in R^n$, $\forall T > 0$, систему (1) называют полностью управляемой.

Для построения соответствующих $u(t)$ и $x(t)$ можно использовать скалярную гладкую функцию $\varphi(t)$, производные от которой до определенного порядка $2r-1$ являются линейно независимыми. Для нахождения компонент $u(t)$ получена алгебраическая линейная система, коэффициентами в которой являются матрицы D и $B^i D$, $i = 1, 2, \ldots$. Для доказательства существования решения этой системы векторные коэффициенты $u(t)$ расщеляются на элементы в подпространствах, что приводит к новой алгебраической системе с определителем Δ, первые r строк которого являются определителем Вронского для функций $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, , ..., $\varphi^{(2r-1)}(t)$ в точке $t = 0$, а следующие r строк — это строки определителя Вронского для тех же функций в точке $t = T$.

Теорема 1. *Если система* (1) *полностью управляема и* $\Delta \neq 0$, *то существуют* $u(t)$ *и* $x(t)$ *в виде линейных комбинаций функций* $\varphi^{(k)}(t)$, $k = 0,\, 1\, ...\, 2r-1$ *с векторными коэффициентами.*

Литература

1. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели / П.Д. Крутько. — М. : Наука, 1987. — 304 с.

2. Раецкий К.А. Об одном классе гладких функций / К.А. Раецкий // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции ВЗМШ (28 января-2 февраля 2019 г.) — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 218.

О СХОДИМОСТИ НАЧАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ АПЕРТУРЕ ИЗЛУЧАТЕЛЯ

А.М. Райцин (Москва, МТУСИ)
arcadiyram@rambler.ru

Важнейшими параметрами лазерного пучка является диаметр и его оптическая расходимость. В настоящее время измерение этих параметров производят в соответствии со стандартом [1], основой которого является определение начальных моментов $m_{k,l}\,(z)$, $k,l = 0,1,2$ пространственного распределения интенсивности (РИ) $I\,(x,y,z)$ в поперечном сечении лазерного пучка на расстоянии z $(z \geqslant 0)$ от источника излучения, определяемых выражениями [1-2]

$$m_{kl}\,(z) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^l I\,(x,y,z)\,dxdy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I\,(x,y,z)\,dxdy,}\;; k,l = 0{,}1{,}2, \qquad (1)$$

где

$$I\,(x,y,z) = U\,(x,y,z)\cdot U^*\,(x,y,z)\,,$$

$$U\,(x,y,z) = \int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-T/2}^{T/2} u\,(x_1,y_1,0)\,\psi\,(x,y,x_1,y_1,z)\,dx_1dy_1,$$

$$\psi\left(x,y,x_1,y_1,z\right)=\frac{\exp(i2\pi z/\lambda)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\left(\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2\right)\right)}{i\lambda z},$$

где T — линейный размер апертуры излучателя, которую считаем квадратной; λ — длина волны излучения; $u\left(x_1,y_1,0\right)$ — распределение комплексной амплитуды волны в плоскости излучателя, $*$ — знак комплексного сопряжения.

Необходимо отметить, что при измерениях $m_{kl}\left(z\right)$ $k,l=0,1,2$ в [1] предполагается $T\rightarrow\infty$, что для большинства существующих на практике РИ приводит к результатам, при которых несобственные интегралы (1) сходятся. Однако, данное условие является приближением, требующим уточнения.

В работе показано, что для конечных значений T, имеющих место на практике, необходимым условием сходимости интегралов m_{20}, m_{02},связанных с диаметром и оптической расходимостью лазерного пучка, распространяющегося вдоль оси z, является выполнение в плоскости излучателя равенств

$$I\left(T/2,y,0\right)=I\left(-T/2,y,0\right)=0,$$

$$I\left(x,T/2,0\right)=I\left(x,-T/2,0\right)=0$$

соответственно. т.е. РИ на границах промежутков интегрирования должно равняться нулю.

Данное обстоятельство требует корректировки существующей методики проведения измерений диаметра и расходимости лазерного пучка.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования высокоточных измерительных технологий в области фотоники (ckp.vniiofi.ru), созданного на базе ФГУП «ВНИИОФИ».

Литература

1. ГОСТ Р ИСО 11146–2008. Лазеры и лазерные установки (системы). Методы измерений ширин, углов расходимости и коэффициентов распространения лазерных пучков. Ч.1. — М. : Стандартинформ, 2010. — 20 с.

2. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику / Дж. Гудмен. — М. : Мир, 1970. — 364 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ[1]

Н.А. Раутиан (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
nrautian@mail.ru

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений на основе спектрального анализа их символов. В работе рассматриваются уравнения следующего вида

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A^2u(t) - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где A — самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\mu(\tau),$$

где $d\mu$ — положительная мера, которой соответствует возрастающая непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Получены представления сильных решений указанных уравнений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений (см. [1], [2]). Указанные представления являются новыми для данного класса интегро-дифференциальных уравнений.

Литература

1. Rautian N.A. Well-posedness and spectral analysis of Volterra integro-differential equations with singular kernels / N.A. Rautian, V.V. Vlasov // Doklady Mathematics. — 2018. — V. 98, № 2. — P. 502–505.

2. Rautian N.A. Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory / N.A. Rautian, V.V. Vlasov // Trans. Moscow Math. Soc. — 2014. — V. 75. — P. 185–204.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-6222.2018.1).

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕРЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)
RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ краевую задачу для пучка $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов 2-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y = 0, \tag{1}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \lambda\alpha_0 y(0) = 0, \quad \beta_1 y'(1) + \lambda\beta_0 y(1) = 0, \tag{2}$$

где $p_1, p_2, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{C}$.

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического многочлена пучка и пусть выполняется условие

$$0 < \omega_1 < \omega_2, \quad 2\omega_1 < \omega_2. \tag{3}$$

Положим $v_i = \alpha_1\omega_i + \alpha_0$, $w_i = \beta_1\omega_i + \beta_0$, $i = 1,2$, и обозначим для краткости $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = 1 - (1-x)/\tau$, $\beta_x = \tau x$, $\gamma_x = x + 1 - 1/\tau$, $\tilde\alpha_x = 1 - \tau(1-x)$, $\tilde\beta_x = x/\tau$, $\tilde\gamma_x = x - 1 + 1/\tau$, $e_1 := -v_1/v_2$, $e_2 = w_2/w_1$, $d_1 = -e_1 e_2$, $\theta = 1/(\omega_2 - \omega_1)$, $d_x = d/dx$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2\bigl(-v_2 w_1 e^{\lambda\omega_1} + v_1 w_2 e^{\lambda\omega_2}\bigr), \tag{4}$$

то есть пучок является сильно нерегулярным и, как известно [1], система собственных функций (с.ф.) этого пучка не является двукратно полной в $L_2[0,1]$.

Из (4) следует, что уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней $\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/(\omega_2 - \omega_1)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d_0 := \ln_0(-d_1)$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$). Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Из формул для с.з. следует, что в комплексной плоскости существуют кусочно круговые контуры Γ_ν, отстоящие от чисел λ_k на расстояние не меньше некоторого фиксированного числа $\delta > 0$ и между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k.

Линеаризуем задачу (1)–(2), положив $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций (в.-ф.) для $z = (z_0, z_1)^T$: $\hat{L}z = \lambda z$, где

$$\hat{L}z := \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2} d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2} d_x \end{array} \right) z,$$

$$D_{\hat{L}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \middle| z_0', z_1 \in L_1[0,1], \alpha_1 z_0'(0) + \alpha_0 z_1(0) = 0, \beta_1 z_0'(1) + \beta_0 z_1(1) \right\}.$$

Очевидно, с.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ (см. [2, с. 102]) совпадает с системой собственных в.-ф. оператора $\hat{L}$.

Хорошо известно, что $\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f \, d\lambda$, где $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda E)^{-1}$, есть частичная сумма разложений в.-ф. $f := (f_0, f_1)^T$ в биортогональный ряд Фурье по собственным в.-ф. оператора $\hat{L}$, соответствующим с.з., которые попали внутрь контура Γ_ν. Пусть $\big(\hat{L} - \lambda E\big)^{-1} f = \big(z_0(x, \lambda; f), z_1(x, \lambda; f)\big)^T$ и $I_{i\nu} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} z_i(x, \lambda; f) \, d\lambda$, $i = 0, 1$.

Пусть $F_1(x) := \int_0^x f_1(t) \, dt$. Обозначим

$$H_1(x, F_1) := -2F_1(x) + e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + d_1 F_1(\gamma_x) - \\ - \frac{1}{e_2} F_1(\tilde{\alpha}_x) + \frac{1}{e_1} F_1(\tilde{\beta}_x) + \frac{1}{d_1} F_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_2(x, f_0) := 2\omega_1 f_0(x) - e_2 \omega_2 f_0(\alpha_x) + e_1 \omega_1 f_0(\beta_x) - d_1 \omega_2 f_0(\gamma_x) + \\ + \frac{\omega_1}{e_2} f_0(\tilde{\alpha}_x) - \frac{\omega_2}{e_1} f_0(\tilde{\beta}_x) - \frac{\omega_2}{d_1} f_0(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_3(x, f_1) := -\frac{2}{\omega_1} f_1(x) + \frac{e_2}{\omega_2} f_1(\alpha_x) - \frac{e_1}{\omega_1} f_1(\beta_x) + \frac{d_1}{\omega_2} f_1(\gamma_x) - \\ - \frac{1}{\omega_1 e_2} f_1(\tilde{\alpha}_x) + \frac{1}{\omega_2 e_1} f_1(\tilde{\beta}_x) - \frac{1}{\omega_2 d_1} f_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_4(x, f_0') := 2f_0'(x) - e_2 f_0'(\alpha_x) + e_1 f_0'(\beta_x) - d_1 f_0'(\gamma_x) + \\ + \frac{1}{e_2} f_0'(\tilde{\alpha}_x) - \frac{1}{e_1} f_0'(\tilde{\beta}_x) - \frac{1}{d_1} f_0'(\tilde{\gamma}_x).$$

Теорема 1. *Если* $f_0'', f_1' \in L_p[0,1]$, $p > 1$, *выполняются условия (3) и* $f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = F(1) = 0$, *то*

$$I_{0\nu}(f) = f_0(x) + p_2\theta H_1(x, F_1) + \theta H_2(x, f_0) + o(1) \text{ при } \nu \to \infty, \quad (5)$$

$$I_{1\nu}(f) = f_1(x) + p_2\theta H_3(x, f_1) + \theta H_4(x, f_0') + o(1) \text{ при } \nu \to \infty, \quad (6)$$

где $o(1) \rightrightarrows 0$ *по* $x \in [0,1]$. *Считаем, что функции в выражениях справа в (5)–(6) продолжены нулями, если их аргументы выходят за отрезок* $[0,1]$.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Для того, чтобы имели место формулы*

$$I_{0\nu}(f) = f_0(x) + o(1), \qquad I_{1\nu}(f) = f_1(x) + o(1)$$

при $\nu \to \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* f_0, f_1 *удовлетворяли системе уравнений:*

$$\begin{cases} p_2 H_1(x, F_1) + \theta H_2(x, f_0) = 0, \\ p_2 H_3(x, f_1) + \theta H_2(x, f_0') = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Рыхлов В.С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка / В.С.Рыхлов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, Вып. 1, Ч. 1. — С. 21–26.

2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

ПРЯМАЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

К.Б. Сабитов (Стерлитамак, Стерлитамакский филиал БашГУ, Стерлитамакский филиал ИСИ РБ)
sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа со степенным вырождением

$$Lu \equiv (sign\, y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} = F(x,y) = \begin{cases} f_1(x)g_1(y), & y > 0, \\ f_2(x)g_2(y), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,y)|\, 0 < x < l,\, -\alpha < y < \beta\},$$

где n, l, α и β — заданные положительные числа.

Предлагается изучить следующие задачи.

Задача 1 (Дирихле). *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где $F(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,y)$ и $f_1(x)$, удовлетворяющие условиям* (2)–(5) *и*

$$u_y(x,\beta) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

где $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ — известные функции.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020516).

Задача 3. *Найти функции $u(x,y)$ и $f_2(x)$, удовлетворяющие условиям* (2)–(5) *и*

$$u_y(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

где $f_1(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ — известные функции.

Задача 4. *Найти функции $u(x,y)$ и $f_i(x)$, $i = 1,2$, удовлетворяющие условиям* (2)- (7), *где $g_1(y)$, $g_2(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ — известные функции.*

Задача 5. *Найти функции $u(x,y)$ и $g_1(y)$, удовлетворяющие условиям* (2)–(5) *и*

$$u(x_0,y) = h_1(y), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leqslant y \leqslant \beta, \tag{8}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_2(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h_1(y)$ — известные функции.

Задача 6. *Найти функции $u(x,y)$ и $g_2(y)$, удовлетворяющие условиям* (2)–(5) *и*

$$u(x_0,y) = h_2(y), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant 0, \tag{9}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h_2(y)$ — известные функции.

Задача 7. *Найти функции $u(x,y)$ и $g_i(y)$, $i = 1,2$, удовлетворяющие условиям* (2)–(5), (8), (9), *где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h_1(y)$, $h_2(y)$ — известные функции.*

Отметим, что задача 1 является прямой и она для уравнения (1) при $F(x,y) \equiv 0$ изучена в работе [1]. В статьях [2, 3] исследована обратная задача для уравнения (1) при $n = 0$, т.е. для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе, по отысканию функций $u(x,y)$ и $f_1(x) = f_2(x)$, а в работах [4, 5] изучена такая же обратная задача с нелокальным граничным условием, т.е. вместо граничных условий (4) были заданы следующие условия:

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \quad u_x(0,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{10}$$

в связи разработки метода спектральных разложений к решению краевых задач для уравнений смешанного типа с разными граничными условиями. А в работе [6] изучена обратная задача (2), (3), (5)–(7), (10) для уравнения (1) при $n = 0$. Во всех этих работах установлен критерий единственности решения поставленных задач и решения построены в виде суммы рядов по системе корневых функций соответствующих одномерных спектральных задач.

В данном докладе приводятся результаты по исследованию задач 1 и 4, т.е. рассматривается уравнение смешанного типа (1) со степенным вырождением на переходной линии, которое имеет важные приложения в газовой динамике в теории околозвуковых течений жидкостей и газов. Отметим также, что задачи оптимизации и связанные с ним обратные задачи, например, задача оптимизации сопла Лаваля являются предметом многочисленных исследований. Здесь также установлен критерий единственности решения задачи 1 и 4 при всех $n > 0$. Решение которых построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. Дано обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений (2) уравнения (1). При обосновании сходимости возникает проблема малых знаменателей более сложной структуры, чем в ранее известных работах Арнольда В.И.

Исследования остальных задач предстоит в будущем.

Литература

1. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области / К.Б. Сабитов // ДАН. — 2007. — Т. 413, №. 1. — С. 23–26.

2. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью / К.Б. Сабитов, И.А. Хаджи // Изв. вузов. Матем. — 2011. — № 5. — С. 44–52.

3. Хаджи И.А. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе / И.А. Хаджи // Матем. заметки. — 2012. — Т. 91, Вып. 6. — С. 908–919.

4. Сабитов К.Б. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа / К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Изв. вузов. Матем. — 2011. — № 2. — С. 71–85.

5. Сабитов К.Б. Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием / К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Сибирский матем. журнал. — 2012. — Т. 53, № 3. — С. 633–647.

6. Сабитов К.Б. Нелокальная обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Доклады АМАН. — 2013. — Т. 15, № 2. — С. 73–86.

ПЕРВАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА[1]

Ю.К. Сабитова (Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета)
sabitovauk@rambler.ru

Для уравнения эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} + (sgn\, y)\,|y|^n u_{yy} + a|y|^{n-1} u_y - b^2 u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\ 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < a < 1$, $0 < n < a + 1$ — заданные действительные числа, исследована следующая граничная задача.

Задача Дирихле. *Найти функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x, y) \in C^2(D_+ \cup D_-) \cap C(\overline{D}); \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^a u_y(x, y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^a u_y(x, y); \tag{3}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = f(x), \;\; u(x, -\alpha) = g(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

$$u(0, y) = 0, \; u(0, y) = u(l, y), \;\; -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{6}$$

где $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $f(x)$ *и* $g(x)$ *— заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям* $f(0) = f(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$.

В данной работе, опираясь на исследования [1], установлен критерий единственности решения задачи (2)–(6) методом спектрального анализа и доказана теорема существования решения. Решение построено в виде суммы ряда. При обосновании сходимости построенного ряда возникает проблема малых знаменателей.

Литература

1. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, А.Х. Сулейманова // Известия вузов. Матем. — 2007. — № 4. — С. 45–53.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00111).

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ИНДЕКСОВ МОРСА ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛА ДИРИХЛЕ

Т.Ю. Сапронова, С.Л. Царев (Воронеж, ВГУ)
tsapr@mail.ru

Рассматривается «двумерный» функционал Дирихле

$$V(f) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{K}} \int \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,s) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial s}(t,s) \right|^2 \right) dt ds$$

на банаховой группе Ли $\mathcal{M}$ «сингулярных сфероидов»

$$\{f \in C^{2+\gamma}(\mathcal{K}, SO(3)), \quad f(\partial \mathcal{K}) = I\}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

где $\mathcal{K}$ — кольцо в $\mathbf{R}^2$ с центром в начале координат, ограниченное окружностями радиусов r_1 и r_2, $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2 < \infty$ [1].

Функционал Дирихле является фредгольмовым на $\mathcal{M}$ и инвариантным относительно действия группы $G = SO(3)$ на $\mathcal{M}$, заданного формулой $\mathcal{T}_g(f) = g^{-1} f g$.

Перейдем к полярным координатам, совершив замену $t = r\cos\varphi$, $s = r\sin\varphi$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, и положив $\bar{f}(r,\varphi) = f(t,s)$. В новых координатах функционал V выглядит следующим образом:

$$\bar{V}(\bar{f}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(r \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r,\varphi) \right|^2 + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi) \right|^2 \right) dr.$$

Условие на границе примет вид $\bar{f}(r_1,\varphi) = \bar{f}(r_2,\varphi) = I \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$.

Первый кодифференциал функционала $\bar{V}$ имеет вид

$$\nabla^1 \bar{V}(\bar{f}) = -\bar{f} \left(r \frac{\partial \Omega_r}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_\varphi}{\partial \varphi}(r,\varphi) + \Omega_r \right),$$

где $\Omega_r = \bar{f}^{-1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}$, $\Omega_\varphi = \bar{f}^{-1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}$.

Вычисление экстремалей функционала $\bar{V}$ сводится к поиску решений уравнения

$$\nabla^1 \bar{V}(\bar{f}) = 0. \tag{1}$$

Далее, используя двулистное накрытие $P : S^3 \longrightarrow SO(3)$, являющееся локальным диффеоморфизмом (см. [1], [2]), переходим к изучению функционала

$$\bar{U}(\bar{g}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(r \left| \frac{\partial \bar{g}}{\partial r}(r,\varphi) \right|^2 + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varphi}(r,\varphi) \right|^2 \right) dr, \qquad (2)$$

где $\bar{g}(r,\varphi) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad g \in \mathcal{L}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2,$

$$\mathcal{L} = \{g \in C^{2+\gamma}(\mathcal{K}, S^3), \quad f(\partial\mathcal{K}) = \{\pm e_0\}\}.$$

Функционалы $\bar{U}$ и $\bar{V}$ связаны соотношением

$$\bar{U}(\bar{g}) = \frac{1}{4}\bar{V}(\hat{P}(\bar{g})),$$

где $\hat{P} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ — гладкое субмерсивное отображение, порожденное двулистным накрытием $P : S^3 \longrightarrow SO(3)$.

Каждой экстремали $\bar{g}$ функционала $\bar{U}$ соответствует экстремаль $\hat{P}(\bar{g})$ функционала $\bar{V}$, поэтому от исследования уравнения (1) можно перейти к поиску решений уравнения $\nabla^1\bar{U}(\bar{g}) = 0$. Первый кодифференциал сохраняет свой вид:

$$\nabla^1\bar{U}(\bar{g}) = -\bar{g}\left(r\frac{\partial\hat{\Omega}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\Omega}_\varphi}{\partial\varphi} + \hat{\Omega}_r \right),$$

где $\hat{\Omega}_r = (\bar{g})^{-1}\frac{\partial\bar{g}}{\partial r}, \ \ \hat{\Omega}_\varphi = (\bar{g})^{-1}\frac{\partial\bar{g}}{\partial\varphi}$.

Ограничимся рассмотрением экстремалей вида

$$x(\alpha)(r,\varphi) = \cos\alpha(r)e_0 + \cos\varphi\sin\alpha(r)e_1 + \sin\varphi\sin\alpha(r)e_2, \qquad (3)$$

где $\alpha \in C^{2+\gamma}([r_1, r_2], \mathbf{R}), \ \alpha(r_1) = \pi m, \ \alpha(r_2) = \pi n, \quad m, n \in \mathbf{Z}.$

Поиск экстремалей при $\bar{g} = x$ сводится к поиску решений интегрируемого уравнения

$$\alpha' + r\alpha'' - \frac{1}{r}\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Каждое решение (с учетом краевых условий) после подстановки в (3) дает экстремаль $\hat{x}_{m,n}$ функционала $\bar{U}$, а следовательно, и критическую орбиту $\{S^{-1}\hat{P}(\hat{x}_{m,n})S, \ S \in SO(3)\}$ для функционала $\bar{V}$.

Теорема. *Пусть* α_0 — *критическая точка функционала* W, *заданного на множестве*

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in C^{2+\gamma}([r_1, r_2], \mathbf{R}): \ \alpha(r_1) = 2\pi m, \ \alpha(r_2) = 2\pi n, \ m, n \in \mathbf{Z}\}$$

соотношением $W(\alpha) = \bar{U}(x(\alpha))$, *где* $\bar{U}$ *и* $x(\alpha)$ *определены формулами (2) и (3). Тогда точка* $x(\alpha_0)$ *является критической для функционала* $\bar{U}$ *и имеет место оценка*

$$Ind(\bar{U}, x(\alpha_0)) \geqslant Ind(W, \alpha_0).$$

Литература

1. Сапронова Т.Ю. Функционал Дирихле на группе двумерных сфероидов в SO(3) / Т.Ю. Сапронова // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2014. — С. 158–160.

2. Дубровин Б.А. Современная геометрия: методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. — М. : Наука, 1986. — 760 с.

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО СПЕКТРА СИГНАЛА ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ[1]

А.В. Седов, Е.В. Тришечкин (Ростов на Дону, ЮНЦ РАН, Новочеркасск, ЮРГПУ(НПИ))
Sedov07@list.ru

Рассматривается метод ускоренной повторной оценки комплексного спектра сигнала в случае изменения частоты следования отсчетов. В отличие от известного подхода, использующего формулу связи спектров непрерывного и дискретного сигналов предлагаемый метод не требует аналитических выражений для описания спектра непрерывного сигнала, не содержит неопределенностей, связанных с учетом бесконечного числа слагаемых и легко алгоритмизируется в случае программной реализации в микропроцессорных системах контроля, мониторинга и управления. Данный подход

[1] Работа выполнена в рамках реализации госзадания Южного научного центра РАН, проект 01201354242 при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-01012).

важен при регистрации волновых и резонансных изменений механических и физических полей при решении задач: неразрушающей дефектоскопии, выявлении статических напряжений, оперативной оценки рабочего состояния конструкций, механизмов и устройств. Данный метод может рассматриваться, как основа для построения алгоритмов оценки адекватности выбора частоты дискретизации по характеристикам регистрируемого сигнала в задачах регистрации волновых и резонансных изменений механических и физических полей.

Литература

1. Седов А.В. Моделирование объектов с дискретно-распределен-ными параметрами: декомпозиционный подход / А.В. Седов. — М. : Наука. — 2010. — 438 с.

2. Sedov A.V. The concept and the principle of the diagnostic observability of the object in problems of monitoring and non-destructive testing / A.V. Sedov // IOP : Materials Science and Engineering. — 2017. — Vol. 177, № 012034. —Pp. 1–8.

3. Bocharova O.V. On a defect identification method based on monitoring the structure and peculiarities of surface wave fields / O.V. Bocharova, A.V. Sedov, I.E. Andzhikovich, V.V. Kalinchuk // Russian Journal of Nondestructive Testing. — 2016. — Vol. 52, № 7. — Pp. 377—382.

4. Sedov A.V. Adaptive-spectral method of monitoring and diagnostic observability of static stresses of elements of mechanical constructions / A.V. Sedov, V.V. Kalinchuk, O.V. Bocharova // IOP Conference Series-Earth and Environmental Science. — 2017. — Vol. 87, № 082043. — Pp. 1–7.

5. Sedov A.V. The Fast Interpolation Transformation and the Sampling Theorem on the Basis of Bordering Functions for Recording the Wave Signals of Mechanical and Other Physical Fields / A.V. Sedov // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines : 12th International Scientific and Technical Conference. — IEEE Xplore, 2018. — № 8601483. — Pp. 1–8.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ[1]

А.А. Семенов (Санкт-Петербург, СПбГАСУ)
sw.semenov@gmail.com

С развитием вычислительной техники появился новый метод исследования естественнонаучных проблем — вычислительный эксперимент. В настоящие время он является главным методом, позволяющим проводить исследования сложных процессов и явлений. К таким процессам следует отнести деформирование тонкостенных конструкций, и, в частности, оболочек. В силу своей тонкостенности, под действием различных нагрузок они могут терять устойчивость, подвергаться выпучиванию и образованию вмятин [1].

Исследование оболочечных конструкций с учетом всех необходимых факторов представляет собой существенно нелинейную задачу, требующую применения серьезного математического аппарата и достаточной вычислительной мощности.

Автором предлагается подход к решению таких задач, основанный на следующих численных методах:

- для решения задач прочности и устойчивости при статическом нагружении: метод Ритца, метод продолжения решения по наилучшему параметру, метод Эйлера;

- для решения задач прочности, устойчивости и нелинейных колебаний при динамическом нагружении: метод Канторовича, метод Розенброка.

Программная реализация в данном случае наиболее оптимально может быть осуществлена в среде аналитических вычислений Maple, поскольку требуются достаточно объемные символьные вычисления.

Литература

1. Gavryushin S.S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures / S.S. Gavryushin, A.S. Nikolaeva // Mechanics of Solids. — 2016. — Vol. 51, № 3. — Pp. 339–348.

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект № 18-19-00474.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ [1]

Т.Ю. Семенова (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
station@list.ru

Рассмотрим интеграл $\mathcal{F}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (P(x,t))^{-\alpha}\, dx$, где многочлен $P(x,t) = \sum\limits_{w \in S} c_w x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n} t^{w_{n+1}}$, $c_w > 0$, $S \subset \mathbb{Z}^{n+1}_+$, $\alpha > 0$. Интегралы такого вида можно получить, используя представление Ли–Померанского для интегралов Фейнмана, а исследование их асимптотического поведения при $t \to 0+$ имеет значительный практический интерес (см. [1]).

Пусть многогранник Ньютона $\mathcal{N}_P$ многочлена $P(x,t)$ — выпуклая оболочка S в $\mathbb{R}^{n+1}$ — содержит только одну грань γ максимальной размерности n, для которой вектор нормали, ориентированный внутрь многогранника, имеет положительную последнюю компоненту. И пусть уравнение этой грани имеет вид $w_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i w_i + b$. Ввведём обозначения: $\overline{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_w = w_{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i w_i - b > 0 \;\mid\; w \in S \setminus \gamma\right\}$, $\overline{p} = \{p_w \in \mathbb{Z}_+ \mid w \in S \setminus \gamma\}$, $[\overline{p}] = \sum p_w$, $\overline{p} \cdot \overline{\varepsilon} = \sum p_w \cdot \varepsilon_w$, $\overline{p} \cdot \overline{w_i} = \sum p_w \cdot w_i$. Также обозначим функции $\lambda(x) = \sum\limits_{\gamma} c_w x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n}$, $\varphi_{\overline{p}}(x) = \binom{-\alpha}{[\overline{p}]} \left(\prod\limits_{S \setminus \gamma} c_w^{p_w} \right) \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\overline{p} \cdot \overline{w_i}} \cdot \big(\lambda(x)\big)^{-[\overline{p}] - \alpha}$.

Теорема. *Интеграл $\mathcal{F}(t)$ сходится тогда и только тогда, когда $(\frac{1}{\alpha}, \dots, \frac{1}{\alpha}) \in \mathbb{R}^n$ принадлежит внутренности проекции грани γ на плоскость $w_{n+1} = 0$. В этом случае*

$$\mathcal{F}(t) \sim \sum_{\overline{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \varphi_{\overline{p}}(x) dx \right) \cdot t^{\overline{p} \cdot \overline{\varepsilon} - b\alpha - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i}.$$

Литература

1. Semenova T.Yu. On the status of expansion by regions / T.Yu. Semenova, A.V. Smirnov, V.A. Smirnov // European Physical Journal C : Springer Verlag (Germany). — 2019. — T. 79. — C. 136–147.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-02-00175 А).

ПРИМЕНЕНИЕ B-СПЛАЙНА В МЕТОДЕ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ МОД ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА НА ВНУТРЕННИЕ КОЛЕБАНИЯ

Г.Н. Сергазы (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
gsergazy@cs.msu.ru

Декомпозиция на эмпирические моды (EMD) является методом анализа данных нелинейных и нестационарных процессов. Данный метод уникален тем, что не нуждается в априори заданных базисных функций. Базисные функций, которыми являются эмпирические моды, получаются из исходного сигнала итерационным алгоритмом, называемый просеиванием (sifting process). Первоначально EMD был представлен как метод анализа одномерных временных рядов. Метод позволил извлекать осциллирующие компоненты сигнала с нулевыми средними.

Целью данной работы являлось обобщение метода EMD на случай двумерного временного ряда и получить аналог алгоритма просеивания. Предлагается следующий алгоритм:

1. рассмотреть каждую компоненту двумерного временного ряда как одномерный временной ряд и применить метод просеивания по отношению каждому из них;

2. заменить среднюю линию верхних и нижних огибающих, используемых в оригинальном методе EMD, на аппроксимацию B-сплайнами с коэффициентами, которые являются линейными комбинациями локальных экстремумов сигнала;

3. проверить является ли разность исходного сигнала и двумерного ряда, компоненты которого являются B-сплайн аппроксимациями, эмпирической модой, и в обратном случае повторить предыдущие шаги к разности;

4. после извлечения эмпирической моды, повторить предыдущие шаги к разности сигнала и эмпирической моды.

Результатом такого алгоритма является множество, состоящее из траекторий быстрых вращений вокруг нуля (эмпирические моды) и остатка

О НАХОЖДЕНИИ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА[1]

Е.В. Серегина*, **В.В. Калманович****,
М.А. Степович*** (*Москва–Калуга, МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Калужский филиал, **, ***Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)
**evfs@yandex.ru*, ***v572264@yandex.ru*, ****m.stepovich@rambler.ru*

С использованием проекционного метода наименьших квадратов [1] найдены моментные функции первого и второго порядка решения стохастического уравнения теплопроводности в полупроводниковом материале, облучённом пучком электронов. Моментные функции решения уравнения теплопроводности (математическое ожидание и автокорреляционная функция температуры) получены в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра–Якоби при условии, что коэффициент теплопроводности является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Установлено, что данный подход можно распространить на любую корректную краевую задачу для любого линейного дифференциального уравнения в частных производных и его применение не ограничивается гипотезой о нормальности закона распределения коэффициентов уравнения.

Литература

1. Серегина Е.В. О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале / Е.В. Серегина, М.А. Степович, А.М. Макаренков // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2013. — № 11. — С. 65–69.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ, ПРИВОДЯЩЕЙ К СИСТЕМЕ С ПОСТОЯННЫМ И ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ[1]

А.Н. Сесекин, А.С. Шляхов
(Екатеринбург, УрФУ, ИММ УрО РАН)
sesekin@list.ru

В работе рассматривается обобщение классической модели продаж инновационных продуктов Видала-Вульфа [1]. Отличительной чертой новой модели является то, что в модель добавляются новые слагаемые, характеризующие эффект запаздывания при приобретении нового товара. Предлагаемая модель содержит в своей структуре два вида запаздывания: постоянное — техническое запаздывание, которое возникает из-за естественных причин, например, продиктованных рынком; линейное — запаздывание вызванное разной скоростью реакции принятия решения различными потребителями. Построенная модель описывается системой дифференциальных уравнений, правая часть которых содержит постоянное и линейное запаздывания. Кроме того управляющее воздействие допускает импульсные составляющие.

Для нелинейной системы дифференциальных уравнений, содержащей постоянное и линейное запаздывания, а также импульсное управление, приведена формализация понятия решения, доказана теорема существования формализованного решения и приведено интегральное уравнение, описывающее формализованное решение. Этот результат обобщает теорему существования и единственности решения из [2].

Литература

1. Дыхта В.А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В.А. Дыхта, О.Н. Самсонюк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 256 с.

2. Sesekin A.N. Functional Differential Equations in the Space of Functions of Bounded Variation / A.N. Sesekin, Yu.V. Fetisova // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. — 2010. — Suppl. 2. — P. 258–265.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371).

О СВОЙСТВАХ ПРЕОБРАЗОВАННОГО ДВОЙНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Б.В. Симонов, И.Э. Симонова, Т.М. Вуколова
(Волгоград, ВолгГТУ; Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
simonov-b2002@yandex.ru, simonova-vstu@mail.ru,
tmvukolova@mail.ru

Через L_p, $1 < p \leqslant \infty$, обозначается множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, $2\pi-$периодических по каждому переменному, для которых $||f||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x_1,x_2)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, L_p^0 — множество функций $f \in L_p$, таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$ для почти всех x_2.

Определения смешанного модуля гладкости порядков β_1, β_2, $(\beta_1 > 0, \beta_2 > 0)$ $\omega_{\beta_1,\beta_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$ см. в [1], преобразованного ряда $\sigma(f, \lambda, \rho_1, \rho_2)$ см. в [2,3], классов $\mathcal{QM}, \mathcal{L}$ см. в [3].

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2)$ будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \ll G(f, \delta_1, \delta_2)$, если существует положительная константа C, не зависящая от f, δ_1 и δ_2 и такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \leqslant CG(f, \delta_1, \delta_2)$. Если одновременно
$F(f, \delta_1, \delta_2) \ll G(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2) \ll F(f, \delta_1, \delta_2)$, то будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \asymp G(f, \delta_1, \delta_2)$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty, 0 < \theta \leqslant \min(2,p), \max(2,p) \leqslant \leqslant \tau < \infty$, $\beta_i, r_i > 0$, $\lambda = \{\lambda_{n_1,n_2}\}-$ *последовательность положительных чисел такая, что для любых* n_1, n_2 *выполнены условия:*
$\Delta_{1,0}\lambda_{n_1,n_2} = \lambda_{n_1+1,n_2} - \lambda_{n_1,n_2} \geqslant 0, \Delta_{0,1}\lambda_{n_1,n_2} = \lambda_{n_1,n_2+1} - -\lambda_{n_1,n_2} \geqslant 0, \Delta_{1,1}\lambda_{n_1,n_2} = \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0}\lambda_{n_1,n_2}) \geqslant 0$, $\Delta_{1,0}\big(\frac{\lambda_{n_1,n_2}}{n_1^{r_1}}\big) \leqslant 0$, $\Delta_{0,1}\big(\frac{\lambda_{n_1,n_2}}{n_2^{r_2}}\big) \leqslant 0, \Delta_{1,1}\big(\frac{\lambda_{n_1,n_2}}{n_1^{r_1} n_2^{r_2}}\big) \geqslant 0$.

I. Если для функции $f \in L_p^0$ *сумма* $J(f, \lambda, r_1+\beta_1, r_2+\beta_2, \theta, p) =$

$$= \Big(\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty} |\Delta_{1,1}(\lambda^{\theta}_{\nu_1,\nu_2})| \omega^{\theta}_{r_1+\beta_1, r_2+\beta_2}(f, \tfrac{1}{\nu_1}, \tfrac{1}{\nu_2})_p +$$
$$+ \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \big|\Delta_{1,0}(\lambda^{\theta}_{\nu_1,1})\big| \omega^{\theta}_{r_1+\beta_1,0}(f, \tfrac{1}{\nu_1})_p +$$
$$+ \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \big|\Delta_{0,1}(\lambda^{\theta}_{1,\nu_2})\big| \omega^{\theta}_{0,r_2+\beta_2}(f, \tfrac{1}{\nu_2})_p\Big)^{\frac{1}{\theta}} + \lambda_{1,1}\|f\|_p < \infty,$$

то существует функция $f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)} \in L_p^0$ *с рядом Фурье* $\sigma(f,\lambda,\rho_1,\rho_2)$, *причем* $\|f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)}\|_p \ll J(f,\lambda,r_1+\beta_1,r_2+\beta_2,\theta,p)$ *и для любых* n_1,n_2 *справедливо неравенство* $\omega_{\beta_1,\beta_2}\Big(f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)},\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\Big)_p \ll$

$$\ll \Sigma(f,n_1,n_2,\lambda,r_1,r_2,\beta_1,\beta_2,\theta,p)=\Big\{\Pi_{i=1}^2 n_i^{-\beta_i\theta}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\sum_{\nu_2=1}^{n_2}\Pi_{i=1}^2\nu_i^{(\beta_i+r_i)\theta}\big|\Delta_{1,1}\big(\tfrac{\lambda^\theta_{\nu_1,\nu_2}}{\nu_1^{r_1\theta}\nu_2^{r_2\theta}}\big)\big|\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{\nu_1},\tfrac{1}{\nu_2})_p+$$
$$+\frac{1}{n_1^{\beta_1\theta}}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\nu_1^{(\beta_1+r_1)\theta}\Big|\Delta_{1,1}\Big(\frac{\lambda^\theta_{\nu_1,\nu_2}}{\nu_1^{r_1\theta}}\Big)\Big|\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{\nu_1},\tfrac{1}{\nu_2})_p+$$
$$+\frac{1}{n_1^{\beta_1\theta}}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\nu_1^{(\beta_1+r_1)\theta}\Big|\Delta_{1,0}\Big(\frac{\lambda^\theta_{\nu_1,n_2+1}}{\nu_1^{r_1\theta}}\Big)\Big|\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{\nu_1},\tfrac{1}{n_2})_p+$$
$$+\frac{1}{n_2^{\beta_2\theta}}\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{n_2}\nu_2^{(\beta_2+r_2)\theta}\Big|\Delta_{1,1}\Big(\frac{\lambda^\theta_{\nu_1,\nu_2}}{\nu_2^{r_2\theta}}\Big)\Big|\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{\nu_1},\tfrac{1}{\nu_2})_p+$$
$$+\frac{1}{n_2^{\beta_2\theta}}\sum_{\nu_2=1}^{n_2}\nu_2^{(\beta_2+r_2)\theta}\Big|\Delta_{0,1}\Big(\frac{\lambda^\theta_{n_1+1,\nu_2}}{\nu_2^{r_2\theta}}\Big)\Big|\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{n_1},\tfrac{1}{\nu_2})_p+$$
$$+\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\big|\Delta_{1,1}(\lambda^\theta_{\nu_1,\nu_2})\big|\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{\nu_1},\tfrac{1}{\nu_2})_p+$$
$$+\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\big|\Delta_{1,0}(\lambda^\theta_{\nu_1,n_2+1})\big|\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{\nu_1},\tfrac{1}{n_2+1})_p+$$
$$+\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\big|\Delta_{0,1}(\lambda^\theta_{n_1+1,\nu_2})\big|\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{n_1+1},\tfrac{1}{\nu_2})_p+$$
$$+\lambda^\theta_{n_1+1,n_2+1}\omega^\theta_{\beta_1+r_1,\beta_2+r_2}(f,\tfrac{1}{n_1+1},\tfrac{1}{n_2+1})_p\Big\}^{\frac{1}{\theta}},$$

II. Если для функции $f\in L_p^0$ *существует функция* $f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)}\in L_p^0$ *с рядом Фурье* $\sigma(f,\lambda,\rho_1,\rho_2)$, *то* $J(f,\lambda,r_1+\beta_1,r_2+\beta_2,\tau,p)\ll$ $\ll\|f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)}\|_p$ *и для любых* n_1,n_2 *справедливо неравенство*
$$\Sigma(f,n_1,n_2,\lambda,r_1,r_2,\beta_1,\beta_2,\tau,p)\ll\omega_{\beta_1,\beta_2}\Big(f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)},\tfrac{1}{n_1+1},\tfrac{1}{n_2+1}\Big)_p.$$

Теорема 2. *Если функция* $f(x_1,x_2)\in\mathcal{QM}$, *то утверждения теоремы 1 справедливы при замене условий* $0<\theta\leqslant\min(2,p)$ *и* $\max(2,p)\leqslant\tau<\infty$ *на условия* $0<\theta\leqslant p$ *и* $p\leqslant\tau<\infty$.

Теорема 3. *Если функция* $f(x_1,x_2)\in\mathcal{L}$, *то утверждения теоремы 1 справедливы при замене условий* $0<\theta\leqslant\min(2,p)$ *и* $\max(2,p)\leqslant\tau<\infty$ *на условия* $0<\theta\leqslant 2$ *и* $2\leqslant\tau<\infty$.

Следствие. *Пусть* $1<p<\infty,\beta_i,r_i>0(i=1,2)$, $\lambda=\{\lambda_{n_1,n_2}\}$– *последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы 1.*

A. Если $f\in L_2^0$, *то для существования функции* $f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)}\in L_2^0$ *с рядом Фурье* $\sigma(f,\lambda,\rho_1,\rho_2)$, *необходимо и доста-*

точно, чтобы $J(f,\lambda,r_1+\beta_1,r_2+\beta_2,2,2)<\infty$, *причем*
$\omega_{\beta_1,\beta_2}\left(f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)},\frac{1}{n_1+1},\frac{1}{n_2+1}\right)_2 \asymp \Sigma(f,n_1,n_2,\lambda,r_1,r_2,\beta_1,\beta_2,2,2)$.

B. Если $f\in\mathcal{QM}$, *то для существования функции* $f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)}\in L_p^0$ *с рядом Фурье* $\sigma(f,\lambda,\rho_1,\rho_2)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $J(f,\lambda,r_1+\beta_1,r_2+\beta_2,p,p)<\infty$, *причем*
$\omega_{\beta_1,\beta_2}\left(\varphi,\frac{1}{n_1+1},\frac{1}{n_2+1}\right)_p \asymp \Sigma(f,n_1,n_2,\lambda,r_1,r_2,\beta_1,\beta_2,p,p)$.

C. Если $f\in\mathcal{L}$, *то для существования функции* $f^{(\lambda,\rho_1,\rho_2)}\in L_p^0$ *с рядом Фурье* $\sigma(f,\lambda,\rho_1,\rho_2)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $J(f,\lambda,r_1+\beta_1,r_2+\beta_2,2,p)<\infty$, *причем*
$\omega_{\beta_1,\beta_2}\left(\varphi,\frac{1}{n_1+1},\frac{1}{n_2+1}\right)_p \asymp \Sigma(f,n_1,n_2,\lambda,r_1,r_2,\beta_1,\beta_2,2,p)$.

Пусть $\lambda_{n_1,n_2}=n_1^{\mu_1}n_2^{\mu_2}, r_1,r_2,\alpha_1,\alpha_2$ – некоторые положительные числа.

Если 1) $\mu_1=r_1,\mu_2=r_2$, 2) $\mu_1=r_1+\alpha_1,\mu_2=r_2+\alpha_2$, то из теоремы 1 получаем оценки смешанного модуля гладкости порядков β_1,β_2 смешанной производной $f^{(\mu_1,\mu_2)}$, полученные в [3].

Если 3) $\mu_1=r_1,\mu_2=r_2+\alpha_2$, 4) $\mu_1=r_1+\alpha_1,\mu_2=\alpha_2$, то из теоремы 1 получаем оценки смешанного модуля гладкости порядков β_1,β_2 смешанной производной $f^{(\mu_1,\mu_2)}$, полученные в [4].

Литература

1. Потапов М.К. Дробные модули гладкости / М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов. — М. : МАКС Пресс, 2016. — 340 с.

2. Симонова И.Э. Об оценках смешанных модулей гладкости функций с квазимонотонными и лакунарными коэффициентами Фурье / И.Э. Симонова, Б.В. Симонов // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы — Воронеж : ИПЦ «Научная книга». — 2005. — С. 146.

3. Потапов М.К. О классах Бесова, Бесова-Никольского и об оценках смешанных модулей гладкости дробных производных / М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2003. — Т. 243. — С. 244–256.

4. Потапов М.К. Оценки смешанных модулей гладкости производных в смысле Вейля / М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов // Труды мат. центра им. Н.И. Лобачевского : материалы шестой Казан. междунар. летней школы-конференции. — Казань : Изд-во Казан. мат. об-ва. — 2003. — Т. 19. — С. 172–177.

О ТЕОРЕМЕ БОЛЯ–ПЕРРОНА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

П.М. Симонов (Пермь, ПГНИУ)
simpm@mail.ru, sumonov@econ.psu.ru

Сформулируем распространение теоремы Боля–Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \{f, g\}$ для произвольных банаховых пространств $\mathbf{B}$ и $\mathbf{b}$. Какие свойства требуется от пространств $\mathbf{B}$ и $\mathbf{b}$ и от операторов $\mathcal{L}_{ij}$, где $i, j = 1, 2$, можно посмотреть в работах [1], [2]. Первый вариант этой теоремы в случае $\mathbf{b}^0 = \ell^0_\infty$ опубликован в статье [3]. Второй вариант этой теоремы в случае банахова идеального пространства $\mathbf{b}^0$ приведен в статье [4].

Теорема. *Операторы $\mathcal{L}_{12} : \mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{22}, \mathbf{b}) \to \mathbf{B}$, $\mathcal{L}_{21} : \mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B}) \to \mathbf{b}$ действуют и ограничен, причем $\mathcal{L}_{12}(\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{22}, \mathbf{b}^0)) \subset \mathbf{B}_0$, $\mathcal{L}_{21}$ $(\mathbf{D}$ $(\mathcal{L}^0_{11},$ $\mathbf{B}_0)) \subset \mathbf{b}^0$. Пусть уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B})-$устойчиво и уравнение $\mathcal{L}_{22}y = g$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{22}, \mathbf{b})-$устойчиво, а операторы $\mathcal{L}_{11} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}) \to L$, $\mathcal{L}_{22} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}) \to \ell$ действует из пространства $\mathbf{D}$ $(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B}_0)$ и $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{22}, \mathbf{b}^0)$ в пространства $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{b}^0$ и ограничены. Пусть, далее, уравнение $\mathcal{L}_1 x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21})x = f_1$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B})-$устойчиво и оператор $\mathcal{L}_1 W_{11} : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_0$ ограничен. Или, пусть уравнение $\mathcal{L}_2 x = (\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12})y = g_1$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{b})-$устойчиво и оператор $\mathcal{L}_2 W_{22} : \mathbf{b}^0 \to \mathbf{b}^0$ ограничен. Тогда уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ будет $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}_0 \times \mathbf{b}^0)-$устойчивым.*

Литература

1. Симонов П.М. Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем и её обращение / П.М. Симонов // Вестник Тамбовского университета. Сер. : Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23. № 124. — С. 726–737.

2. Симонов П.М. Теорема Боля–Перрона и обратная к ней об асимптотической устойчивости для гибридных линейных систем с последействием / П.М. Симонов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2018. — № 2(41). — С. 38–43.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332 А).

3. Симонов П.М. Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) / П.М. Симонов // Вестник РАЕН. Темат. номер «Дифференциальные уравнения». — 2016. — Т. 16, № 3. — С. 55–59.

4. Симонов П.М. Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем / П.М. Симонов // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения : материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (Пермь, 17 – 19 мая 2017 г.). — Пермь : ПНИПУ, 2018. — С. 230–235.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

С.М. Ситник (Белгород, БелГУ)
sitnik@bsu.edu.ru

Неравенства типа Турана и другие неравенства для гипергеометрических функций устанавливают логарифмическую выпуклость по параметрам специальных функций, впервые они были доказаны Полом Тураном для классических многочленов Лежандра в форме

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) < \left[P_n(x)\right]^2, \ |x| < 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

Неравенства этого типа нашли многочисленные применения в прикладных задачах, они были получены также для различных типов специальных функций: ортогональных многочленов, функций Бесселя и их модификаций, гипергеометрических функций и их обобщений, функций Миттаг–Леффлера и других [1]–[12]. Вместе с тем были установлены применения неравенств подобного типа для различных классов специальных функций в задачах теории вероятностей и математической статистике, а также в финансовой математике.

Литература

1. Sitnik S.M. Generalized Volterra functions, its integral representations and applications to the Mathieu-type series / S.M. Sitnik, Kh. Mehrez // Applied Mathematics and Computation. — 2019. — V. 347. — P. 578–589.

2. Agarwal P. A Generalization of Cauchy–Bunyakovsky Integral Inequality Via Means with Max and Min Values / P. Agarwal, A.A. Korenovskii, S.M. Sitnik // In the book: Trends in Mathematics. Advances in Mathematical Inequalities and Applications. Eds.: P. Agarwal, S.S. Dragomir, M. Jleli, B. Samet. Birkhauser Basel, Springer Nature Singapore. — 2018. — Chapter 18. — P. 333–349.

3. Sitnik S.M. Turan Type Inequalities for Classical and Generalized Mittag-Leffler Functions / S.M. Sitnik, Kh. Mehrez // Analysis Mathematica. — 2018. — V. 44, № 4. — P. 521–541.

4. Sitnik S.M. Monotonicity properties and functional inequalities for the Volterra and incomplete Volterra functions / S.M. Sitnik, Kh. Mehrez // Integral Transforms and Special Functions. — 2018. — V. 29, № 11. — P. 875–892.

5. Ситник С.М. Неравенства типа Турана и их применения в вероятностных задачах / С.М. Ситник // Теория вероятностей и ее применения. — 2017. — Т. 62, № 4. — С. 828.

6. Sitnik S.M. Functional Inequalities for the Mittag-Leffler Functions / S.M. Sitnik, Kh. Mehrez // Results in Mathematics. — 2017. — V. 72, № 1–2. — P. 703–714.

7. Sitnik S.M. Proofs of some conjectures on monotonicity of ratios of Kummer, Gauss and generalized hypergeometric functions / S.M. Sitnik, Kh. Mehrez // Analysis (De Gruyter). — 2016. — V. 36, № 4. — P. 263–268.

8. Sitnik S.M. On monotonicity of ratios of some q-hypergeometric functions / S.M. Sitnik, Kh. Mehrez // Matematicki Vesnik. — 2016. — V. 68, № 3, P. 225–231.

9. Ситник С.М. Монотонность отношений некоторых гипергеометрических функций / С.М. Ситник, Х. Мехрез // Сибирские Электронные Математические Известия. — 2016. — Т. 13 (2016). — С. 260–268.

10. Karp D. Log–convexity and log–concavity of hypergeometric–like functions / D. Karp, S.M. Sitnik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2010. — V. 364, № 2. — P. 384–394.

11. Karp D. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function / D. Karp, S.M. Sitnik // Journal of Approximation Theory. — 2009. — V. 161, № 1. — P. 337–352.

12. Karp D. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions / D. Karp, A Savenkova, S.M. Sitnik // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2007. — V. 207, № 2. — P. 331–337.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ УПРУГОСТИ

Ю.И. Скалько, С.Ю. Гриднев
(Москва, МФТИ; Воронеж, ВГТУ)
skalko@mail.mipt.ru, gridnev_s_y@rambler.ru

Задачу Римана о распаде разрыва будем рассматривать в следующей постановке. Необходимо найти решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}_{i\,j}\frac{\partial^2 \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in R^N$$

с начальными данными которые всюду непрерывны, кроме гиперплоскости $\Gamma : x_1 = 0$. При этом должны выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных и их производных по обе стороны гиперплоскости.

Исходная задача Коши формулируется в виде системы линейных уравнений в частных производных для обобщенных функций. Начальные условия и значения переменных на границе входят в правую часть этой системы уравнений. При этом значения переменных на границе не известны и в дальнейшем требуется их определение. Строится приближение фундаментального решения оператора задачи. Для случая одной пространственной переменной построенное приближение является точным. Наличие фундаментального решения оператора задачи позволяет представить решение системы уравнений для обобщенных функций в виде свертки фундаментального решения с правой частью этой системы уравнений. Указанное представление решения системы уравнений для обобщенных функций и добавленные к ним условия сопряжения на границе позволили свести исходную задачу Римана к решению системы линейных алгебраических уравнений СЛАУ для неизвестных значений переменных по обе стороны границы . Решив эту СЛАУ, получим значения переменных по обе стороны, а это позволит, используя фундаментальное решение оператора задачи найти решение рассматриваемой задачи Римана о распаде разрыва в произвольной точке, в любой момент времени.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕСУРСНОЙ СЕТИ

В.А. Скороходов (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
pdvaskor@yandex.ru

Пусть $G(X,U,f,D)$ — периодическая динамическая ресурсная сеть [1,2]. Для каждой дуги $u=(i,j)$ такой сети, её пропускная способность r_{ij} имеет перидическую зависимость от дискретного времени с периодом D.

Вектор $\mathbf{Q}(t)=(q_1(t),\ldots,q_n(t))$ называется состоянием сети G в момент t, и каждое из значений $q_i(t)$ называется количеством ресурса в вершине i в момент t.

Правила функционирования динамической ресурсной сети определяются следующим образом: для каждого $i\in[1;n]_Z$

$$q_i(t+1)=q_i(t)-\sum_{v\in[x_i]^+(t)}F(v,t)+\sum_{v\in[x_i]^-(t)}F(v,t),$$

где $F(v,t)$ — это величина ресурсного потока, проходящего через дугу v в момент t.

Для моделирования процесса перераспределения ресурса в динамической сети G мы рассматриваем аналогичные процессы на вспомогательном графе G', аналогично сетям с нестандартной достижимостью, и на множестве вспомогательных регулярных графов $\{G_i\}_{i=0}^{D-1}$.

Теорема 1. *Пусть G — регулярная динамическая ресурсная сеть, тогда вектор $\mathbf{Q}'_{*1}=\left(\mathbf{Q}^*_0,\ldots,\mathbf{Q}^*_{D-1}\right)$ является предельным состоянием вспомогательной ресурсной сети G' в случае $W=1$.*

Теорема 2. *Пусть G — регулярная динамическая ресурсная сеть, тогда предельное состояние вспомогательной ресурсной сети G' существует и единственно для любого значения W.*

Литература

1. Kuznetsov O.P. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states / O.P. Kuznetsov, L.Yu. Zhilyakova // Management and Production Engineering Review. — 2011. — Vol. 2, No. 3. — pp. 33–39

2. Skorokhodov V.A. The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution / V.A. Skorokhodov, A.S. Chebotareva // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2015. — Vol. 9, No. 3. — pp. 435–446.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)
su1951@mail.ru

Рассмотрим интеграл

$$I_p(f,m,x) = \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}}{(t-x)^p} f(t)dt, |x| < 1, \tag{1}$$

где $f(x)$ — заданная плотность, $p = 1, 2, ..., m = 0, 1, ...$ Для интеграла (1) построены интерполяционные квадратурные формулы по узлам полиномов Чебышева I рода $T_n(x)$ и II рода $U_n(x)$. Аппроксимируя плотность интеграла (1) интерполяционными полиномами Лагранжа $L_n^{(q)}(x)(q = \overline{1,3})$ по узлам $x_k^{(q)}(q = \overline{1,3})$, где $x_k^{(1)} = \cos\frac{k\pi}{n}(k = \overline{0,n}), x_k^{(2)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi(k = \overline{1,n}), x_k^{(3)} = \cos\frac{k\pi}{n+1}(k = \overline{1,n})$, получим квадратурные формулы

$$I_p(f,m,x) = I_p(L_n^{(q)}, m, x) + R_p^{(q)}(f,m,x), \tag{2}$$

где $R_p^{(q)}(f,m,x)$ — остаточные члены. Используя точные значения интегралов $I_p(T_n, m, x)$ и $I_p(U_n, m, x)$, полученные в работе [1], найдены явные формы квадратурных формул (2). Остаточные члены квадратурных формул оцениваются для плотностей из класса непрерывно-дифференцируемых гельдеровых функций. Например, если $f(x) \in H_\alpha^{(r)}, 0 < \alpha \leqslant 1, r > 2p-2$, то справедлива оценка $||R_p^{(q)}(f,0,x)||_c = O(n^{-r-\alpha+2(p-1)}\ln n)$, $r + \alpha - 2(p-1) > 0$, $q = \overline{1,3}, p = 1, 2, ...$ Аналогично рассматриваются квадратурные формулы для интеграла (1), полученные аппроксимацией плотности интерполяционными полиномами Эрмита по указанным узлам $x_k^{(q)}(q = \overline{1,3})$.

Литература

1. Chan Y-S. Integral equations hypersingular kernels — theory and applications to fracture mechanics / Y-S. Chan, A.C. Fannjiang, G.H. Paulino // Int. J. of Engineering Science. — 2003. — V. 41. — P. 683–720.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВУМЕРНОЙ КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ОСТРО СФОКУСИРОВАННЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ЗОНДОМ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МАТЕРИАЛЕ[1]

М.А. Степович*, **Д.В. Туртин****,
Е.В. Серегина*** (*Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского,
**Иваново, ИФ РЭУ им. Г.В. Плеханова,
***Калуга, КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)
**m.stepovich@rambler.ru*, ***turtin@mail.ru*, ****evfs@yandex.ru*

Преобразование Ханкеля целесообразно применять, если решение операторного уравнения можно разложить по одной из функций Бесселя, что и возможно в исследуемой краевой задаче [1]. Применив данный метод к решению задачи о катодолюминесценции (КЛ) однородного полупроводникового материала, получено решение изучаемой задачи в виде, удобном для дальнейшего исследования. Рассмотрены некоторые возможности использования такого подхода для исследование качественных характеристик математической модели КЛ.

Литература

1. Туртин Д.В. О качественных характеристиках двумерной математической модели катодолюминесценции, генерированной низкоэнергетическим электронным зондом в однородном полупроводниковом материале / Д.В. Туртин, М.А. Степович, Е.В. Серегина // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа» (28 января–2 февраля 2019 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 266–267.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

СИНТЕЗ В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА ТРЕХСТОРОННЕЙ СВЁРТКИ

А.А. Татаркин, А.Б. Шишкин (Краснодар, КубГУ)
tiamatory@gmail.com, shishkin-home@mail.ru

Пусть Ω_0, Ω — выпуклые области в комплексной плоскости C, $\varepsilon > 0$, U_ε — круг $\{z : |z| < \varepsilon\}$. Будем считать, что $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$ и пространства голоморфных функций $O(\Omega_0)$, $O(U_\varepsilon)$, $O(\Omega_0)$ и $O(C)$ наделены топологиями равномерной сходимости на компактах. Выберем функцию $f \in O(\Omega)$ и линейный непрерывный функционал S на пространстве $O(\Omega_0)$. Оператор сдвига $T_h : f(z) \to f(z+h)$ на шаг $h \in U_\varepsilon$ действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ и является непрерывным. Функция

$$\psi(h) := \langle S, T_h(f)\rangle$$

называется сверткой функции f и функционала S. При фиксированных S и ε оператор $f \to \psi$ называется оператором свертки. Он действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$ и является непрерывным [1, §6]. Однородное уравнение

$$\langle S, T_h(f)\rangle = 0, \;\; f \in O(\Omega). \tag{1}$$

называется однородным уравнением свёртки. Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие однородному уравнению (1), принято называть элементарными решениями этого уравнения. Говорят, что для однородного уравнения (1) справедлива аппроксимационная теорема, если произвольное решение $f \in O(\Omega)$ этого уравнения можно аппроксимировать элементарными решениями в топологии пространства $O(\Omega)$. Справедливость аппроксимационной теоремы для уравнения (1) доказана в работе [1, теорема 6.1].

Пусть $A := (a_0, a_1, a_2)$, AT_h — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ по правилу

$$f(z) \to a_0 f(z+\omega^0 h) + a_1 f(z+\omega^1 h) + a_2 f(z+\omega^2 h),$$

где $\omega := \exp\frac{2\pi i}{3}$. Оператор AT_h принято называть оператором трехстороннего сдвига на шаг $h \in U_\varepsilon$. Выберем произвольный оператор трехстороннего сдвига AT_h, произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S на пространстве $O(\Omega_0)$. Функция

$$\psi_A(h) := \langle S,\, AT_h(f)\rangle$$

называется трехсторонней сверткой функции f и функционала S. При фиксированных S и ε линейный оператор

$$f \to \psi_A(h) := \langle S,\, AT_h(f)\rangle$$

называется оператором трехсторонней свертки. Легко убедиться, что оператор трехсторонней свертки действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$ и является непрерывным [2, §7]. Уравнение

$$\langle S,\, AT_h(f)\rangle = 0,\;\; f \in O(\Omega), \tag{2}$$

называется однородным уравнением трехсторонней свертки.

Известно, что аппроксимационная теорема для уравнения (2) справедлива, если, например, $a_0 = a_1 = a_2$. В этом случае уравнение (2) равносильно однородному уравнению

$$\Big\langle S,\, f(z+\omega^0 h) + f(z+\omega^1 h) + f(z+\omega^2 h)\Big\rangle = 0,\;\; f \in O(\Omega).$$

Справедливость аппроксимационной теоремы для таких уравнений доказана в работе [2, теорема 7.1, следствие 7.3]. Возникает вопрос о справедливости аппроксимационной теоремы для уравнения (2) в случае произвольных коэффициентов a_0, a_1, a_2, произвольной выпуклой области Ω и произвольного функционала S.

На данный вопрос получен ответ в виде необходимого и достаточного условия выполнимости аппроксимационной теоремы. Сформулируем это условие.

Известно, что AT_h совпадает с дифференциальным оператором бесконечного порядка

$$f(z) \to \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n}{n!}(D^n f)(z),$$

где

$$b_n := a_0 + a_1\omega_q^n + a_2\omega_q^{2n},\;\; n \in \{0,\, 1, ...\}$$

и ряд сходится равномерно на компактах из Ω_0. Замечаем, что коэффициенты b_n зависят от n периодическим образом, то есть для любого $n \in Z_+$ выполняется равенство $b_{n+3} = b_n$. Значит, среди коэффициентов b_0, b_1, b_2 есть отличные от нуля.

Обозначим $n_A := \{n_1, ..., n_\nu\}$ упорядоченный набор целых неотрицательных чисел из множества $\{0, 1, 2\}$, удовлетворяющих условиям:

1) $0 \leqslant n_1 < ... < n_\nu \leqslant 2$;

2) если $n \in \{n_1, ..., n_\nu\}$, то $b_n \neq 0$;

3) если $n \notin \{n_1, ..., n_\nu\}$, то $b_n = 0$.

Упорядоченный набор целых чисел n_A, удовлетворяющий условиям 1)-3), будем называть индикатором уравнения.

Дополним индикатор $n_A := \{n_1, ..., n_\nu\}$ уравнения одним элементом $n_{\nu+1} := n_1 + 3$. Будем говорить, что индикатор $n_A := \{n_1, ..., n_\nu\}$ периодичен, если

$$n_2 - n_1 = n_3 - n_2 = ... = n_{\nu+1} - n_\nu.$$

Теорема 1. *Аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и функционала S тогда и только тогда, когда индикатор n_A этого уравнения периодичен.*

Литература

1. Красичков-Терновский И.Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций / И.Ф. Красичков-Терновский // Мат. сб. — 1972. — Т. 88, № 1. — С. 3–30.

2. Шишкин А.Б. Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной / А.Б. Шишкин // Мат. сб. — 1991. — Т. 182, № 6. — С. 828–48.

3. Красичков-Терновский И.Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях / И.Ф. Красичков-Терновский // Мат. сб. — 1972. — Т. 87(129), № 4. — С. 459–489.

4. Шишкин А.Б.Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки / А.Б. Шишкин // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2016. — Т. 447. — С. 129–170.

5. Шишкин А.Б. Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность / А.Б. Шишкин // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 47–65.

6. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент / А.Ф. Леонтьев. — М. : Наука, 1976. — 536 с.

БАЗИСНОСТЬ АФФИННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША[1]

П.А. Терехин (Саратов, СГУ)
terekhinpa@mail.ru

Для 1-периодической функции $f(t)$ положим $f_0(t)$ и при $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t), \quad n = 2^k + \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu \quad (\alpha_\nu = 0 \, \text{или} \, 1).$$

Здесь $r_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — функции Радемахера. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ называется аффинной системой функций типа Уолша (см. [1] -[4]). Если $f = w = r_0$, то мы получаем классическую систему Уолша $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ в нумерации Пэли.

Обозначим через

$$S_N^f x = \sum_{n=0}^{N-1} (x, f_n^*) f_n, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

частную сумму порядка N биортогонального разложения функции x по системе $\{f_n\}_{n=0}^\infty$.

Далее, пусть $\mathcal{M}(X)$ — мультипликатор симметричного пространства X относительно тензорного произведения.

Следующая теорема дает признак базисности аффинной системы Уолша в симметричном пространстве X, т.е. $x = \lim_{N\to\infty} S_N^f x$ для всех $x \in X$, в терминах скорости сходимости $S_N^f w \to w$ для одной лишь тестовой функции $w = r_0$.

Теорема 1. *Пусть X — сепарабельное симметричное пространство с нетривиальными индексами Бойда и $f \in \mathcal{M}(X)$. Тогда при выполнении условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|w - S_{2^n}^f w\|_{\mathcal{M}(X)} < \infty$$

аффинная система Уолша $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ является базисом X.

Литература

1. Терехин П.А. Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение / П.А. Терехин // Изв. Сарат.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00414).

ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 4, Ч. 1. — С. 395–400.

2. Аль-Джоурани Х. Аффинные системы функций типа Уолша. Полнота и минимальность / Х. Аль-Джоурани, В.А. Миронов, П.А. Терехин // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 3. — С. 247–256.

3. Асташкин С.В. Аффинные системы функций типа Уолша в симметричных пространствах / С.В. Асташкин, П.А. Терехин // Матем. сб. — 2018. — Т. 209, № 4. — С. 3–25.

4. Асташкин С.В. Базисные свойства аффинной системы Уолша в симметричных пространствах / С.В. Асташкин, П.А. Терехин // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 3. — С. 3–30.

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ ВО ВНУТРЕННЕЙ ВЕРШИНЕ[1]

Т.Е. Тилеубаев (Казахстан, Нур-Султан,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева)
tileubaev@mail.ru

Граф-звезда Γ состоит из m ребер γ_k $(k = 1, \ldots, m)$ и внутренней вершины ξ. Ребра γ_k параметризованы отрезком $\gamma_k = [0, \pi/2]$, $(k = 1, .., m-1)$, а ребро $\gamma_m = [\pi/2, \pi]$ — отрезком. Сужение функции $f(x)$ на ребро γ обозначаем через $f(x)|_{\gamma}$.

Процесс теплообмена на каждом ребре γ_k описывается начально-краевой задачей

$$u_t\,(x,t)\,|_{\gamma_k} = u_{xx}\,(x,t)\,|_{\gamma_k} - q(x)u(x,t)|_{\gamma_k}, (x,t) \in \Gamma_0 \times (0,T), \quad (1)$$

$$z\,(t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right)|_{\gamma_k} = u\,(\pi/2, t)\,|_{\gamma_m}, \quad (2)$$

$$Mz_t\,(\pi/2, t)\,|_{\gamma_m} = u_x\left(\frac{\pi}{2} + 0, t\right)|_m - \sum_{k=1}^{m-1} u_x\left(\frac{\pi}{2} - 0, t\right)|_{\gamma_k}, \quad (3)$$

$$u\,(0,t)\,|_{\gamma_k} = 0,\ t \in (0,T)\,, u\,(\pi,t)\,|_{\gamma_m} = h(t), t \in (0,T) \quad (4)$$

$$u\,(x,0) = u^0\,(x)\,,\ z\,(0) = z^0. \quad (5)$$

Здесь $q(x)|_{\gamma_1} = q(x)|_{\gamma_2} = \cdots = q(x)|_{\gamma_{m-1}}; k = 1, \ldots, m-1.$

[1] Работа выполнена при поддержке Гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP05136197).

Теорема 1. *Пусть* $T > 0$*, тогда для любого* $Y^0 = (u^0, z^0)^t$ *существует управление* $h(t) \in L_2(0,\ T)$ *такое, что решение* $Y(u\,(x,t)\,,z(t))^t$ *задачи* (1)-(5) *удовлетворяет условию* $u\,(x,T) = z\,(T) = 0$.

Литература

1. Провоторов В.В. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде / В.В. Провоторов // Математический сборник. — 2008. — Т. 199, № 10. — С. 105–126.

2. Ben Amara J. Null Boundary Controllbillty of A One-dimensional heat tquation with an internal hoint mass and variable coefficients / J. Ben Amara, H. Bouzidi // arXiv:1603.09501 [math.OC].

МАЙОРАНОВСКИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА В СЛУЧАЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИЗОЛЯТОРА[1]

Т.С. Тинюкова, Ю.П. Чубурин

(Ижевск,

УдГУ, УдмФИЦ УрО РАН)

ttinyukova@mail.ru, chuburin@udman.ru

В последние приблизительно полтора десятилетия в физической литературе активно изучаются майорановские локализованные состояния (МЛС), т.е. возникающие в сверхпроводящих структурах устойчивые квазичастицы с нулевой энергией, которые предполагается использовать в квантовых вычислениях [1]. В частности, МЛС возникают в структурах вида сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник при наличии «дробного» эффекта Джозефсона [2].

Рассматривается гамильтонин Боголюбова-де Жена $\mathcal{H}+\mathcal{V}$, описывающий такую структуру на основе топологического изолятора (ср. [3]); в областях $x > a > 0, x < 0$ и $0 < x < a$ гамильтониан описывается операторами H_+, H_- и H_0 соответственно, где

$$H_+ = \begin{pmatrix} -i\sigma_x\partial_x + M\sigma_z & i\sigma_y\Delta e^{i\varphi} \\ -i\sigma_y\Delta e^{-i\varphi} & -i\sigma_x\partial_x - M\sigma_z \end{pmatrix},$$

$$V = Z\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}(\delta(x)+\delta(x-a)),$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» в рамках конкурса на предоставление грантов УдГУ на поддержку молодых ученых «Научный потенциал»-2018 (проект № 2018-03-02).

H_- совпадает с H_+ при $\varphi = 0$, H_0 совпадает с H_+ при $\Delta = 0$. Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — матрицы Паули, M — поле Зеемана, Δ — потенциал сверхпроводящего спаривания, φ — разность фаз двух сверхпроводников, Z описывает «прозрачность» контактов, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Предполагается, что $M >> \Delta - M > 0$, т.е. лакуна $[-(\Delta - M), \Delta - M]$ в спектре оператора $\mathcal{H} + \mathcal{V}$ (сверхпроводящая щель) мала и имеет место топологическая фаза [1].

В работе найдены явные аналитические выражения для 2-х имеющихся в лакуне собственных значений и собственных функций, зависящих от φ, что позволило найти сверхпроводящий ток Джозефсона $I(\varphi)$ и, в строгом подходе, прояснить ситуацию с МЛС. Ток Джозефсона имеет период 4π по φ, что и означает наличие дробного эффекта Джозефсона. В случае минимального тока $I(0) = 0$ собственные значения (т.е. энергии частиц) отличны от нуля (при $Z \neq \pm 1$) и МЛС отсутствуют. Интересно, что в случае $Z \neq 0$ на отрезке $[0, 4\pi]$ имеется промежуток, на котором собственные значения превращаются в резонансы, т.е. приобретают малую мнимую компоненту. В случае максимального тока $I(\pi)$ 2 сильно перекрывающихся МЛС образуют базис в собственном пространстве, отвечающим нулевой энергии. Полученные результаты близки к имеющимся физическим представлениям [2].

Литература

1. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems / J. Alicea // Rep. Progr. Phys. — 2012. — Vol. 75, Iss. 076501. — 36 pp.

2. Cayao J. Majorana splitting from critical currents in Josephson junctions / J. Cayao, P. San-Jose, A.M. Black-Schaffer, R. Aguado, E. Prada // Phys. Rev. B. — 2017. — Vol. 96, Iss. 205425. — 9 pp.

3. Olund C.T. Current-phase relation for Josephson effect through helical metal / C.T. Olund , E. Zhao // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol.86, Iss. 214515. — 7 pp.

ОБ ОДНОЙ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

Н.Г. Томин, И.В. Томина (Иваново, ИГЭУ)
nikolay.tomin@gmail.com, ivtomina@gmail.com

В докладе анализируется формула следов, содержащаяся в теореме из [1], в частности, проводится ее сравнение с другими известными абстрактными формулами регуляризованных следов дискретных операторов и рассматриваются некоторые ее применения. Заметим, что теорема из [1] удобна для получения конкретных формул регуляризованных следов, так как выполнение ее условий во многих важных для приложений случаях нетрудно проверить. Приведем здесь лишь одно из таких применений этой теоремы.

Пусть B — гильбертово пространство Бергмана, состоящее из аналитических на $\mathbb{C}$ функций $f(z)$ с конечной нормой $\sqrt{(f,f)}$, где $(f,g)=(1/\pi)\int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}\exp\left(-|z|^2\right)dx\,dy$ — скалярное произведение в B. Функции $e_n(z)=z^n/\sqrt{n!}$ при $n\geqslant 0$ образуют полную ортонормированную систему в B. Полагаем $\lambda_{nk}=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, где $n\geqslant 0$, $k\geqslant 1$. Пусть a и a^* — стандартные операторы Бозе уничтожения и рождения в пространстве Бергмана B, определенные формулами $(af)(z)=f'(z)$, $(a^*f)(z)=zf(z)$ и заданные на максимальных областях определения $D(a)=\{f\in B\,:\,af\in B\}$ и $D(a^*)=\{f\in B\,:\,a^*f\in B\}$ соответственно. При $k\in\mathbb{N}$ вводим в B оператор $G_k={a^*}^k a^k$. Для любого $\alpha>0$ $G_k^\alpha=({a^*}^k a^k)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{nk}^\alpha(\cdot,e_n)e_n$ при $D(G_k^\alpha)=\{f\in B\,:\,\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{nk}^{2\alpha}|(f,e_n)|^2<+\infty\}$ есть дискретный самосопряженный положительный в B оператор с собственными числами λ_{nk}^α и соответствующими им собственными функциями $e_n(z)$ $(n\geqslant 0)$. Пусть $\tilde{G_k^\alpha}=G_k^\alpha+P$, где $P=\sum_{i+j\leqslant m}c_{ij}{a^*}^i a^j$ — возмущающий оператор, $0\leqslant m\in\mathbb{Z}$ и $c_{ij}\in\mathbb{C}$, E — единичный оператор в B, $R_\lambda=(G_k^\alpha-\lambda E)^{-1}$ — резольвента невозмущенного оператора G_k^α, $\Gamma_n=\{\lambda\in\mathbb{C}\,:\,|\lambda|=(\lambda_{nk}^\alpha+\lambda_{n+1,k}^\alpha)/2\}$ при $n\geqslant k-1$.

На основе теоремы из [1] нами получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $w=2\alpha k-m-2>0$, $l\in\mathbb{N}$ и $l>m/w$. Тогда оператор $\tilde{G_k^\alpha}$ имеет ядерную резольвенту и для его собственных чисел μ_n, $n\geqslant 0$, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей, справед-*

лива следующая формула следов:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}(\mu_n-\lambda_{nk}^{\alpha})+\oint\limits_{\Gamma_N}\sum_{j=1}^{l}\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij}\mathrm{Tr}((PR_\lambda)^j)\,d\lambda\right)=0. \quad (1)$$

В частном случае $\alpha = 1$ теорема 1 была анонсирована ранее в статье [2], посвященной выводу формулы вида (1) при $\lambda'' \neq 0$ и $\lambda' = 0$ для оператора Грибова $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda} = \lambda'' {a^*}^3 a^3 + \lambda' {a^*}^2 a^2 + \mu a^* a + i\lambda a^*(a + a^*)a$ (где λ'', λ', λ, μ — вещественные параметры, $i^2 = -1$), играющего важную роль для теории Редже в квантовой теории поля при описании мягких процессов адронных взаимодействий с высокой энергией. Заметим, что этот результат, являющийся основным доказанным результатом в статье [2], получается простым применением теоремы 1 к оператору $H_{\lambda'',0,\mu,\lambda}/\lambda'' = G_3 + P_3$, где $P_3 = (\mu/\lambda'')a^*a + i(\lambda/\lambda'')a^*(a+a^*)a$. Действительно, в этом случае мы находим $k = 3$, $\alpha = 1$, $m = 3$, $w = 1 > 0$. Согласно теореме 1 формула следов (1) для оператора $H_{\lambda'',0,\mu,\lambda}/\lambda''$ справедлива при любом целом $l > m/w = 3$, в частности, при $l = 4$.

В [2] отмечено, что существование конечной формулы регуляризованных следов для оператора Грибова $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}$ при $\lambda'' \neq 0$, $\lambda' \neq 0$ является открытой проблемой. В этом случае условия теоремы 1 для оператора $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}/\lambda''$ не выполняются. Однако, применяя ее к оператору $H^{(\alpha)}_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}/\lambda''$, где $H^{(\alpha)}_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda} = \lambda''({a^*}^3 a^3)^\alpha + \lambda' {a^*}^2 a^2 + \mu a^* a + i\lambda a^*(a+a^*)a$, находим, что при любом $\alpha > 1$ для оператора $H^{(\alpha)}_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}/\lambda'' = G_3^\alpha + P_4$, где $\lambda'' \neq 0$ и $\lambda' \neq 0$, справедлива конечная формула регуляризованных следов (1), в которой число поправок аналитической теории возмущений равно $l = [2/(3\alpha - 3)] + 1$, где $[x]$ есть целая часть вещественного числа x.

Литература

1. Tomin N.G. One regularized trace formula of discrete operators / N.G. Tomin // Теория приближения функций и родственные задачи анализа : сборник материалов Международной научной конференции, посвященной памяти д.ф.-м.н., профессора П.П. Коровкина : — Калуга. : Изд-во КГУ им. К.Э. Циолковского. — 2015. — С. 75.

2. Intissar A. Regularized trace formula of magic Gribov operator on Bargmann space / A. Intissar // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2016. — V. 437, № 1. — P. 59-70.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Е.С. Турковец (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
tur-e-s@yandex.ru

Рассматриваются нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$y'''' = p_0|y''|^k \ \operatorname{sgn} y'', \quad k > 1,\ p_0 \equiv const > 0, \tag{1}$$

которое может быть сведено к уравнению типа Эмдена–Фаулера второго порядка, и вспомогательное уравнение третьего порядка

$$y''' = p_0\,|y'|^k \operatorname{sgn} y', \quad k > 1,\ p_0 \equiv const > 0. \tag{2}$$

Для уравнения Эмдена–Фаулера в виде

$$y^{(n)} = p\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)\,|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad k > 0,\ k \neq 1 \tag{3}$$

Р. Беллманом в [2] было изучено асимптотическое поведение решений уравнения второго порядка со степенным потенциалом $p(x) = x^\sigma$. И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурией в [3] изучались качественные свойства решений уравнения (3) и были получены результаты о существовании решений со степенной асимптотикой уравнений высокого порядка. В монографии [1] И.В. Асташовой была получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (3) третьего порядка в случае $p = p(x)$ и четвертого порядка в случае $p \equiv p_0$. Также И.В. Асташовой были получены асимптотики для 3 и 4 порядков в работе [5]. Для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка К.М. Дулиной и Т.А. Корчемкиной в [4] была получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений в случае $p = p(x, y, y')$.

Асимптотическое поведение решений вспомогательного нелинейного дифференциального уравнения

$$y''' = p_0\,|y'|^k \operatorname{sgn} y', \quad k > 1,\ p_0 \equiv const > 0. \tag{2}$$

Введём обозначения: $C = \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \alpha = \frac{2}{k-1}$.

Теорема 1. *Пусть $k > 3$, тогда все решения уравнения (2) в связи со своим асимптотическим поведением вблизи правой границы области определения относятся к одному из следующих типов:*

1. *Тривиальное решение* $y = 0$.
2. $y(x) \sim y_0 - \frac{C}{1-\alpha}\left((x^* - x)^{1-\alpha} - (x^* - x_0)^{1-\alpha}\right), \quad x \to x^* - 0.$
   Тогда $y(x)$ *стремится к конечному значению, а* $y'(x)$ *— к бесконечности при* $x \to x^* - 0$.
3. $y(x) \sim y_0 + \frac{C}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$
   Тогда $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$.
4. $y(x) \sim y(x_1) + \frac{C}{1-\alpha}\left((x^* - x)^{1-\alpha} - (x^* - x_1)^{1-\alpha}\right), \quad x \to x^* - 0.$
   Тогда $y(x)$ *стремится к конечному значению, а* $y'(x) \to -\infty$ *при* $x \to x^* - 0$.
5. $y(x) \sim y_0 - \frac{C}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$
   Тогда $y(x) \to -\infty, y'(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$.
6. $y(x) \sim y(x_0) + \frac{C}{1-\alpha}\left((x^* - x)^{1-\alpha} - (x^* - x_0)^{1-\alpha}\right), \quad x \to x^* - 0.$
   Тогда $y(x)$ *стремится к конечному значению, а* $y'(x) \to -\infty$ *при* $x \to x^* - 0$.

Теорема 2. *Пусть $1 < k < 3$, тогда все решения уравнения (2) в связи со своим асимптотическим поведением вблизи правой границы области определения относятся к одному из следующих типов:*

1. *Тривиальное решение* $y = 0$.
2. $y(x) \sim y_0 - \frac{C}{1-\alpha}\left((x^* - x)^{1-\alpha} - (x^* - x_0)^{1-\alpha}\right), \quad x \to x^* - 0.$
   Тогда $y(x) \to +\infty$ *и* $y'(x) \to +\infty$ *при* $x \to x^* - 0$.
3. $y(x) \sim y_0 + \frac{C}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$
   Тогда $y(x)$ *стремится к конечному значению, а* $y'(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$.
4. $y(x) \sim y(x_1) + \frac{C}{1-\alpha}\left((x^* - x)^{1-\alpha} - (x^* - x_1)^{1-\alpha}\right), \quad x \to x^* - 0.$
   Тогда $y(x) \to -\infty$ *и* $y'(x) \to -\infty$ *при* $x \to x^* - 0$.

5. $y(x) \sim y_0 - \frac{C}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$

   Тогда $y(x)$ стремится к конечному значению, а $y'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

6. $y(x) \sim y(x_0) + \frac{C}{1-\alpha}\left((x^* - x)^{1-\alpha} - (x^* - x_0)^{1-\alpha}\right), \quad x \to x^* - 0.$

   Тогда $y(x) \to -\infty$ и $y'(x) \to -\infty$ при $x \to x^* - 0$.

Асимптотическое поведение решений нелинейного дифференциального уравнения (1)

Введём обозначения: $\alpha = \frac{2}{k-1}$, $C = \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}$,
$C_1 = y'(x_0) + \frac{C}{1-\alpha}(x^* - x_0)^{1-\alpha}$, $\quad C_2 = y'(x_0) - \frac{C}{1-\alpha}x_0^{1-\alpha}$,
$C_3 = y'(x_0) - \frac{C}{1-\alpha}(x^* - x_0)^{1-\alpha}$, $\quad C_4 = y'(x_0) + \frac{C}{1-\alpha}x_0^{1-\alpha}$,
где $y'(x_0)$ — значение рассматриваемого решения $y(x)$ уравнения (1) в некоторой точке x_0.

Теорема 3. *Пусть $k > 3$, тогда все решения уравнения (1) в связи со своим асимптотическим поведением вблизи правой границы области определения относятся к одному из следующих типов:*

1. *Тривиальное решение $y = 0$.*

2. $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right.$

   Тогда $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to +\infty$.

3. $y(x) \sim y_0 + C_2(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$

   Тогда $y(x) \to -\infty$, $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to 0$.

4. $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

   Тогда $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to -\infty$.

5. $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

   Тогда $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to +\infty$.

6. $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

   Тогда $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to -\infty$.

7. $y(x) \sim y_0 + C_4(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha})$

   Тогда $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to 0$.

Теорема 4. *Пусть* $2 < k < 3$, *тогда все решения уравнения (1) в связи со своим асимптотическим поведением вблизи правой границы области определения относятся к одному из следующих типов:*

1. *Тривиальное решение* $y = 0$.

2. $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right.$

   Тогда $y(x)$ *стремится к конечному значению,* $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to +\infty$.

3. $y(x) \sim y_0 + C_2(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$

   Тогда $y(x) \to +\infty$, $y'(x)$ *стремится к конечному знначению,* $y''(x) \to 0$.

4. $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

   Тогда $y(x)$ *стремится к конечному значению,* $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to -\infty$.

5. $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

   Тогда $y(x)$ *стремится к конечному значению,* $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to +\infty$.

6. $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

   Тогда $y(x)$ *стремится к конечному значению,* $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to -\infty$.

7. $y(x) \sim y_0 + C_4(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha})$

   Тогда $|y(x)| \to \infty$, $y'(x)$ *стремится к конечному значению,* $y''(x) \to 0$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < k < 2$, *тогда все решения уравнения (1) в связи со своим асимптотическим поведением вблизи правой границы области определения относятся к одному из следующих типов:*

1. *Тривиальное решение* $y = 0$.

2. $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right.$

Тогда $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to +\infty$.

3. $y(x) \sim y_0 + C_2(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$

Тогда $|y(x)| \to \infty$, $y'(x)$ *стремится к конечному значению,* $y''(x) \to 0$.

4. $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

Тогда $y(x) \to -\infty$, $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to -\infty$.

5. $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

Тогда $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to +\infty$.

6. $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right).$

Тогда $y(x) \to -\infty$, $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to -\infty$.

7. $y(x) \sim y_0 + C_4(x - x_0) + \frac{C}{(1-\alpha)(2-\alpha)}(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha})$

Тогда $|y(x)| \to \infty$, $y'(x)$ *стремится к конечному значению,* $y''(x) \to 0$.

Литература

1. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.В. Асташова // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание по ред. И.В. Асташовой. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 22–288.

2. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1954.

3. Кигурадзе И.Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. — М.: Наука, 1990. — 432 с.

4. Дулина К.М. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом / К.М. Дулина, Т.А. Корчемкина // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2015. — Т. 128, Вып. 6. — С. 50–56.

5. Astashova I. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity / I. Astashova // Differential and Difference Equations with Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2016. — Vol. 164. — P. 191–204.

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИФФУЗИИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ОСТРО СФОКУСИРОВАННЫМ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ЗОНДОМ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МАТЕРИАЛЕ[1]

Д.В. Туртин*, **М.А. Степович****, **Е.В. Серегина***** (*Иваново, ИФ РЭУ им. Г.В. Плеханова, **Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского, ***Калуга, КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)
**turtin@mail.ru*, ***m.stepovich@rambler.ru*, ****evfs@yandex.ru*

Ранее [1] нами рассмотрены некоторые вопросы о качественных характеристиках двумерной математической модели диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных низкоэнергетическим электронным зондом в однородном полупроводниковом материале. В качестве источника ННЗ использовалась математическая модель, основанная на раздельном количественном описании потерь энергии в конденсированном веществе поглощёнными в мишени и обратно рассеянными электронами. В настоящей работе эта модель потерь энергии использована при рассмотрении вопросов, связанных с корректностью решения дифференциальных уравнений, описывающих трёхмерную диффузию ННЗ. Проведено сравнение результатов рассмотрения двумерной и трёхмерной моделей.

Литература

1. Степович М.А. О качественных характеристиках двумерной математической модели диффузии неосновных носителей заряда, генерированных низкоэнергетическим электронным зондом в однородном полупроводниковом материале / М.А. Степович, Д.В. Туртин, Е.В. Серегина, А.Н. Поляков // Актуальные проблемы при-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

кладной математики, информатики и механики : сб. тр. Международн. науч. конф. (17–19 декабря 2018 г.). — Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2018. — С. 127–133.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НА ОСНОВЕ СПУСКА ПО УЗЛОВЫМ ПРЯМЫМ[1]

А.Н. Тырсин, А.А. Азарян (Екатеринбург, УрФУ)
at2001@yandex.ru

Линейная регрессионная зависимость имеет вид

$$\mathrm{E}[Y/\mathbf{X}] = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_mX_m.$$

Для устойчивого оценивания вектора коэффициентов $\mathbf{a}$ к нарушениям условий теоремы Гаусса-Маркова используют методы, основанные на минимизации суммы модулей или функций от модулей невязок, например метод наименьших модулей (МНМ) [1] и обобщенный метод наименьших модулей (ОМНМ) [2].

Одним из вычислительно эффективных направлений реализации данных методов является спуск по узловым прямым [3]. Спуск по узловым прямым для МНМ выполняется следующим образом. В качестве начального приближения берется узловая точка, являющаяся пересечением любых различных m гиперплоскостей $\Omega_i : \sum_{k=1}^{m} a_k x_{ik} = y_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. Исключив одну из гиперплоскостей, получим узловую прямую. В любой узловой точке можно построить m таких узловых прямых. Выберем ту, вдоль которой целевая функция достигает наименьшего значения, которое всегда будет достигаться в одной из узловых точек. Найдя эту точку, продолжим движение из нее по тому же принципу. В результате будет найдена узловая точка, спуск из которой невозможен. И эта узловая точка будет являться точным решением задачи оценивания методом наименьших модулей.

Выполнен анализ вычислительной трудоемкости алгоритмов реализации МНМ и ОМНМ.

Утверждение. *Средние вычислительные сложности реализации МНМ и ОМНМ с помощью спуска по узловым прямым равны*

$$V = O(m^2n^2 + m^4 n \ln n + m^2 n \ln^2 n),$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00315).

$$W = O(m^3 n^2 \ln n + C^m_{\alpha\cdot n} \cdot (m^3 + mn)),\ \alpha \leqslant 45/n.$$

Вычислительная сложность спуска по узловым прямым позволяет на практике его реализовать для анализа динамических экспериментальных данных.

Литература

1. Мудров В.И. Методы обработки измерений : квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. — М. : Радио и связь, 1983. — 304 с.

2. Тырсин А.Н. Робастное построение регрессионных зависимостей на основе обобщенного метода наименьших модулей / А.Н. Тырсин // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2005. — Т. 328. — С. 236–250.

3. Тырсин А.Н. Методы устойчивого построения линейных моделей на основе спуска по узловым прямым / А.Н. Тырсин, А.А. Азарян // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. — 2018. — № 1 (25). — С. 188–202.

ЯВЛЕНИЕ ПОГРАНСЛОЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ им. Г.Ф. Морозова)

vum1@yandex.ru

Рассматривается задача на множестве $(x,t) \in [0,2\pi] \times [0,T]$:

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = (B + \varepsilon C)u(x,t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = u^0(x,\varepsilon), \quad u(0,t,\varepsilon) = u(2\pi,t,\varepsilon), \tag{2}$$

где $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & -1 \\ 1 & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$ с областью определения $\operatorname{dom} A = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T : v_1(x), v_2(x) \in C^2[0,2\pi],\ v(0) = v(2\pi)\}$ действует в банаховом пространстве $E = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T : v_1(x), v_2(x) \in C[0,2\pi]\}$; операторы $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $i,j = 1,2$, задаются вещественными числовыми матрицами; функция $u^0(x,\varepsilon)$ голоморфна в окрестности $\varepsilon = 0$ при каждом x; $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

Исследуется случай обратимости оператора $A_1 = Q(B + \varepsilon C)P$ при каждом ε.

Вводятся обозначения: $\tilde{B} = B + B^*$, $\tilde{C} = C + C^*$, где «$*$» обозначена сопряженная матрица; $G = G(x) = -2A^- B\tilde{C}^* QB$, где Q — проектор на $\operatorname{Coker} A$, A^- — полуобратный оператор; $\Delta_1 = \det \tilde{B}$, $\Delta_2 = \det \tilde{C}$.

Получен следующий результат.

Теорема. *Пусть G — производящий оператор полугруппы отрицательного типа при каждом x, и выполнены условия $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 > 0$. Тогда имеет место явление погранслоя в задаче (1), (2).*

Литература

1. Зубова С.П. О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной / С.П. Зубова // Доклады РАН. — 2014. — Т. 454, № 4. — С. 383–386.

2. Зубова С.П. О свойствах вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора / С.П. Зубова, В.И. Усков // Естественные и математические науки: научные приоритеты учёных : сборник научных трудов по итогам Международной научно-практической конференции. — Пермь. — 2016. — Вып. 1. — С. 9–12.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА[1]

А.С. Устюжанинова, М.В. Турбин (Воронеж, ВГУ)
mrmike@mail.ru

Рассматривается следующая задача оптимального управления движением жидкости с обратной связью:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f \in \Psi(v),$$

$$\operatorname{div} v = 0, \;\; v|_{t=0} = a, \;\; v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{1}$$

Определение 1. *Пусть $a \in V^2$. Слабое решение задачи (1) — пара функций $(v, f), v \in W = \left\{u : u \in L_\infty(0,T;V^2), u' \in L_2(0,T;V^1)\right\}$,*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 14.Z50.31.0037).

$f \in L_2(0,T;V^0)$, *которая для всех* $\varphi \in V^1$ *и для почти всех* $t \in (0,T)$ *удовлетворяет интегральному равенству*

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi dx + \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx +$$

$$+\varkappa \int_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi dx + \varkappa \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f\varphi dx,$$

условию обратной связи $f \in \Psi(v)$ *и начальному условию* $v(0) = a$.

Пусть мультиотображение $\Psi : W \multimap L_2(0,T;V^0)$ определено на W, имеет непустые, компактные, выпуклые значения; полунепрерывно сверху; компактно; глобально ограничено и слабо замкнуто. Обозначим через $\Sigma \subset W \times L_2(0,T;V^0)$ множество всех слабых решений рассматриваемой задачи (1). Рассмотрим произвольный ограниченный снизу, слабо замкнутый функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$. Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $a \in V^2$. *Для любых определённых выше* Ψ *и* Φ *задача оптимального управления движением жидкости с обратной связью для модифицированной модели Кельвина-Фойгта (1) имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что* $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v,f)$.

ОБ ОСНОВНОМ ОПЕРАТОРНОМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ ТОЖДЕСТВЕ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГТУ)
vasiliyfomin@bk.ru

В случае, когда среди корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве имеются комплексные корни, приходится использовать комплексную операторную экспоненту: для $Z = A + \mathrm{I}B$, где $A, B \in L(E)$, $\mathrm{I} = \sqrt{-I}$ – мнимая операторная единица, $e^{Zt} = e^{(A+\mathrm{I}B)t} = e^{At}(\cos Bt + \mathrm{I}\sin Bt)$, где $e^{At} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, $\sin Bt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1} B^{2n-1}}{(2n-1)!}$,
$\cos Bt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2(n-1)} B^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}$.

В связи с этим полезно выяснить свойства перечисленных операторных функций. Функция e^{At} изучена достаточно хорошо. Покажем, например, что

$$sin^2 Bt + \cos^2 Bt = I. \tag{1}$$

Используя произведение рядов в форме Коши, получаем соотношения

$$\sin^2 Bt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} \right] \frac{(-1)^{n-1} t^{2n} B^{2n}}{(2n)\,!},$$

$$\cos^2 Bt = I - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n+1} C_{2n}^{2k-2} \right] \frac{(-1)^{n-1} t^{2n} B^{2n}}{(2n)\,!},$$

из которых следует тождество (1), ибо суммы, записанные в квадратных скобках, равны между собой.

МАТОЖИДАНИЕ НЕЗАВЕРШЕННОЙ РАБОТЫ В СМО С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ, ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА И НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА

Е.С. Фролова, Т.А. Жук, Н.И. Головко
(Владивосток, ДФУ)
eu.frolova@yandex.ru, Tatyana_zhukdv@mail.ru, ygolovko@yahoo.com

Системы массового обслуживания являются аналитическими моделями информационных сетей. Статистический анализ потока заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер изменения интенсивности входного пуассоновского потока. В данной работе исследуется математическая модель СМО в виде системы уравнений относительно стационарных характеристик незавершенной работы в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока. Находится в явном виде среднее значение незавершенной работы в стационарном режиме.

Рассматривается система массового обслуживания с одним обслуживающим прибором, произвольным обслуживанием с функцией распределения времени обслуживания $B(x)$ и бесконечной емкостью накопителя. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$ и коэффициентом диффузии $b > 0$. Случайный процесс $\lambda(t)$ принимает значения на интервале $[\alpha, \beta]$ с упругими границами.

Обозначим $q_k(x) = \mathsf{P}\{\nu = k,\ x < \lambda < x + dx\}/dx$, где ν – число заявок в СМО и λ – интенсивность входного потока в стационарном режиме; $q_k(x)$ – стационарные характеристики числа заявок, $k \geqslant 0$; $f(x) = \mathsf{P}\left\{x < \lambda < x + dx\right\}/dx$ – стационарная плотность λ, $x \in [\alpha, \beta]$, $U(t)$ — незавершенная работа системы в момент времени t, U — незавершенная работа в стационарном режиме. Незавершенная работа $U(t)$ представляет собой время, необходимое для освобождения системы от всех заявок, находящихся в ней в момент t. В момент прихода очередной заявки незавершенная работа равна времени ожидания заявкой начала обслуживания.

Обозначим через $\mathbf{h}(\omega, x) = \mathsf{P}\{U \leqslant \omega; x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$, $h(\omega) = \mathbf{h}'_\omega(\omega, x)$ — стационарную функцию и плотность распределения незавершенной работы, соответственно. В работе [1] приведено уравнение относительно $\mathbf{h}(\omega, x)$, полученное для рассматриваемой СМО с применением динамики Колмогорова.

В данной работе получены краевые условия для $\mathbf{h}(\omega, x)$:

$$\mathbf{h}'_x(\omega, x_i) = 0, x_1 = \alpha, x_2 = \beta.$$

Обозначим преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$h_c(r, x) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-rw} h(\omega, x) d\omega, r \in \mathrm{C}, |r| \geqslant 0,$$

плотность по x матожидания незавершенной работы

$$MU(x) = \int_{0^-}^{\infty} \omega h(\omega, x) d\omega = E(x).$$

В результате применения преобразования Лапласа-Стилтьеса к уравнениям для $\mathbf{h}(\omega, x)$ получены уравнения для $h_c(r, x)$.

Теорема 1. *Если в СМО существует стационарный режим, то функция $h_c(r, x)$ удовлетворяет задаче Коши*

$$h_c(r, x)\Big(-x + xB_c(r) + r\Big) + b{h_c}''_{xx}(r, x)/2 = rq_0(x), \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$${h_c}'_x(r, x_i) = \frac{\partial h_c(r, x)}{\partial x}\Big|_{x=x_i} = 0, x_1 = \alpha, x_2 = \beta.$$

Из (1) при $r = 0$ получим $h_c(0,x) = f(x) = (\beta - \alpha)^{-1}$. После дифференцирования левой и правой частей (1) по r и приравнивания $r = 0$ следует краевая задача относительно $E(x) = -{h_c}'_r(0,x)$. Решение данной краевой задачи получено в явном виде:

$$E(x) = (2/b)\int_{\alpha}^{x}(x-u)\Big[f(u)(1-u\bar{\eta}) - q_0(u)\Big]du, \bar{\eta} = \int_0^{\infty} xB'(x)dx,$$

откуда среднее значение незавершенной работы $MU = \int_{\alpha}^{\beta} E(x)dx$.

Литература

1. Фролова Е.С. Уравнения для незавершенной работы в СМО с бесконечным накопителем, диффузионной интенсивностью входного потока с нулевым коэффициентом сноса / Е.С. Фролова, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ. — 2017. — С. 163–165.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А.Х. Хасанов, А.С. Бердышев, А.Р. Рыскан

(Ташкент, ИМ им. В.И. Романовского АН РУз;

Алматы КазНПУ им. Абая; ИИВТ МОН РК)

anvarhasanov@mail.ru, berdyshev@mail.ru, ryskan.a727@gmail.com

Известно, что при постановке задач и вопросах разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений существенно используются фундаментальные решения этих уравнений. Явный вид фундаментальных решений дает возможность правильно сформулировать постановку задачи и детально изучить различные свойства решений рассматриваемого уравнения.

В работе [1] на плоскости были построены в явном виде фундаментальные решения для уравнения Трикоми, которые в дальнейшем были использованы многими исследователями при изучении различных задач для уравнения смешанного типа [2]. Также фундаментальные решения были применены для построения теории

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК (№ AP05131026).

простого, двойного и объемного потенциалов [3]. Были построены фундаментальные решения для двумерных и трехмерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, эти фундаментальные решения применялись при изучении разрешимости различных задач [4].

В данном сообщении нами для обобщенного уравнения Геллерстедта

$$\begin{gathered} y^m z^k t^l u_{xx} + x^n z^k t^l u_{yy} + x^n y^m t^l u_{zz} + x^n y^m z^k u_{tt} = 0, \\ m, n, k, l \equiv const > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

в области $D = \{(x, y, z, t) : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ t > 0\}$ были построены фундаментальные решения. Установлено, что полученные фундаментальные решения обладают особенностью порядка $\frac{1}{r^2}$, при $r \to 0$. Так как уравнение (1) имеет четыре гиперповерхности вырождения, соответственно получилось шестнадцать фундаментальных решений. Эти фундаментальные решения выражаются через гипергеометрические функции Лауричелли, каждое из которых применяется в решении соответствующих краевых задач. Так, например, в решении задачи Неймана на бесконечной области будет участвовать фундаментальное решение g_1:

$$\begin{gathered} g_1\left(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0\right) = k_1 \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1} \times \\ \times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1; \alpha, \beta, \gamma, \delta; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta; \xi, \eta, \zeta, \varsigma\right), \end{gathered}$$

где $F_A^{(4)}$ является гипергеометрической функцией Лауричелли от четырех переменных [5]. А для решения задачи Дирихле используется фундаментальное решение g_{16} следующего вида:

$$\begin{gathered} g_{16}\left(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0\right) = \\ = k_{16} \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1} \xi^{1-2\alpha} \eta^{1-2\beta} \zeta^{1-2\gamma} \varsigma^{1-2\delta} \times \\ \times F_A^{(4)}\left(5-\alpha-\beta-\gamma-\delta; 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma, 1-\delta;\right. \\ \left. 2-2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma, 2-2\delta; \xi, \eta, \zeta, \varsigma\right) \end{gathered}$$

Другие фундаментальные решения также будут участвовать в решении различных смешанных задач. В случае задачи Неймана найдено условие разрешимости.

Литература

1. Barros-Neto J. Fundamental solutions for the Tricomi operator III / J. Barros-Neto, I.M. Gelfand // Duke Math.J. — 2005. — T. 128, № 1. — С. 119–140.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М. : Наука, 1985. — 304 с.

3. Golberg M.A. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems / M.A. Golberg, C.S. Chen // Comput. Mech. Publ., Boundary Integral Methods — Numerical and Mathematical Aspects. — 1998. — С. 103–176.

4. Hasanov A. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients / A. Hasanov, E.T. Karimov // Appl. Math. Letters. — 2009. — T. 22. — С. 1828–1832.

5. Appell P. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques / P. Appell, J. Kampe de Feriet. — Paris : Gauthier-Villars, 1926. — 440 с.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков (Душанбе, РТСУ)

yukhas60@mail.ru

Через **B** обозначим пространство всех равномерных почти–периодических функций, с нормой

$$||f(x)||_B = \sup_x |f(x)|.$$

Пусть ряд Фурье функции $f(x) \in B$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x},$$

где

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx$$

— коэффициенты Фурье функций $f(x) \in B$, а $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, ...)$ – показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в бесконечности (см. напр. [1]), т.е.

$$\lambda_0 = 0, \lambda_{-n} = -\lambda_n, \lambda_n < \lambda_{n+1}, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Теорема 1. Пусть функция $f(x) \in \mathbf{B}$ и

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu e^{i\lambda_\nu x}, \;\; F^*(x) = \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu^* e^{i\lambda_\nu x},$$

где

$$A_\nu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_\nu x} dx, \;\; A_\nu^* = sign A_\nu.$$

Если выполнено условие $l \geqslant \frac{2\pi}{T}$ $(0 < T < \pi)$, то справедлива следующая оценка

$$\sum_{\nu=1}^{r} |A_\nu| \leqslant C \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (1 - \frac{|x|}{T}) F(x) F^*(x) dx,$$

где С — независимая константа.

Теорема 2. Если $l \geqslant \frac{2\pi}{T}$ $(0 < T < \pi)$, то имеет место

$$\sum_{\lambda_\nu \leqslant m} (1 - \frac{\lambda_\nu}{m}) A_\nu e^{i\lambda_\nu x} |\sin \lambda_\nu h| \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{-T}^{T} \left\{ (\sigma_m(x+h,f)_B - \sigma_m(x-h,f)_B)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}}(m),$$

где C — константа, зависящая от T, а $\chi(t) \leqslant \sum_{\lambda_\nu \leqslant t} 1$.

Литература

1. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций / Ю.Х. Хасанов // Матем.заметки. — 2013. — Т. 94, № 5. — С. 745–756.

ОБ ИЗОЛИРОВАННОСТИ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ НАВЬЕ-СТОКСА

В.Л. Хацкевич (Воронеж, ВУНЦ ВВС ВВА)
vlkhats@mail.ru

Пусть Ω — область из R^n, $(n = 2, 3)$, с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Рассмотрим стационарную задачу Навье-Стокса (см. [1])

$$-\nu\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + grad p = f, \;\; div u = 0 \text{ в } \Omega, \qquad (1)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega. \qquad (2)$$

Как известно для нелинейности $f \in H^{-1}(\Omega)$ задача (1), (2) имеет по крайней мере одно слабое решение $u^0 \in V$.

Единственность решения задачи (1), (2) установлена лишь в предположении, что вязкость ν достаточно велика или, что заданные силы достаточно малы.

Пусть u^0 — некоторое решение обобщенной задачи, соответствующей (1), (2). Рассмотрим линеаризованную на u^0 однородную задачу

$$-\nu\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i^0 \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + gradq = 0, \ divu = 0 \text{ в } \Omega, \qquad (3)$$

$$\int\limits_{\Omega} qdx = 0, \ \ u|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Пусть u^0 — решение задачи (1), (2), для которого линеаризованная задача (3), (4) имеет лишь тривиальное решение. Тогда найдется такой шар $||u^0 - u||_1 \leqslant r$, что в нем не содержится других решений $\tilde{u}^0$ задачи (1), (2), для которых соответствующая задача (3), (4) имеет лишь тривиальное решение.*

Литература

1. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — Пер. с англ. — М. : Мир, 1981. — 408 с.

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С АНАЛОГАМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

А.П. Хромов (Саратов, СГУ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Наши рассуждения навеяны анализом работ [1–5] по нетрадиционному обоснованию метода Фурье в смешанных задачах.

1. Рассмотрим простейшее функциональное уравнение:

$$y(x) = 1 + xy(x). \qquad (1)$$

Для простоты считаем x вещественным. Из (1) получаем следующее очевидное формальное решение:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \dots \qquad (2)$$

Пусть $|x| < 1$. Тогда ряд (2) сходится и его сумма есть

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \tag{3}$$

т.е. (3) есть решение (1) в этом случае. Но формула (3) имеет смысл при всех x, кроме $x = 1$. Воспользуемся этим.

Пусть $|x| > 1$. Тогда ряд (2) расходящийся и его сумму, как предел частичных сумм, найти мы не можем. Поэтому разумно определить эту сумму как решение уравнения (1) по формуле (3).

Таким образом, у нас теперь сумма ряда (2) определяется решением уравнения (1) при всех x, кроме $|x| = 1$.

Пусть $x = -1$. В этом случае ряд (2), т.е. ряд $1 - 1 + 1 - \ldots$ расходящийся, но мы считаем, что его сумма есть $1/2$ (что разумно из (3)), и в этом случае она представляет обобщенное решение уравнения (1) (т. е. если в (2) положим $x = x_n$, где $|x_n| < 1$, то при $x_n \to -1 + 0$ суммы соответствующих рядов в (2) сходятся к $1/2$).

Пусть $x = 1$. Тогда ряд $1 + 1 + \ldots$ в силу (3) имеет сумму, равную $+\infty$, если его получаем из (3) при $x \to 1 - 0$ и $-\infty$, если $x \to 1 + 0$, т. е. сумма расходящегося ряда принимает два значения.

Вывод. Таким образом, ряд (2) в новом понимании дает решение уравнения (1) при всех x, кроме $x = 1$, а при $x = 1$ уравнение (1) не имеет решения.

Отметим, что если $|x| > 1$, то, записав (1) в виде:

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}y(x) \tag{4}$$

аналогично (2), получим

$$y(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \ldots \tag{5}$$

Ряд (5) сходящийся и его сумма, как легко видеть, есть (3).

Отметим еще, что в формировании суммы расходящегося ряда важна формула:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

2. Рассмотрим функциональное уравнение:

$$y(x) = 1 + f(x)y(x), \tag{6}$$

где $f(x)$ — вещественная функция.

Формальное решение (6) представляет геометрическую прогрессию:

$$y(x) = 1 + f(x) + f^2(x) + \dots \tag{7}$$

сходящуюся при $|f(x)| < 1$.

Если же $|f(x)| \geqslant 1$, то ряд (7) расходящийся и потому мы, так же, как в (4), (5), считаем, что сумма такого ряда есть сумма сходящейся геометрической прогрессии вида (5), равная $\dfrac{1}{1 - f(x)}$.

3. Рассмотрим функциональное уравнение

$$y(x) = 1 + \int\limits_0^x y(t)\,dt. \tag{8}$$

Его формальное решение есть следующий аналог геометрической прогрессии:

$$y(x) = 1 + J1 + J^2 1 + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \tag{9}$$

где $Jf = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Хорошо известно, что ряд (9) сходится при всех x и его сумма e^x является решением уравнения (8). Здесь расходящихся рядов нет.

4. Рассмотрим уравнение:

$$y(x) = f(x) + Vy(x), \quad x \in [0, 1] \tag{10}$$

где $Vy = \int\limits_0^x V(x,t) y(t)\,dt$, $f(x)$, $V(x,t)$ непрерывны (для простоты). Уравнение (10) есть уравнение Вольтерра и вместо (9) в этом случае мы будем иметь ряд Неймана

$$y(x) = f(x) + Vf + V^2 f + \dots \tag{11}$$

сходящийся к $y(x)$ с экспоненциальной скоростью. Его сумма есть решение уравнения (10). Расходящихся рядов здесь, как и в п. 3, нет.

5. Рассмотрим нелинейное уравнение:

$$y(x) = f(x) + y * y(x), \quad x \in [0, 1], \tag{12}$$

где $f(x) \in C[0,1]$, $y * y(x) = \int\limits_0^x y(x-t)y(t)\,dt$, т.е. (12) есть уравнение свертки.

Элементарное решение его было получено впервые, по-видимому, в [6] и содержится также в [7, с. 98–101]. Было показано, что при достаточно малом δ (зависящем от $f(x)$), правая часть (12) есть оператор сжатия, и поэтому по принципу сжатых отображений уравнение (12) однозначно разрешимо на $[0,\delta]$. На участках $[\delta, 2\delta]$, $[2\delta, 3\delta]$, …, $[m\delta, 1]$ последовательно убеждаемся, что оно линейно и имеет вид (10) и поэтому последовательными шагами по указанным отрезкам находим его решение, как в п. 4, в виде рядов (11). Например, на участке $[\delta, 2\delta]$ уравнение (12) есть

$$y(x) = f(x) + \int\limits_\delta^x y(t)\Phi(x,t)\,dt, \tag{13}$$

где $\Phi(x,t) = [\chi(t-\delta)+\chi(t-x+\delta)]y(x-t)$, $\chi(t)$ — функция Хевисайда: $\chi(t) = 1$ при $t \geqslant 0$, $\chi(t) = 0$ при $t < 0$; $y(x-t)$ в $\Phi(x,t)$ уже известны, поскольку $x, t \in [0,\delta]$. Значит, уравнение (13) теперь линейно и того же вида, что и в п. 4. Таким образом, на участке $[\delta, 2\delta]$ решение уравнения (13) есть сходящийся ряд вида (11).

6. Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda A y, \tag{14}$$

где $Ay = \int\limits_0^1 A(x,t)y(t)\,dt$, λ — числовой параметр, A — оператор Гильберта – Шмидта. Пусть ядро $A(x,t)$ при $t \geqslant x$ вырождено, т. е. $A(x,t) = \sum\limits_{k=1}^m a_k(x)b_k(t)$. Тогда очевидно представление: $A = M + K$, где $My = \int\limits_0^x M(x,t)y(t)\,dt$, $M(x,t) = A(x,t) - \sum\limits_{k=1}^m a_k(x)b_k(t)$,$Ky = \sum\limits_{k=1}^m a_k(x)(y, b_k)$, $(y, b_k) = \int\limits_0^1 y(t)b_k(t)\,dt$.

Такие операторы изучались в [7].

Если $|\lambda|\|A\| < 1$ ($\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$), то уравнение (14) имеет решение, представимое сходящимся в $L_2[0,1]$ рядом

$$y(x) = f(x) + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \dots, \tag{15}$$

который можно рассматривать как аналог ряда (2).

Пусть $|\lambda|\|A\| \geqslant 1$. Тогда ряд (15) нужно считать расходящимся. Определим его сумму из представления решения уравнения (14), приведенного в [7]:

$$
\begin{gathered}
y(x) = f(x) + \lambda(E - \lambda A)^{-1} A f = f(x) + \lambda \Big[M_\lambda f + \\
+ \Delta^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{m} a_k(\lambda) \sum_{j=1}^{m} ((E - \lambda M)^{-1} f, b_k) \Delta_{jk}(\lambda) \Big],
\end{gathered} \tag{16}
$$

где $M_\lambda = (E - \lambda M)^{-1} M$, E — единичный оператор, $\Delta(\lambda) = \det \|\delta_{jk} - \lambda(a_k(\lambda), b_j)\|_1^m$, $a_k(\lambda) = (E - \lambda M)^{-1} a_k(x)$, δ_{jk} — символ Кронекера, $\Delta_{jk}(\lambda)$ — алгебраические дополнения $\Delta(\lambda)$.

Правая часть (16) имеет смысл при любых λ, для которых $\Delta(\lambda) \neq 0$. Поэтому будем считать ее суммой расходящегося ряда (15) при $|\lambda|\|A\| \geqslant 1$ (ясно, что решение уравнения (14) существует лишь при $\Delta(\lambda) \neq 0$, что согласуется с известной теоремой Фредгольма).

7. Рассмотрим, наконец, произвольное уравнение Фредгольма с ядром $A(x,t)$ Гильберта–Шмидта.

Если $|\lambda|\|A\| < 1$, то мы имеем решение в виде сходящегося ряда (15).

В случае $|\lambda|\|A\| \geqslant 1$ возьмем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и используем представление $A = M + K$, где $\|M\| \leqslant \varepsilon$, K — конечномерный оператор. Если $|\lambda\varepsilon| \leqslant q$ $(0 < q < 1)$, то уравнение (14) имеет решение вида (16). При λ из промежутка $\|A\|^{-1} \leqslant |\lambda| \leqslant q/\varepsilon$ ряд (15) расходящийся с назначенной в п. 6 суммой (здесь опять получаем согласование с теоремой Фредгольма).

8. Рассмотрим смешанную задачу для уравнения струны:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x,t \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{17}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0. \tag{19}$$

Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t. \tag{20}$$

Традиционное обоснование того, что (20) есть решение (17)–(19), приводит к необходимости дважды почленного дифференцирования ряда (20), а это в свою очередь — к требованию существования $\varphi'''(x)$, иначе ряды, полученные дважды дифференцированием почленно по x и t ряда (20) будут расходящимися. Исследовать ряд (20) без предварительного его преобразования, затруднительно. Но легко видеть, что (20) можно записать в виде:

$$u(x,t) = \sum\nolimits_{+} + \sum\nolimits_{-}, \tag{21}$$

где $\sum_{\pm} = \sum(\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t)$. Ряды $\sum_{\pm}$ есть ряды Фурье, и поэтому в случае их сходимости

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)], \tag{22}$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ — нечетное 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось. Считаем по нашему определению, что (22) есть сумма ряда (21) и в случае его расходимости. В силу примера А. Н. Колмогорова ряд (21) следует считать расходящимся при $\varphi(x) \in L[0,1]$. Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то сумма ряда (20), равная (22) есть классическое решение задачи (17)–(19) (уравнение (17) при этом выполняется почти всюду). В крайнем случае $\varphi(x) \in L[0,1]$ (22) есть обобщенное решение задачи (17)–(19), понимаемое как предел классических. Точнее, если $\varphi_h(x)$ удовлетворяет условиям существования классического решения и $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$), где $\varphi \in L[0,1]$, то соответствующие классические решения $u_h(x,t)$ сходятся к $u(x,t)$ в метрике $L[Q_T]$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ при любом $T > 0$. Отметим, что глубокие факты сходимости рядов Фурье, в том числе, и пример А.Н. Колмогорова, здесь не используется. В этом как раз большое значение расходящихся рядов: в делах мы подменяем эти ряды их суммами, которые определяем из формальных решений тех задач, которые приводят к данным рядам. А уж потом мы выясняем какое отношение указанные суммы имеют к решению исходной задачи (удовлетворяют ли они уравнению, или их надо понимать как обобщенное решение).

9. Рассмотрим, наконец, следующую задачу для уравнения:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t), \quad x,t \in [0,1] \times [0,\infty) \tag{23}$$

с условиями (18), (19). Считаем, что $q(x) \in L[0,1]$ и комплекснозначна. Формальное решение по методу Фурье есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{24}$$

где $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$, r достаточно большое и фиксированное, γ_n есть образ в λ-плоскости окружности $\{\rho|\,|\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало и фиксировано, $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора Штурма – Лиувилля: $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ — спектральный параметр. Считаем, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ (это необходимые условия для классического решения задачи (18), (19), (23). Для получения вторых производных из ряда (24) применяем процедуру А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов: ряд (24) представляем в виде суммы двух рядов, один из них имеет явную сумму, производные которой легко находятся, а второй допускает почленное дифференцирование нужное число раз. Заменяя первый ряд на его сумму, получаем новое представление ряда (24), из которого получаем классическое и обобщенное решения.

Теорема 1 [1]. *Если $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, то сумма $u(x,t)$ ряда формального решения смешанной задачи обладает свойствами: $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t, $u_x(x,t)$ $(u_t(x,t))$ абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяет уравнению* (23) *почти всюду и условиям* (18), (19), *т.е. является классическим решением.*

Теорема 2 [1]. *Если $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, то ряд формального решения задачи* (18), (19), (23) *сходится почти всюду, $u(x,t) = \varphi(x)$ почти всюду. Более того, если $\varphi_h(x)$ удовлетворяет теореме 1 и $\|\varphi_h - \varphi\|_p \to 0$ при $h \to 0$ $(\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p[0,1])$, то соответствующие классические решения $u_h(x,t)$ сходятся в $L_p[Q_T]$, где $Q_T = [0,1]\times[0,T]$ при любом $T > 0$ к $u(x,t)$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение указанной задачи.*

В получении этих результатов используется знаменитая теорема Карлесона – Ханта и теорема Хаусдорфа – Юнга.

Применим теперь процедуру А. Н. Крылова бесчисленное число раз [2]. Придем от ряда (24) к ряду:

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t), \tag{25}$$

где $a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]$ ($\tilde{\varphi}(x)$ та же, что и в п. 8),

$$a_k(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{q}(\eta)a_{k-1}(\eta,\tau)\,d\eta \quad (k \geqslant 1),$$

$\tilde{q}(x)$ теперь четное, 2-периодическое продолжение $q(x)$ с $[0,1]$ на всю ось. Таким образом, ряд (24) допускает переразложение (25). Заметим, что (22) есть формула Даламбера для задачи (17)–(19). Значит, (25) есть аналог формулы Даламбера в случае $q(x) \neq 0$. Ряд (25) быстросходящийся (экспоненциальная сходимость), в том числе и в крайнем случае $q(x) \in L[0,1]$. Достоинство его в том, что он является явным выражением как классического, так и обобщенного решения задачи (23), (18), (19). Мы получаем теперь результаты из [2–5] аналогичные теоремам 1 и 2 в случае $p = 1$, при этом не используем ни пример А.Н. Колмогорова, ни теоремы Карлесона – Ханта и Хаусдорфа – Юнга. Доказательства являются элементарными, но весьма непростыми и в них используются приемы, схожие с вышеуказанными для расходящихся рядов.

Переход к ряду $A(x,t)$ есть вариант допустимых и легких преобразований формального решения, а переход к получению аналога суммы ряда в случае его расходимости упрощается, так как ряд $A(x,t) - a_0(x,t)$ сходится абсолютно равномерно. Таким образом, у нас получалась та же ситуация, что и в случае струны и мы ей пользуемся при назначении суммы ряда. Поэтому рассуждение А. Н. Крылова по ускорению сходимости имеют большое значение. С помощью такого обоснования сумм расходящихся рядов нужные выводы получаются быстрее и легче без привлечения глубоких результатов из теории сходимости рядов. Получение ряда $A(x,t)$ есть результат использования аналогов теоремы равносходимости, применяемой в каждом очередном этапе процедуры А. Н. Крылова.

10. В заключение приведем слова Эйлера [8, с. 100–101]:

«109. Из этого некоторые заключили, что такие ряды — они называются расходящимися — вообще не имеют никакой определенной суммы, ибо, выполняя сложение членов, мы не имеем приближения к какому-либо пределу, который можно было бы принять за сумму бесконечного ряда. Так как эти суммы уже потому, что мы пренебрегаем последними остатками, являются, как было показано, ошибочными, то это мнение полностью согласуется с истиной. Однако против него можно с полным правом возразить, что упомянутые суммы, хотя они и оказывают совершенно несогласными с истиной, однако никогда не приводят к ошибкам, и что напротив, приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем отказаться от этих суммирований. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить нас к истинным результатам, тем более, что они уклонялись бы от истины не на малое, а на бесконечное количество, и, следовательно, они должны были бы бесконечно далеко уводить нас от истины. Так как этого, однако, не происходит, то нам остается развязать этот труднейший узел.

110. И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии «сумма». Действительно, если под «суммой» ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомнения, что суммы можно получать только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают, могут обнаруживать чередования знаков $+$ и $-$, в противном же случае они вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если только слово «сумма» понимается в смысле результата сложения всех членов. Но в тех случаях, о которых мы упоминали, из неверных сумм получаются верные результаты не потому, что конечное выражение, скажем $\dfrac{1}{1-x}$, есть сумма ряда $1 + x + x^2 + x^3 +$ и т.д., а потому, что это выражение, если его разложить, дает именно такой ряд. Таким образом здесь можно было бы вовсе отказаться от наименования «сумма».

111. Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову «сумма» значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что *сумма* некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1 + x + x^2 + x^3 +$ и т.д. истинная сумма будет равна $\dfrac{1}{1-x}$, ибо

этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число ни подставлять вместо x. При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова сумма совпадет с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защищаться от всяческих обвинений».

Литература

1. Хромов А.П. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом / А.П. Хромов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 10. — С. 1795–1809.

2. Хромов А.П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 286–300.

3. Khromov A.P., Kornev V.V. Classical and Generalized Solutions of a Mixed Problem for a Non-homogeneous Wave Equation // Doklady Mathematics. — 2019. — Vol. 99, № 1. — P. 1–3.

4. Хромов А.П. О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения / А.П. Хромов, В.В. Корнев // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. «Понтрягинские чтения XXIV», посв. 90-летию акад. В. А. Ильина. — М. : МАКС-Пресс, 2018. — С. 132–133.

5. Корнев В.В. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с закрепленными концами / В.В. Корнев, А.П. Хромов // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы междунар. конф. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 2019. — С. 160–165.

6. Хромов А.П. О порождающих функциях интегральных вольтерровых операторов / А.П. Хромов // Теория функций и приближений : тр. 3 Сарат. зим. шк. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1987. — Ч. 1. — С. 90–96.

7. Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов / А.П. Хромов // Современная математика. Фундаментальные направления. Функциональный анализ. — Т. 10. — М. : МАИ, 2004. — С. 3–163.

8. Эйлер Леонард. Дифференциальное исчисление / Леонард Эйлер. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. — 580 с.

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ B-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ф.Г. Хуштова (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
khushtova@yandex.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x, y) - u_y(x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где $B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ — оператор Бесселя [1], $|b| < 1$. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и такую, что $u \in C(\bar{\Omega})$, $B_x u$, $u_y \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω.

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям* $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 < x < \infty$,

$$\lim_{x \to 0} x^b u_x(x, y) = hu(0, y) - \nu(y), \quad 0 < y < T,$$

где $\varphi(x)$, $\nu(y)$ *— заданные функции,* $h = const$.

Решение поставленной задачи построено в терминах функции

$$G^*(x, \xi, y) = G_1(x, \xi, y) - h\, G_2(x, \xi, y) * E(y),$$

где

$$G_1(x, \xi, y) = \frac{x^\beta \xi^\beta}{2y} e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right),$$

$$G_2(x, \xi, y) = \frac{x^\beta \xi^\beta}{y} e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}} K_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right), \quad E(y) = y^{\beta-1} E_{\frac{1}{\beta}}\left(-hy^\beta; \beta\right),$$

$f(y) * g(y)$ — свертка Лапласа, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента [2, с. 139], $E_{\frac{1}{\beta}}(z; \beta)$ — функция типа Миттаг-Леффлера [3, с. 117], $\beta = (1 - b)/2$.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука. Физматлит, 1997. — 208 с.

2. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. — М. : Физматлит, 1963. — 359 с.

3. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. — М. : Наука, 1966. — 672 с.

МОНОТОННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ СОЛНЦ В $C(Q)$[1]

И.Г. Царьков (Москва)
tsar@mech.math.msu.su

Путь $p : [0,1] \to X$ (непрерывное отображение) в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ называется монотонным, если для любого функционала $x^* \in \operatorname{extr} S^*$ функция $x^*(p(t))$ является монотонной. Геометрически это означает, что поверхности уровня этого функционала (т.е. соответствующие гиперплоскости) этот путь пересекает один раз или по следу некоторого его подпути. Множество M называется монотонно линейно связным, если любые две точки этого множества можно соединить монотонным путем, след которого лежит в M. Подмножество $M \subset X$ называется сильно связным по Менгеру, если $[[x,y]] \cap M \neq \{x,y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$. Подмножество $M \subset X$ назовем слабо связным по Менгеру, если для любого конечного набора $\alpha = (x_1^*, \dots, x_n^*) \subset \operatorname{ext} S^*$ множество $(x_1^*, \dots, x_n^*)(M)$ сильно связно по Менгеру в пространстве l_∞^n, где норма $\|y\|$ элемента $y = (y_1, \dots, y_n) \in l_\infty^n(\alpha)$ равна $\max\limits_{i=\overline{1,n}} |y_i|$.

Пусть $\varnothing \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ (это геометрически означает, что из точки y исходит луч (солнечный луч), проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M). Если все точки из $X \setminus M$ являются точками солнечности, то множество M называют солнцем.

Теорема 1. *Пусть $X = C(Q)$, M — ограниченно компактное солнце в пространстве X. Тогда множество M является сильно связным по Менгеру и, следовательно, монотонно линейно связным.*

Литература

1. Алимов А.Р. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения / А.Р. Алимов, И.Г. Царьков // Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, № 1 (427). — С. 3–84.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а).

О СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

А.В. Чернов (Нижний Новгород, ННГУ, НГТУ)
chavnn@mail.ru

Пусть X, Y — вещественные БП; $T > 0$, $q \in [1,\infty)$ — заданные числа; $\mathcal{M}[0;T] \supset L_q\big([0;T];Y\big)$; $W[0;T] \subset \mathbf{C}\big([0;T];X\big)$; $\mathcal{F} : W[0;T] \to \mathcal{M}[0;T]$ — вольтерров оператор: $\Big\{x(t) = y(t)$ для п.в. $t \in [0;\tau]\Big\} \Rightarrow \Big\{(\mathcal{F}x)(t) = (\mathcal{F}y)(t)$ для п.в. $t \in [0;\tau]\Big\}$ $\forall \tau \in [0;T]$; $a \in X$ — фиксированный элемент. Рассмотрим управляемое уравнение:

$$\big(\mathcal{F}\varphi, \varphi(0)\big) = \big(f[u](.,\varphi), a\big), \quad \varphi \in W[0;T], \qquad (\mathcal{E}_f)$$

при управлении $u \in U$ (U — произвольное множество в ЛНП $\mathcal{U}$), $f[u](t,\xi) : [0;T] \times X \to Y$, и следующих предположениях: для любого $z \in L_q\big([0;T];Y\big)$ уравнение $(\mathcal{E}_z)$ имеет единственное решение $\varphi = \varphi[z]$, всякое локальное решение единственно; существуют функции: $\beta_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $i = 0, 1$, строго возрастающие, $\beta_1(0) = 0$, и $\nu_1(t,M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, непрерывная по (t,M) и не убывающая по M: $\beta_0\Big(\big\|\varphi[z](t) - \varphi[g](t)\big\|_X\Big) \leqslant \nu_1(t,M) \int\limits_0^t \beta_1\big(\|z(s) - g(s)\|_Y\big)\, ds$ $\forall\, z, g \in L_q\big([0;T];Y\big)$, $M \geqslant \max\Big\{\|z\|_{L_q\left([0;t];Y\right)}, \|g\|_{L_q\left([0;t];Y\right)}\Big\}$, при $t \in [0;T]$; $\forall\, u \in U$, $x \in \mathbf{C}([0;T];X)$ функция $t \to f[u]\big(t, x(t)\big)$ для $t \in [0;T]$, принадлежит пространству $L_q\big([0;T];Y\big)$; существует функция $\mathcal{N}_0(t,M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по M и такая, что $\mathcal{N}_0(.,M) \in L_q[0;T]$ для всякого $M \geqslant 0$, обеспечивающая оценку $\big\|f[u](t,\xi)\big\|_Y \leqslant \mathcal{N}_0(t,M)$, для всех $t \in [0;T]$, $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\| \leqslant M$, $u \in U$; существуют функция $\mathcal{N}_1(t,M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по M и суммируемая по Лебегу по t, и $\sigma \in [0;1)$ такие, что $\beta_1\Big(\big\|f[u](t,\xi) - f[v](t,\eta)\big\|_Y\Big) \leqslant \mathcal{N}_1(t,M)\, \beta_0\Big(\sigma\big[\|\xi - \eta\|_X + \|u - v\|_{\mathcal{U}}\big]\Big)$ для всех $t \in [0;T]$, $M > 0$, $\xi, \eta \in X$, $\|\xi\|, \|\eta\| \leqslant M$, $u, v \in U$.

Теорема 1. *Пусть $\beta_0(s_1) + \beta_0(s_2) \leqslant \beta_0(s_1 + s_2)$ $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$, и при $u = \overline{u} \in U$ уравнение $(\mathcal{E}_f)$ имеет решение $\varphi = \overline{\varphi} \in W[0;T]$. Тогда $\exists\, \varepsilon > 0$, $C > 0$: $\forall\, u \in U$, $\|u - \overline{u}\|_{\mathcal{U}} \leqslant \varepsilon$, уравнение $(\mathcal{E}_f)$ имеет единственное решение $\varphi \in W[0;T]$; $\|\varphi - \overline{\varphi}\|_{\mathbf{C}([0;T];X)} \leqslant C\|u - \overline{u}\|_{\mathcal{U}}$.*

АДАПТАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

Д.А. Чечин (Воронеж, ВГУ)

В настоящей работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial \sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u'_x(0,t) - \gamma_1 u(0,t) = u'_x(\ell,t) + \gamma_2 u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}_0(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi}_1(x). \end{cases} \qquad (1)$$

Модель (1) возникает при описании малых поперечных вынужденных колебаний, растянутой с силой $p(x)$ вдоль отрезка $[0;\ell]$ и имеющей упругое закрепление (с помощью пружин жесткости γ_1 и γ_2 на концах, струны с произвольным распределением масс на ней; система помещена во внешнюю среду с локальным коэффициентом упругости dQ. Отметим, что скачки $Q(x)$ соответствуют локализованным особенностям типа пружина. Функции $\overline{\varphi}_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ — начальные отклонение и скорость соответственно. Решение (1) мы ищем в классе E непрерывных по совокупности переменных на $[0;\ell]\times[0;T]$ функций, которые имеют непрерывные частные производные u'_t и u''_{tt} при каждом фиксированном $x\in[0;\ell]$; $u(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$ при фиксированном t; $p(x)u'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$ для каждого постоянного $t\in[0;T]$; смешанные частные производные u''_{tx} и u''_{xt} равны почти всюду. Функция $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру, содержит все особенности системы, а именно, у $\sigma(x)$ скачок в тех и только тех точках, в которых скачок хотя бы у одной из функций $p(x)$, $Q(x)$ или $M(x)$. Величина скачка функции $M(x)$, которая отвечает за распределение масс, равна сосредоточенной в этой точке массе.

Для нахождения приближенного решения (1) мы применяем адаптированный метод конечных элементов. Суть его в следующем. Решение $u_N(x,t)$ будем искать в виде $\sum\limits_{k=}^{N} a_k(t)\varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ — классические базисные функции, $a_k(t)$ — неизвестные; $\varphi_k(x)$ строятся следующим образом. Отрезок $[0;\ell]$ разобьем на N равных частей точками x_k, $k=0,1,\ldots,N$ ($x_0=0$, $x_N=\ell$); $\varphi_k(x)$ равна единице в точке x_k, нулю на $[0; x_{k-1}] \cup [x_{k+1}; \ell]$, и продолжена линейной функцией на оставшуюся часть отрезка $[0; \ell]$.

Применяя стандартную схему метода конечных элементов (умножая уравнение в (1) на базисную функцию, интегрируя по мере σ (отличие от классического метода), и интегрируя по частям интеграл $\int\limits_0^\ell (p(x)u'_x)'_\sigma \varphi_k(x)\, d\sigma$ для нахождения $a_k(t)$ получим линейную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка, для численного решения которой можно применять различные разностные схемы. Отметим, что получающаяся система, дополненная начальным данными, которые определяются из начальных условий модели (1), имеет единственное решение.

Показано, что скорость сходимости приближенного решения к точному имеет порядок $\sqrt{\frac{1}{N}}$.

Литература

1. Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

3. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

4. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

5. Голованёва, Ф. В. Адаптация метода конечных элементов для одной математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров, М. Меач // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом–Алейхема. — 2016. — № 1 (22). — С. 89–92.

6. Голованева, Ф. В. Адаптация метода конечных элементов для математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованева, М. Меач, С. А. Шабров // Актуальные направ-

ления научных исследований XXI века : теория и практика. — 2015. — Т. 3, № 9–3 (20–3). — С. 292–295.

7. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

УТОЧНЕНИЕ СКОРОСТИ РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ РАДОНА–НИКОДИМА[1]

С.А. Шабров, М.В. Шаброва, Ф.В. Голованева (Воронеж, ВГУ)
shabrov_s_a@math.vsu.ru

В работе [1] была получена оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(0) = u(\ell) = u'(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

которая была затем улучшена в работе [2]. В этой работе мы уточняем порядок роста собственных значений (1). Отметим, что данная спектральная задача возникает при применении метода Фурье в математической модели, которая описывает малые собственные колебания растянутого стержня, оба конца которого защемлены, и помещенного во внешнюю среду с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости.

Коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого изготовлен стержень; положителен на отрезке $[0, \ell]$; функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке x; $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды, $F(x)$ — внешнюю силу, а $M(x)$ — масса участка $[0, x)$, σ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе E абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.

непрерывна на $[0,\ell]$; квазипроизводная pu''_{xx} абсолютна непрерывна на $[0,\ell]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$.

Под решением будем понимать функцию, принадлежащую классу E, и удовлетворяющую граничным условиям.

Под собственным значением граничной задачи будем называть всякое число λ для которого существует нетривиальное решение; эту функцию называют собственной функцией, отвечающей этому собственному значению.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0,\ell]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0,\ell]$ функция и $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$.

Уравнение в (1) определено на специальном расширении $\overline{[0,\ell]}_\sigma$ отрезка $[0,\ell]$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0; \xi; \xi+0\}$.

Множество $\overline{[0,\ell]}_\sigma$ строится следующим образом. На $[0,\ell]$ вводим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x)-\sigma(y)|$. Если $S(\sigma) \neq \varnothing$, то $([0,\ell],\rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0,\ell]}_\sigma$.

Доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть* $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ *и* $F(x)$ *—* σ*–абсолютно непрерывны на* $[0,\ell]$, $Q(x)$ *— не убывает на* $[0,l]$ *и* $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} r(x) \geqslant 0$. *Пусть* $\{\lambda_n\}$ *— собственные значения задачи* (1). *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/7+\delta}} \tag{2}$$

сходится при любом $\delta > 0$.

Эта теорема усиливает результат, полученный в [2].

Литература

1. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Бугакова, Е.А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 206–214.

2. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными Радона–Никодима / С. А. Шабров, М. В. Шаброва, Ф. В. Голованева //

Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж, 2019. — С. 284–285

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ГЛАДКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ И С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЗАВИСИТ ТОЛЬКО ОТ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.А. Шабуров (Екатеринбург,
Уральский федеральный университет)
alexandershaburov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления [1] с интегральным выпуклым критерием качествах зависящим только от медленных переменных для линейной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, \quad t\in[0,T], \quad \|u\|\leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, \quad x_\varepsilon(0)=x^0, \quad y_\varepsilon(0)=y^0, \\ J(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, \end{cases}$$

где $x_\varepsilon\in\mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon\in\mathbb{R}^m$, $u\in\mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j=1,2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа.

Более подробно общие свойства систем с интегральным выпуклым функционалом качества рассмотрены в [2, Глава 3]. Проблемы, связанные с предельной задачей, для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными рассматривались в [3,4]. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления исследовалась в статьях [5,6,7]. Отметим, что в статье [6] рассматривался терминальный критерий качества.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотики вектора сопряженного состояния в задаче оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными, с интегральным выпуклым функционалом качества, терминальная часть которого зависит от медленных переменных. Получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление. Главной отличительной особенностью изучаемой здесь задачи от задач, рассмотренных в статьях [8,9], является более общий вид управляемой системы. В случае конечного числа точек смены вида управления подробно рассмотрены примеры матрицы системы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и матрицы управления $\mathcal{B}_\varepsilon$.

Литература

1. Васильева А.Б. Математический анализ / А.Б. Васильева, М.Г. Дмитриев // Итоги науки и техники. — М. : ВИНИТИ, 1982. — Т. 20. — С. 3–77.

2. Ли Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. — М. : Наука, 1972. — 576 с.

3. Дончев А. Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности / А. Дончев. — М. : Мир, 1987. — 156 с.

4. Kokotovic P.V. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models / P.V. Kokotovic, A.H. Haddad // IEEE Trans. Automat. Control. — 1975. — Vol. 20, no. 1. — P. 111–113.

5. Данилин А.Р. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления / А.Р. Данилин, О.О. Коврижных // Докл. РАН. — 2013. — Т. 451, вып. 6. — С. 612–614.

6. Данилин А.Р. Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае / А.Р. Данилин, Ю.В. Парышева // Тр. ИММ УрО РАН. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 55–65.

7. Калинин А.И. Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями / А.И. Калинин, К.В. Семенов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2004. — Т. 44, вып. 3. — С. 432–443.

8. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ с интегральным выпуклым критерием качества / А.А. Шабуров // Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, вып. 2. — С. 303–310.

9. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных / А.А. Шабуров // Тр. ИММ УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 2. — С. 280–289.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЛЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Шайна (Воронеж, ВГУ)
katerinashaina@mail.ru

В работе получены достаточные условия, при выполнении которых, к математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial}{\partial\mu}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{dQ}{d\sigma}u + f(x,t), \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(0,t) - \gamma_1 u'_x(0,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0,t) - \left(ru'_x\right)(0) + \gamma_2 u(0,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(\ell,t) + \gamma_3 u'_x(\ell,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell,t) - \left(ru'_x\right)(\ell,t) - \gamma_4 u(\ell,t) = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

возможно применение метода Фурье. Отметим, что это модель возникает при моделировании малых вынужденных поперечных колебаний системы, состоящей из растянутых стержней, которые соединены шарнирно; в каждой точке шарнирного соединения имеется пружина, реагирующая исключительно на поворот; система находится во внешней среде, локальный коэффициент упругости которой равен dQ; коэффициент $p(x)$ характеризует материал из которого сделан стержень и отвечает за изгибную жесткость; $r(x) \geqslant 0$ — сила натяжения стержневой системы в точке x; функция $\mu(x)$ имеет особенности (ввиде скачков) в точках шарнирного соединения; $f(x,t)$ — сосредоточенная сила (если таковая присутствует), приложенная в точке шарнира в момент времени t, или плотность силы во всех остальных точках; мера σ, порождаемая строго возрастающей функцией $\sigma(x)$, содержит в себе все особенности модели — это и точки шарнирного соединения, и точки в которых локализованы особенности внешней среды, и присутствуют сосредоточенные массы; $M(x)$ — распределение масс на системе, причем скачки $M(x)$ соответствуют случаю сосредоточенных масс. К каждой точке $x = 0$ и $x = \ell$ присоединены еще по две пружины жесткостью γ_1, γ_2 и γ_3, γ_4 соответственно. Первая пружина, присоединенная к левому концу системы, реагирует на крутящий момент, возникающий в точке $x = 0$, а вторая — на смещение левого конца. Аналогично для пружин, находящихся на правом конце.

Через $S(\sigma)$ — обозначим точки разрыва функции $\sigma(x)$; σ-мера каждой точки $\xi \in S(\sigma)$ равна $\sigma\{\xi\} = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)$. В точках, принадлежащих $S(\sigma)$, уравнение в (1) принимает вид

$$\begin{aligned}&\Delta M(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, t) = \\ &= -\Delta\left(\left(p(x)u''_{x\mu}\right)'_x\right)(\xi, t) + \Delta\left(ru'_x\right)(\xi, t) - u(\xi, t)\Delta Q(\xi) + f(\xi, t),\end{aligned} \tag{2}$$

где $f(\xi, t)$ характеризует сосредоточенную силу, приложенную в точке ξ в момент времени t. Помимо (2) в точке ξ «присутствуют» еще три условия:

$$u(\xi - 0, t) = u(\xi + 0, t),$$

$$p(\xi)\frac{\Delta u'_x(\xi, t)}{\Delta\mu(\xi)} = p(\xi - 0)u''_{x\mu}(\xi - 0, t) = p(\xi + 0)u''_{x\mu}(\xi + 0, t).$$

Далее мы будем предполагать, что $S(\sigma) = S(\mu)$, т. е. дополнительных особенностей, порождаемые внешней средой и силой, не возникает.

Решение математической модели (1) мы ищем в классе E функций $u(x, t)$, каждая из которых непрерывна на $[0; \ell] \times [0; T]$; имеет непрерывные производные по переменной t до второго порядка включительно при фиксированном x; при постоянном t $u(x, t)$ абсолютно непрерывна по x на $[0; \ell]$; $u'_x(x, t)$ — μ-абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; $p(x)u''_{x\mu}(x, t)$ — абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x, t)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; производные $u'''_{tx\mu}(x, t)$ и $u'''_{x\mu t}(x, t)$ равны почти всюду (в смысле меры $[\mu \times t]$ заданной на прямоугольнике $[0; \ell] \times [0; T]$); производные $u''_{tx}(x, t)$

и $u''_{xt}(x,t)$ равны почти всюду в смысле меры Лебега заданной на $[0;\ell] \times [0;T]$.

Литература

1. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

2. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

3. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

4. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Бугакова, Е.А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 206–214.

ОБ УТОЧНЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА

И.А. Шакиров (Набережные Челны, НГПУ)
iskander@tatngpi.ru

В математической литературе для функции Лебега $\lambda_n^*(t)$, соответствующей классическому интерполяционному полиному Лагранжа, имеющему минимальную норму в пространстве суммируемых с квадратом функций, известна формула

$$\lambda_n^*(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} |D_n^*(t_k - t)|, t \in T^* = [0, \pi/n](t_k = \pi k/n, n \in N), \quad (1)$$

которая при неограниченном увеличении параметра n равномерно относительно аргумента t ведет себя как

$$\lambda_n^*(t) \cong (2/\pi)\ln n \sin nt + O(1), \quad n \to +\infty, \quad (2)$$

где $O(1)$ ограниченная величина. Трудности изучения поведения остаточного члена $O_n(t) = \lambda_n^*(t) - (2/\pi)\ln n \sin nt \quad (t \in T^*, n \in N)$ и его предельного значения $O(1)$ связаны с проблемами, возникающими при раскрытии модулей в (1).

Используя явно выраженный вид $\lambda_n^*(t)$ (см. формулу (18) [1]), строго оценим её снизу и сверху логарифмо-тригонометрическими функциями, а затем на её основе уточним формулу (2).

Теорема. *Для функции (1) справедлива асимптотическая формула*

$$\lambda_n^*(t) = \frac{2}{\pi}\ln n \sin nt + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right)\sin nt + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}, \quad n \to +\infty, \quad (3)$$

где $1/2 - 1/(2\pi) - (1/\pi)\ln(\pi/2) = 0.197101817...$, $\quad 1/2 - 1/\pi = 0.818309886....$

Следствие 1. *Если в условиях теоремы положим* $t = \pi/2n$, *то (3) преобразуется в асимптотическую формулу для константы Лебега* $\quad \lambda_n^*(t) = \frac{2}{\pi}\ln n + \overline{\alpha}_0, n \to +\infty \quad (\overline{\alpha}_0 = 1 + 1/(2\pi) - (1/\pi)\ln(\pi/2) = 1.015411703...)$, *которая незначительно отличается от известной асимптотически точной формулы* $\lambda_n^*(t) = (2/\pi)\ln n + \alpha_0, n \to +\infty \quad (\alpha_0 = 0.962522826...)$.

Следствие 2. *В формулах (2) и (3) для остаточных членов верны следующие двусторонние оценки:*

$$0.818 < O(1) < 1.016; \quad 0.818 < O_n(t) < 1.016 \quad \forall t \in T \wedge n \in N.$$

Литература

1. Шакиров И.А. О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ / И.А. Шакиров // Известия вузов. Математика. — 2010. — № 10. — С. 60–68.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.su.ru

Дать общее определение динамической системы с имеющейся диссипацией довольно затруднительно. В каждом конкретном случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определенные коэффициенты в уравнениях указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на ее подкачку. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), выражающихся через гладкие функции.

Но как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве первых интегралов [1, 2].

В некоторых случаях для систем с диссипацией если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями, имеющими существенно особые точки. Полученные в работе результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Выделим класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Во множестве работ автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [3–5]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем третьего, пятого и седьмого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладким многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Литература

1. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией : подходы, методы, приложения / М.В. Шамолин // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 3. — С. 3–237.

2. Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / М.В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М. : ВИНИТИ, 2013. — Т. 125. — С. 5–254.

3. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2017. — Т. 475, № 5. — С. 519–523.

4. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2017. — Т. 477, № 2. — С. 168–172.

5. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2018. — Т. 479, № 3. — С. 270–276.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Шамраева, В.М. Калинин (Москва,
Финансовый университет при правительстве РФ)
shamraeva@mail.ru

Рассмотрим сложную техническую систему и задачи, связанные с эффективностью её функционирования и оптимизации интенсивности эксплуатационных затрат для стратегии её обслуживания без учёта структуры с мгновенной индикацией отказа . Обозначим через η — время планового предупредительного обновления системы,

ξ — время безотказной работы системы, γ_1 — длительность планового профилактического обновления системы, γ_2 — длительность восстановительной работы при плановом аварийном обновлении системы. Случайные величины (с.в.) η, ξ, γ_1 и γ_2 — зависимые с.в. Следующий результат даёт выражение средних удельных затрат, приходящихся на единицу времени исправного функционирования с учётом остаточного ресурса оборудования [1] $C_{\text{рес}} = C_{\text{обор}} \frac{Z_{\text{ост}}}{Z_{\text{ср}}}$, где $C_{\text{обор}}$ — сметная стоимость оборудования, $Z_{\text{ост}} = E(\eta)$, $Z_{\text{ср}} = E(\xi)$.

Теорема 1. *Выражение средних удельных затрат, приходящихся на единицу времени исправного функционирования, имеет вид:* $C(G) = \frac{\int\limits_0^\infty [c_1 E\gamma_1 \overline{F}(x) + (c_2 E\gamma_2) F(x)] dG(x) + C_{pec}}{\int\limits_0^\infty [\int\limits_0^x \overline{F}(y) dy] dG(x)}$, *где* $F(x)$ *и* $G(x)$ — *функции расределения с.в.* ξ *и* η *соответственно,* c_1 (c_2) — *расходы за единицу времени проведения планового предупредительного (внепланового аварийного) обновления системы.*

Оптимальная периодичность плановых обновлений системы будет определяться как точка максимума функции $C(x)$ на $[0, \infty)$ [2].

Литература

1. Калинин В.М. Оценка эффективности эксплуатации внутриквартальных инженерных систем / В.М. Калинин, В.Н. Исаев // Сантехника. — 2004. — № 2. — С. 36–42.

2. Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем : учеб. пособие / В.А. Каштанов, А.И. Медведев. — М. : Физматлит, 2010. — 608 с.

ОБ ОДНОЗНАЧНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ КОРАНГА ОДИН

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)

nashananin@inbox.ru

Пусть $P = \sum_{l,k=1}^n a_{l,k}(x)\partial_{x_l}\partial_{x_k} + \sum_{k=1}^n b_k(x)\partial_{x_k} + c(x)$ - дифференциальный оператор с вещественными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, определенными в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что в каждой точке $x \in \Omega$ квадратичная форма ассоциированная со старшим символом оператора неотрицательно (или неположительно) определена, а соответствующая билинейная форма $B_x(\eta,\xi)$, $\eta,\xi \in T^*_x(\Omega)$, имеет одномерное ядро $\mathrm{Ker}_x(B) \subset T^*_x(\Omega)$. Предположим, что (1) *дифференциальная система $\mathcal{L}_P$, образованная векторными полями v ортогональными в каждой точке $x \in \Omega$ подпространству $\mathrm{Ker}_x(B)$ является инволютивной.* Пусть Γ - интегральная кривая дифференциальной системы $\mathcal{L}_P$. Предположим, что (2) *в любой точке $x \in \Gamma$ для любого $w_x \in \mathrm{Ker}_x(B) \setminus 0$ выполняется неравенство $w_x(\sum_{k=1}^n b_k(x)\partial_{x_k}) \neq 0$.*

Теорема 1. *Если ростки решений $u_1(x)$ и $u_2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ уравнения $Pu = f$ равны в некоторой точке x^0 кривой Γ, то они равны во всех точках этой кривой.*

При доказательстве теоремы используются результаты работ [1] и [2]. Отметим также, что можно привести пример дифференциального уравнения указанного типа с нарушенным условием инволютивности и интегральной кривой, которые не обладают свойством однозначного продолжения ростков решений.

Литература

1. Шананин Н.А. О слоевой структуре множеств симметрийной инвариантности решений квазилинейных уравнений / Н.А. Шананин // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, вып. 6. — С. 924–934.

2. Шананин Н.А. Об однозначном продолжении ростков решений дифференциальных уравнений уравнений первого порядка вдоль кривых / Н.А. Шананин // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, вып. 6. — С. 917–930.

О ЦИКЛИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ПОНТРЯГИНА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ[1]

З.И. Шарифзода, Э.М. Мухамадиев, И.Дж. Нуров
(Душанбе, Научно-исследовательский Институт ТНУ,
Вологда, ВоГУ)
nid1@mail.ru

Для исследования вопроса о существовании циклов системы (1) отправным пунктом для авторов послужила классическая теорема Л.С. Понтрягина [1], которая сформулирована при предположении аналитичности функций $P(x,y,\mu)$,$Q(x,y,\mu)$ по совокупности переменных $P(x,y,\mu)$ [2, стр. 214]:

[1] Научно-исследовательский Институт ТНИ

$$f(x) = \begin{cases} \dot{x} = -y + \mu \cdot P(x, y, \mu), \\ \dot{y} = x + \mu \cdot Q(x, y, \mu), \end{cases} \quad (1)$$

где функции $P(x, y, \mu)$,$Q(x, y, \mu)$, $0 < \mu < 1$ непрерывны по совокупности переменных (x, y, μ) в области $|\mu| < \mu_0$, $(x, y) \in R^2$. По функциям $P(x, y, \mu)$,$Q(x, y, \mu)$ определим скалярную функцию

$$F(r) = \int_0^{2\pi} (cos\varphi \cdot P(rcos\varphi, rsin\varphi, 0) + sin\varphi \cdot Q(rcos\varphi, rsin\varphi, 0))d\varphi.$$

Теорема A. Пусть $\rho_0 > 0$ — решение уравнения $F(\rho) = 0$ и в окрестности точки ρ_0 $[\rho_0 - \varepsilon_0, \rho_0 + \varepsilon_0]$, $\rho_0 - \varepsilon_0 > 0$ функция $F(\rho) \neq 0$ при $\rho \neq \rho_0$, причем значения функции $F(\rho)$ меняют знак при переходе через точку ρ_0. Тогда система (1) при достаточно малых значениях μ имеет периодическое решение $(x(t, \mu), y(t, \mu))$, удовлетворяющее условию $|\sqrt{x^2(t, \mu), y^2(t, \mu)}| < \varepsilon$.

Литература

1. Pontryagin L.S. Uber Auto Schwingungssysteme, die den Hamiltonschen nahelegen / L.S. Pontryagin // Phys. Zeitschrift der Sowjetunion. — 1934. — T. 6, № 1–2. — P. 1.

2. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М. : Наука, 1976. — 496 с.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Р.И. Шевченко, Ю.Ф. Долгий (Екатеринбург, УрФУ)
oma170@hotmail.com

Рассматривается периодическая задача оптимальной стабилизации для линейной системы с последействием

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = L\left(t, x_t(\cdot)\right) + B(t)u, \ t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)\,, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r,$$

с критерием качества переходных процессов

$$J = \int_0^{\infty} \left[x^{\mathrm{T}}(t)C_x(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)C_u(t)u(t)\right] dt.$$

Здесь $L(t,\varphi)$, $\varphi \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяет условиям из [1, с. 172], $B(\cdot), C_x(\cdot), C_u(\cdot)$ — локально интегрируемые по Лебегу матричнозначные функции аргумента $t \in \mathbb{R}^+$.

Используя [2], переходим к задаче оптимальной стабилизации для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t} = L(t, S(Y)(\cdot)) + B(t)u, \quad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \frac{N}{\tau}(y_{i-1} - y_i), i = \overline{1,N}.$$

Здесь $Y \in \mathbb{R}^{n\times(N+1)}$, $N \geqslant 1$, $S(Y(t))(\cdot)$ обозначает линейный сплайн на отрезке $[-\tau,0]$ такой, что $S(Y(t))(-i\tau/N) = y_i(t), i = \overline{0,N}$.

Конечномерная задача оптимальной стабилизации решается в специальном классе допустимых управлений [3]. Изучаются вопросы точности аппроксимации в задаче оптимальной стабилизации линейной периодической системы с последействием.

Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М. : Мир, 1984. — 421 с.

2. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи об оптимальном управлении в системе с последействием / Н.Н. Красовский // ДАН СССР. — 1966. — Т. 167, № 3. — С. 540–542.

3. Шевченко Р.И. Дискретная процедура оптимальной стабилизации периодических линейных систем дифференциальных уравнений / Р.И. Шевченко, Ю.Ф. Долгий // Вестник Тамбовского университета. Сер. : Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, вып. 124. — С. 891–906.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ФУНКЦИЯМИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ[1]

А.Н. Шелковой (Воронеж, ВГТУ)

shelkovoj.aleksandr@mail.ru

Рассматривается дифференциальный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0,2\pi]$, порождаемый дифференциальным выражением $(\mathcal{L}y)(t) = -\ddot{y}(t) + y(t)$ и нелокальными кра-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197).

евыми условиями

$$y(0) = y(2\pi) \ + \int\limits_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt; \ y(1) = \dot{y}(2\pi) \ + \int\limits_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt.$$

Считается, что функции a_0 и a_1 являются функциями ограниченной вариации на отрезке $[0, 2\pi]$.

Для исследования спектра оператора $\mathcal{L}$ рассмотрим сопряженный ему оператор $\mathcal{L}^*$, который задаётся дифференциальным выражением $(\mathcal{L}^*x)(t) = -\ddot{x}(t) + x(t) - [\dot{x}(2\pi)a_0(t) - x(2\pi)a_1(t)]$ и краевыми условиями $x(0) = x(2\pi)$; $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$.

Методом подобных операторов получены оценки собственных значений, а также доказана сходимость спектральных разложений исследуемого класса операторов.

Литература

1. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — Т. 21, № 4. — С. 18–33.

2. Шелковой А.Н. Метод подобных операторов в исследовании интегро-дифференциальных операторов с квадратично суммируемым ядром / А.Н. Шелковой // Вопросы науки. — 2016. — Т. 2. — С. 68–80.

3. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциальных операторов, определяемых нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Вопросы науки. — 2016. — Т. 3. — С. 83–90.

УСЛОВИЯ НЕИЗОМОРФНОСТИ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

М.А. Шубарин (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
mas102@mail.ru

В докладе будут продемонстрированы условия, достаточные для неизоморфности пары весовых пространств непрерывных функций (сокращённо ВПНФ).

Аналогичные условия были сформулированы В. П. Захарютой [1] и описывались в терминах компактных операторов, действующих из одного пространства Фреше в другое.

Определение 1. Пространства Фреше X и Y называются сильно различными, если произвольный линейный непрерывный оператор $T : X \to Y$ компактен.

В последующем в работах В. Фогта [2] рассматривалось ослабленное определение сильной различности пространств, в котором вмесо компактности произвольного оператора требовалось ограниченность.

Определение 2. Линейный оператор $T : X \to Y$ называют ограниченным, если существует окрестность нуля в X, которую оператор T переводит в ограниченное подмножество в Y.

Очевидно, что предыдущее определение нетривиально только в случае ненормируемости пространсва Y.

В докладе будут сформулированы достаточные условия при выполнении которых всякий линейный опрератор, действющий из одного ВПНФ в другое ограничен. В частности, отсюда следует неизоморфность рассматриваемых ВПНФ.

Литература

1. Zachariuta V.P. On isomorphism of cartesian products of local convex spaces / V.P. Zachariuta // Studia Math. — 1973. — V. 46. — P. 201–221.

2. Vogt D. Frechetraume, zwishen denen jede stetige linear Abbildung beschrankt is / D. Vogt // J.Reine Angew. Math. — V. 345. — 1983. — P. 182–200.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.Я. Янченко, В.А. Подкопаева (Москва, НИУ «МЭИ»)
yanchenkoay@mpei.ru

Рассматриваются дифференциальные уравнения вида $B(z, y, y') = 0$ (где B — многочлен с комплексными коэффициентами). С помощью техники, разработанной авторами в последние годы [1], получен следующий результат.

Теорема. *Пусть B — неприводимый многочлен из кольца $\mathbb{C}[z,\omega_1,\omega_2]$; $\frac{\partial B}{\partial \omega_2} \not\equiv 0$; оператор $\triangle_B$ определяется равенством:*

$$\triangle_B = \frac{\partial}{\partial z} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial \omega_2}\omega_2}{\frac{\partial B}{\partial \omega_2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_2}.$$

Тогда, если уравнение $B(z,y,y') = 0$ имеет решение $y = f(z)$, являющееся целой функцией конечного порядка, отличной от многочлена, то найдутся натуральное число N и многочлены с комплексными коэффициентами $a_1(z)$, ..., $a_N(z)$, такие, что

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(z) \triangle_B^n(\omega_1) = 0 \mod (B).$$

Литература

1. Янченко А.Я. О целых функциях-решениях одного класса алгебраических дифференциальных уравнений / А.Я. Янченко, В.А. Подкопаева // Сибирские электр. матем. известия. — 2018. — С. 1284–1291.

Именной указатель

Л

М

Н

О

П

Н а у ч н о е   и з д а н и е

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы Международной конференции
Воронежская весенняя математическая школа
Понтрягинские чтения — XXX
(3–9 мая 2019 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета *С. А. Шаброва*

Подписано в печать 24.04.2017. Формат 60×84/16.
Усл. п.л. 20,5. Уч.–изд. л. 20,3. Тираж 200 экз. Заказ 304.

Издательский дом ВГУ
394000 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394000 Воронеж, ул. Пушкинская, 3